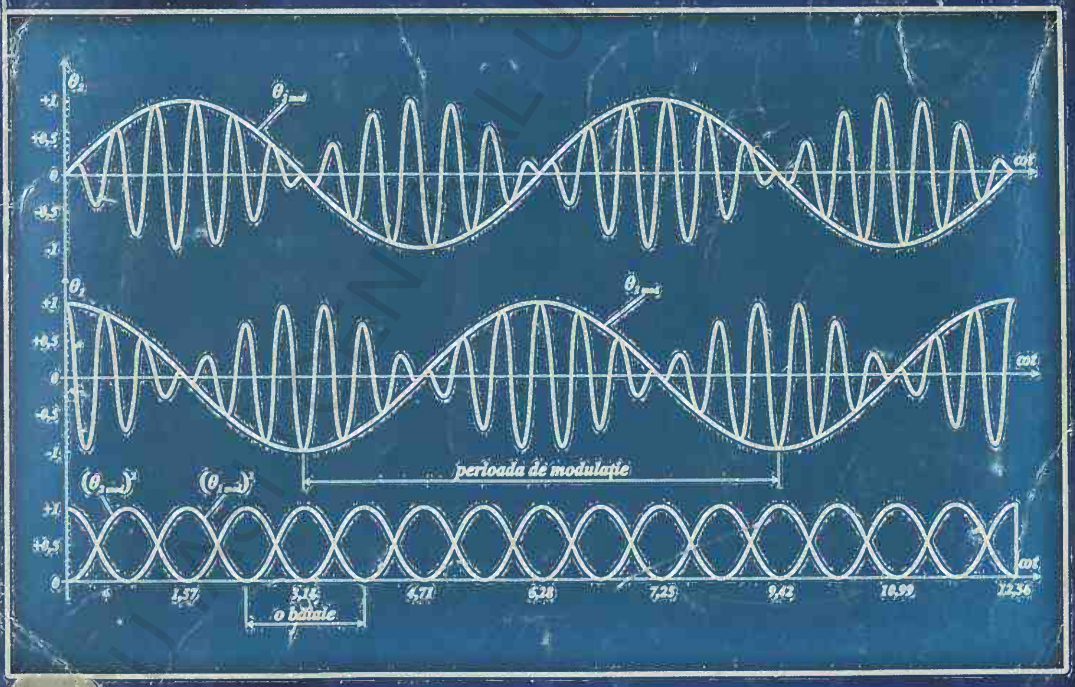
Daniel RADU Iordana AȘTEFĂNOAEI

Noțiuni fundamentale și probleme de mecanică analitică



III-12.970

Editura SEDCOM LIBRIS

BIBL. CENTR. UNIV.
„M. EMINESCU" IAŞI
FIZICA
III-12.970

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Daniel RADU Iordana AŞTEFĂNOAEI

NOŢIUNI FUNDAMENTALE ŞI PROBLEME DE MECANICĂ ANALITICĂ

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Redactori: Petru RADU, Alina HUCAI
Tehnoredactare computerizată: Radu CREȚU
Concepția și realizarea tehnică a copertei: Cristian OLARIU

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

RADU, DANIEL

Noțiuni fundamentale și probleme de mecanică analitică
/ Daniel Radu, Iordana Aștefănoaie. – Iași: Sedcom Libris, 2005
Bibliogr.
I.S.B.N.: 973-670-127-1

I. Aștefănoaei, Iordana
531.01

Editura Sedcom Libris este acreditată de Consiliul Național al Cercetării Științifice din Învățământul Superior (C.N.C.S.I.S.).

Copyright © 2005, SEDCOM LIBRIS
Toate drepturile asupra prezentei ediții sunt rezervate Editurii Sedcom Libris, Iași. Reproducerea parțială sau integrală a textelor, prin orice mijloc, precum și a graficii copertei, fără acordul scris al Editurii Sedcom Libris, este interzisă și se va pedepsi conform legislației în vigoare.

Adresa: Șos. Moara de Foc nr. 4, Iași, România
Tel.: 0232.242.877; 234.582; fax: 0232.233.080
www.sedcom.ro; e-mail: editurasedcomlibris@yahoo.com

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Daniel RADU Iordana AŞTEFĂNOAEI

NOŢIUNI FUNDAMENTALE ŞI PROBLEME DE MECANICĂ ANALITICĂ

135046
B.C.U. - IASI

Editura SEDCOM LIBRIS
Iaşi, 2005

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Daniel RADU

- Născut în mun. Paşcani, jud. Iaşi, la data de 4 mai 1967.
- Absolvent cu Diplomă de Merit al Facultăţii de Fizică a Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi.
- Doctor în fizică, membru al Societăţii Române de Gravitaţie şi Relativitate Generală, autor a două cărţi de fizică teoretică şi a peste 30 de articole ştiinţifice publicate în ţară şi în străinătate, în domeniul teoriei cuantice a câmpurilor, fizicii nucleare, teoriei cuantice a gravitaţiei şi teoriei materialelor amorfe.

Iordana AŞTEFĂNOAEI

- Născută la data de 5 ianuarie 1970 în Paşcani, jud. Iaşi.
- Licenţiată în Fizică, promoţia 1993 a Facultăţii de Fizică a Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi.
- Doctor în fizică, specialitatea Fizică Teoretică, Universitatea „Al. I. Cuza" Iaşi. Peste 25 de lucrări ştiinţifice de specialitate publicate în ţară şi în străinătate, în domeniul soluţiilor exacte ale Teoriei Relativităţii Generale şi al materialelor magnetice amorfe.
- Membră a Societăţii Române de Gravitaţie şi Relativitate Generală.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CUPRINS

Prefață 7
Introducere 9

I. Noțiuni fundamentale de mecanică analitică 13
I. 1 Noțiunea de legătură sau constrângere 13
I.1.1 Clasificarea legăturilor pentru punctul material 16
I.1.2 Problema fundamentală a dinamicii punctului material supus la legături 21
I.1.3 Clasificarea legăturilor pentru sistemele de puncte materiale 26
I.1.4 Ecuațiile Lagrange de speța I 28
I.2 Noțiunea de deplasare elementară 29
I.2.1 Deplasări elementare reale, posibile și virtuale 29
I.3 Noțiunea de lucru mecanic virtual. Principiul lucrului mecanic virtual 43
I.3.1 Principiul lucrului mecanic virtual 43
I.3.2 Principiul vitezelor virtuale 47
I.3.3 Principiul lui Torricelli 48

II. Principii ale mecanicii analitice 51
II.1 Principiul lui D'Alembert 51
II.1.1 Spațiul configurațiilor 55
II.1.2 Forțe generalizate 56
II.2 Principiul lui Hamilton 68

III. Problema pendulului simplu 83
III.1 Formalismul clasic (newtonian) 84
III.2 Formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I 100
III.3 Formalismul ecuațiilor Lagrange de speța a II-a 105
III.4 Formalismul ecuațiilor canonice ale lui Hamilton 115
III.5 Formalismul Hamilton-Jacobi 118
III.6 Formalismul variabilelor unghi-acțiune 126

IV. Probleme rezolvate cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual 135

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

V. Probleme de calcul variațional 148
V.1 Elemente de calcul variațional 148
V.1.1 Funcționale. Diferențialele unei funcționale 148
V.1.2 Extremele funcționalelor 159
V.2 Probleme a căror rezolvare necesită elemente de calcul variațional 165

VI. Probleme rezolvate cu ajutorul formalismului lagrangean 206

VII. Probleme de echilibru și mici oscilații 304

VIII. Probleme de mecanica fluidelor 352

Anexa A. Alfabetul grec (vechi) 380

Anexa B. Elemente de analiză combinatorie, trigonometrie și analiză matematică. Formule utile 381

Anexa C. Elemente de calcul vectorial. Aplicații 419

Bibliografie 501

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prefaţă

Prezenta lucrare se deosebeşte de multe altele care abordează subiecte specifice mecanicii analitice, întrucât ea cuprinde atât capitole de teorie, cât şi capitole consacrate doar rezolvării de probleme. Astfel, această lucrare este simultan atât o culegere de prelegeri/lecţii de mecanică analitică – prin capitolele I şi II – cât şi o culegere de probleme rezolvate de mecanică teoretică – prin capitolele III ÷ VIII.

La ora actuală, există un număr foarte mare de lucrări de mecanică teoretică/analitică, atât în limba română, cât şi în principalele limbi de circulaţie internaţională, unele dintre ele chiar foarte bine scrise; cu toate acestea, din experienţa dobândită în predarea cursului de „Mecanică analitică şi a mediilor deformabile" studenţilor de la Facultatea de Fizică a Universităţii „Al.I. Cuza" din Iaşi, am ajuns la concluzia că o serie de noţiuni fundamentale ale mecanicii analitice (cum ar fi cea de legătură sau constrângere, ori cea de deplasare elementară – pentru a da doar două exemple) trebuiesc explicate mai pe îndelete şi din perspective diverse, pentru a fi înţelese în profunzime. Exact acest lucru îşi propune lucrarea de faţă, atât prin partea ei teoretică, cât şi prin aplicaţiile propuse. De obicei, acestor noţiuni – cu toate că sunt fundamentale – li se acordă un spaţiu relativ redus în majoritatea lucrărilor, trecându-se cu destul de multă uşurinţă peste unele aspecte mai subtile şi mai dificil de „prins" la o primă lectură sau audiere. De aceea, în paginile acestei lucrări am insistat (credem noi suficient) asupra acestor noţiuni, dând un număr considerabil de exemple concrete, pentru a uşura şi mai mult înţelegerea lor. În acest sens, am rămâne profund recunoscători tuturor celor care, parcurgând această carte, ne vor împărtăşi impresiile lor în legătură cu conţinutul acesteia, cât şi eventualele sugestii şi/sau observaţii asupra modului de prezentare ales.

Evident, nu ne-am putut opri asupra tuturor noţiunilor de bază ale mecanicii teoretice – acesta ar fi fost un demers care ar fi implicat un volum incomparabil mai mare al lucrării – ci ne-am axat pe acele noţiuni care sunt absolut necesare pentru dezvoltarea ulterioară a formalismelor proprii mecanicii teoretice.

De asemenea, spre deosebire de marea majoritate a culegerilor de probleme rezolvate de mecanică analitică (şi nu numai), unde enunţurile problemelor sunt separate de secţiunea dedicată prezentării soluţiilor, noi am preferat rezolvarea acestora imediat după enunţ. Precizăm că rezolvarea tuturor problemelor a fost făcută extrem de amănunţit, cu respectarea algoritmilor de rezolvare prezentaţi pentru fiecare formalism în parte, pentru a oferi modele de rezolvare a problemelor de mecanică analitică cu un pronunţat caracter didactic. Calculele au fost efectuate în detaliu, pas cu pas, astfel

BCU "Al. I. Cuza" IAŞI LIBRARY

încât cititorul nu trebuie să mai folosească aproape deloc stiloul şi hârtia pentru „a desluşi" acele formule şi/sau relaţii intermediare care, fiind considerate uşor de dedus, sunt cel mai adesea omise. În plus, în cadrul acelor probleme care au condus la ecuaţii neliniare, ecuaţii transcendente etc. care nu admit soluţii analitice, sau la integrale care nu au primitive exprimabile prin funcţii analitice cunoscute, pentru a oferi soluţii complete şi/sau finale ale problemelor abordate, am utilizat soft-ul specializat atât în calcul analitic, cât şi numeric Mathematica 4.0, prezentând – acolo unde am considerat necesar – şi liniile de comandă (specifice acestui soft) care au permis rezolvarea concretă a respectivelor probleme.

Materialul este structurat în 8 capitole, 3 anexe şi o bibliografie cu 59 referinţe. De asemenea, el cuprinde un număr de 104 reprezentări grafice, folosite pentru a uşura urmărirea raţionamentelor şi/sau explicaţiilor. Datorită volumului şi aşa destul de mare al lucrării, nu am prezentat aplicaţii din toate capitolele mecanicii analitice. De exemplu, lucrarea nu conţine nici o problemă de mecanica corpului solid-rigid, din teoria elasticităţii ş.a. Aceste subiecte urmează să constituie conţinutul unui al doilea volum al lucrării.

Dorim să ne exprimăm speranţa că lucrarea de faţă va veni în sprijinul studenţilor facultăţilor de fizică (şi nu numai), răspunzând cerinţelor acestora în ceea ce priveşte lămurirea unor aspecte peste care, din lipsă de timp şi spaţiu, „s-a trecut" mai repede în cadrul cursurilor predate la catedră. Sperăm, de asemenea, că acest material va fi şi un instrument util de lucru la seminariile şi/sau laboratoarele de mecanică analitică.

Autorii doresc să mulţumească cu profundă recunoştinţă şi cu aleasă consideraţie d-lui Voltaire Teodorescu, membru al Catedrei de Fizica Corpului Solid şi Fizică Teoretică a Facultăţii de Fizică de la Universitatea „Al.I. Cuza" din Iaşi pentru nenumăratele şi deosebit de utilele discuţii pe marginea unor subiecte importante de mecanică teoretică şi, în special, pentru profunzimea şi fineţea observaţiilor domniei sale în legătură cu multe aspecte legate de modul de înţelegere şi predare a noţiunilor fundamentale ale mecanicii analitice, care ne-au ajutat în elaborarea prezentei lucrări. De asemenea, dorim să aducem sincere mulţumiri d-rei Aurelia Apetrei şi d-lui Adrian Catană, studenţi ai aceleiaşi facultăţi, pentru ajutorul preţios în tehnoredactarea lucrării.

Autorii

BCU IAŞI CENTRALA

Introducere

În anul 1788, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) a publicat la Paris lucrarea „Mécanique analytique", care conține atât contribuțiile lui, cât și sinteza principalelor contribuții ale înaintașilor săi, dintre care amintim pe Jean Bernoulli (1654-1705), Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), Leonhard Euler (1707-1783) și Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Aceasta poate fi considerată prima lucrare „serioasă" de mecanică analitică, contribuții semnificative fiind aduse apoi și de către Karl Gustav Jacobi (1804-1851), Rowan Hamilton (1805-1865), Jules Henri Poincaré (1854-1912) ș.a.

Mecanica analitică (sau teoretică) este primul curs de fizică teoretică predat studenților care urmează cursurile facultăților de fizică. Aceasta deoarece, printre altele, în cadrul acestui curs sunt prezentate principalele „instrumente de lucru", cu ajutorul cărora, ulterior, pot fi abordate și alte capitole de fizică teoretică, precum: electrodinamica, mecanica cuantică, teoria relativității, teoria câmpurilor clasice și cuantice, fizica statistică etc. În cadrul prelegerilor de mecanică analitică, orice cadru didactic de predare va include, în mod obligatoriu, formalismele de bază, cu ajutorul cărora poate fi rezolvată o problemă de mecanică și anume:

1. formalismul clasic-newtonian;
2. formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I;
3. formalismul ecuațiilor Lagrange de speța a II-a;
4. formalismul lui Hamilton;
5. formalismul Hamilton-Jacobi.

La toate acestea se mai adaugă unele „instrumente" secundare, însă deosebit de utile în unele situații concrete, cum ar fi: principiul lucrului mecanic virtual (utilizat cu precădere în rezolvarea problemelor de echilibru), principiul lui Maupertuis (sau principiul acțiunii minime, util, printre altele, în determinarea geodezicelor diverselor varietăți spațiale), teorema Noether (deosebit de utilă în determinarea integralelor prime), ecuațiile Routh (care, în unele situații – cum ar fi cea a existenței coordonatelor ciclice – prin introducerea așa-numitelor *variabile Routh*, pot ușura rezolvarea problemelor), parantezele Poisson (cu ajutorul cărora pot fi determinate integrale prime noi, pornind de la cel puțin două integrale prime independente cunoscute și utilizând teorema Poisson),

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI
FIZICĂ

transformările canonice (care, în unele situaţii, prin schimbarea coordonatelor şi/sau impulsurilor generalizate pot simplifica rezolvarea problemelor foarte mult), formalismul variabilelor unghi-acţiune (util în rezolvarea problemelor referitoare la sistemele fizice care au o mişcare periodică) etc.

Principalul scop al prezentei lucrări este acela de a prezenta într-un mod care se doreşte cât mai inteligibil unele noţiuni fundamentale specifice mecanicii analitice şi de a exemplifica utilitatea acestora prin rezolvarea unor probleme concrete. De aceea, lucrarea de faţă are un dublu caracter:

- unul pur teoretic, specific primei părţi a cărţii, care este dedicată introducerii şi explicării unor noţiuni şi principii fundamentale ale mecanicii analitice şi
- unul aplicativ, specific părţii a doua a lucrării, consacrată exemplificării modului de utilizare a formalismelor învăţate în cadrul cursurilor de mecanică teoretică, prin rezolvarea unor probleme mai mult sau mai puţin „celebre" de mecanică analitică (şi nu numai[1]).

În cadrul lucrării sunt prezentate următoarele noţiuni şi principii specifice mecanicii analitice:

1. noţiunea de legătură sau constrângere (cap. I);
2. noţiunea de deplasare elementară (cap. I);
3. noţiunea de lucru mecanic virtual (cap. I);
4. principiul lui D'Alembert (cap. II);
5. principiul lui Hamilton (cap. II),

şi sunt rezolvate:

1. problema pendulului gravitaţional, prin intermediul tuturor formalismelor amintite mai sus (cap. III);
2. probleme de determinare a poziţiilor de echilibru cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual (cap. IV);
3. probleme de calcul variaţional (cap. V);
4. probleme diverse (de exemplu: maşina Atwood simplă şi dublă, pendule cuplate, pendul cu punct de sprijin în mişcare oscilatorie,

[1] De exemplu, problema izoperimetriei cercului, ca exemplu de problemă de calcul variaţional, nu este specifică, totuşi, în mod exclusiv mecanicii analitice.

BUCUREŞTI UNIVERSITY LIBRARY

pendulul gravitațional dublu etc.) cu ajutorul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a (cap. VI);

5. probleme de studiu al echilibrului și determinare a perioadei micilor oscilații ale unor sisteme mecanice (cap. VII);
6. probleme de mecanica fluidelor (cap. VIII).

În capitolele dedicate rezolvării de probleme, acolo unde situația a cerut-o, am dezvoltat elementele de teorie strict necesare pentru înțelegerea raționamentelor și calculelor efectuate [de exemplu, în cazul problemelor de calcul variațional am prezentat succint câteva elemente de teoria calculului variațional (am definit noțiunea de funcțională și am dat condițiile necesare și suficiente de extremum pentru funcționale), în cazul studiului într-un sistem de referință neinerțial a pendulului cu punct de sprijin în mișcare oscilatorie am prezentat pe scurt elemente referitoare la forțele de inerție etc.]. Cel mai adesea, marea majoritate a autorilor preferă să prezinte aceste elemente teoretice auxiliare la sfârșitul lucrărilor, sub formă de anexe. Principalul motiv invocat pentru a justifica această alegere este păstrarea unei anumite coerențe și a unei continuități a chestiunilor prezentate. Cu toate acestea, noi am preferat „să facem unele paranteze" chiar în locurile unde se impuneau trimiteri către anumite anexe sau, și mai rău, către alte lucrări, considerând că în acest fel am venit în sprijinul cititorului, lămurind problema „pe loc". Sperăm că marea majoritate a cititorilor ne va împărtăși punctul de vedere și totodată va aprecia modul nostru de a proceda, chiar dacă, uneori aceste „paranteze" sunt cam lungi.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul I

Noțiuni fundamentale de mecanică analitică

I.1. Noțiunea de legătură sau constrângere

Această noțiune joacă un rol fundamental în mecanica analitică şi este totodată o noțiune specifică mecanicii analitice, în sensul că, spre deosebire de marea majoritate a noțiunilor de bază ale mecanicii teoretice – care sunt întâlnite şi în cadrul mecanicii fizice fenomenologice (mecanicii clasice-newtoniene[1]) – aceasta apare numai în cadrul mecanicii analitice. De altfel, aceasta este noțiunea care deosebeşte, în mod clar, un sistem fizic din punctul de vedere al „libertății" corpurilor care îl compun, în cadrul celor „două mecanici": cea clasică-newtoniană şi cea analitică.

De exemplu, în mecanica fenomenologică (clasică, newtoniană) un corp aflat în mişcare în câmp gravitațional exterior nu este considerat un corp liber, deoarece, aflându-se în câmp gravitațional, asupra lui acționează permanent forța de greutate, $\vec{G} = m\vec{g}$. Pentru a înțelege lucrurile cât mai exact trebuie să precizăm ce înseamnă că un corp este „liber" în cadrul mecanicii fizice fenomenologice. În acest sens, precizăm că, în contextul amintit, prin *corp liber* se înțelege acel *corp asupra căruia nu acționează nici o forță.* Evident, această definiție este una pur teoretică, idealizată, întrucât în realitate nu există nici un corp în Univers asupra căruia să nu acționeze nici o forță.

Spre deosebire de acestea, din punctul de vedere al mecanicii analitice, corpul considerat mai sus este un corp liber. Deci, chiar dacă asupra corpului acționează permanent forța de greutate, din perspectiva mecanicii teoretice el este totuşi un corp liber. Diferența provine din modul de înțelegere al noțiunii de „libertate" în cele două situații. Astfel, în cadrul mecanicii analitice, un corp este considerat liber atât timp cât el nu este constrâns în nici un fel să se deplaseze după orice direcție şi/sau

[1] Cum ar fi, de exemplu, noțiunile de: punct material, mişcare, viteză, accelerație, masă, forță, inerție, energie cinetică, energie potențială, lucru mecanic etc.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sens (dacă ne referim doar la mişcarea de translaţie[2]) şi să aibă orice[3] viteză. În limbajul specific mecanicii analitice, se spune despre un astfel de corp că el posedă/are numărul maxim posibil de *grade de libertate*. De altfel, cele două noţiuni, cea de legătură sau constrângere şi cea de grad de libertate sunt foarte strâns legate între ele, după cum vom vedea.

Aşadar, atât timp cât un corp se poate mişca după *oricare* din cele trei direcţii reciproc perpendiculare ale unui reper triortogonal faţă de care se studiază mişcarea corpului în spaţiul euclidian tridimensional şi are totodată libertatea de a se roti în jurul *oricăreia* din cele trei axe de coordonate – ambele mişcări, şi cea de translaţie şi cea de rotaţie făcându-se cu viteze $|\vec{v}| \leq c$ (pentru a nu ieşi din cadrul mecanicii relativiste) *arbitrare* – spunem despre acesta că este un *corp liber*.

În cadrul mecanicii analitice noţiunea de legătură sau constrângere se defineşte astfel:

Definiţie: Numim *legătură* sau *constrângere*, orice condiţie de ordin geometric sau cinematic care limitează posibilităţile de mişcare ale unui corp.

Să observăm că în cadrul acestei definiţii se face referire atât la condiţii de ordin *geometric* (acestea au efect direct asupra mulţimii de valori pe care le poate lua în timpul t al mişcării *vectorul de poziţie* al corpului respectiv, $\vec{r}$), cât şi la condiţii de ordin *cinematic* (aici se are în vedere restricţionarea posibilităţilor de mişcare ale corpului în ceea ce priveşte mulţimea de valori pe care le poate lua în timpul t al mişcării *viteza* $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ a corpului respectiv). Având în vedere cele menţionate mai sus, din punct de vedere matematic, o legătură sau constrângere se va putea exprima sub formă implicită, astfel

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0, \tag{1.1}$$

[2] Dacă, de exemplu, dimensiunile acelui corp nu pot fi neglijate (corpul nu poate fi considerat un punct material) atunci trebuie avute în vedere şi posibilităţile lui de a efectua mişcări de rotaţie sau mişcări combinate (translaţie simultan cu rotaţie).

[3] Evident, păstrându-ne în limitele mecanicii relativiste ($|\vec{v}| \leq c$, unde c este viteza luminii în vid).

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde, funcţiei f i se cere de obicei să fie o funcţie de clasă C^1 pe domeniul ei de definiţie[4].

Condiţiile de ordin geometric se pot realiza în mod concret/practic obligând corpul să se deplaseze pe o anumită *curbă* fizică (de exemplu, mişcarea unui teleferic pe cablul lui de susţinere), pe o anumită *suprafaţă* fizică (de exemplu, mişcarea unui corp pe un plan înclinat), sau într-un anumit *domeniu tridimensional* (un anumit „volum", care este delimitat fizic de o suprafaţă închisă; de exemplu, mişcarea unei pietricele în interiorul unei mingi de fotbal).

Orice legătură apare şi îşi manifestă efectul prin intermediul unei *forţe de legătură*. Aceste forţe de legătură obligă corpul să satisfacă legătura: de exemplu, să se mişte pe o anumită curbă sau pe o anumită suprafaţă, fără a părăsi curba sau suprafaţa respectivă.

Aici apare o deosebire clară între mecanica newtoniană şi cea teoretică: în timp ce în cadrul celei dintâi nu se face nici o deosebire (principială) între eventualele diferite tipuri (ca natură) de forţe, în cadrul mecanicii analitice se face o distincţie clară între *forţele aplicate* corpurilor şi cele *de legătură*. Aceasta, deoarece, în cadrul mecanicii clasice (newtoniene) este imperios necesar să cunoaştem de la bun început *toate* forţele (de orice natură sau provenienţă), măcar ca direcţie şi sens, pentru a putea astfel scrie ecuaţia fundamentală a dinamicii (ca expresie matematică a principiului acţiunii forţelor), care stă la baza rezolvării oricărei probleme de mecanică în cadrul acestui formalism. Întrucât forţele de legătură sunt adesea greu de „identificat" – în sensul că, de cele mai multe ori, nu se cunosc de la început modulul, direcţia şi sensul acestor forţe – „puterea" formalismului clasic-newtonian de rezolvare a problemelor este relativ scăzută.

Cu totul alta este însă situaţia în cadrul mecanicii analitice. În cadrul formalismelor dezvoltate în cadrul acesteia, cunoaşterea *a priori* a forţelor de legătură este înlocuită prin cunoaşterea expresiilor analitice ale legăturilor (în cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa I), ceea ce este mult mai facil decât a cunoaşte forţele de legătură, sau, pur şi simplu nu mai este nevoie să fie cunoscute nici măcar aceste expresii ale

[4] Deoarece, în cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa I, pentru scrierea ecuaţiilor corespunzătoare trebuie să existe gradientul acestor funcţii scalare.

BCU "LUCIAN BLAGA" LIBRARY

legăturilor (cum este, de exemplu, cazul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, a formalismului ecuațiilor canonice ale lui Hamilton, sau a formalismului Hamilton-Jacobi). În toate aceste cazuri (în cadrul oricărui formalism propriu mecanicii analitice) forțele de legătură se determină (evident, dacă acest lucru se dorește) abia la sfârșit, după ce legea de mișcare a corpului/sistemului a fost determinată. Tocmai de aici provine „forța" crescută a formalismelor mecanicii analitice față de cel clasic-newtonian; aceste metode permit rezolvarea unui număr mult mai mare de probleme – chiar și a acelora care implică legături complicate, pentru care forțele de legătură nu pot fi cunoscute de la început.

I.1.1. Clasificarea legăturilor pentru punctul material

Legăturile pot fi clasificate pe baza a cel puțin trei criterii, și anume:
1. după modul în care sunt exprimate – prin *egalități* sau prin *inegalități*;
2. în funcție de absența sau prezența explicită a *timpului* în expresiile lor;
3. în funcție de absența sau prezența explicită a *vitezei* în expresiile lor;

Cea mai generală formă de exprimare analitică a unei legături (lăsând la o parte aspectul legat de primul criteriu) este cea dată de relația (1.1):

$$f(\vec{r},\, \vec{v},\, t) = 0\,.$$

1. Din punctul de vedere al primului criteriu de clasificare, legăturile pot fi exprimate prin *egalități* – și atunci sunt numite *bilaterale* – sau prin *inegalități* – caz în care sunt numite *unilaterale.*

Exemple de legături bilaterale:
i) mișcarea unui corp de masă m pe o sferă situată în câmp gravitațional (pendulul sferic – vezi Fig. I.1):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\,, \text{ sau, } f(x_1,\, x_2,\, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0\,; \qquad (1.2)$$

BCUIAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

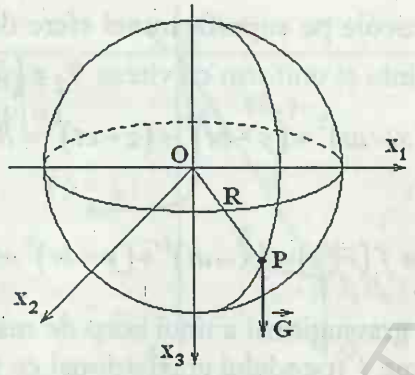


Fig. I.1

ii) mişcarea unui corp pe o suprafață conică, de deschidere unghiulară 2θ (vezi Fig. I.2):

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(R - x_3 tg\theta\right)^2,$$

sau,

$$f\left(x_1,\, x_2,\, x_3\right) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 tg^2\theta + 2R\, x_3 tg\theta - R^2 = 0; \qquad (1.3)$$

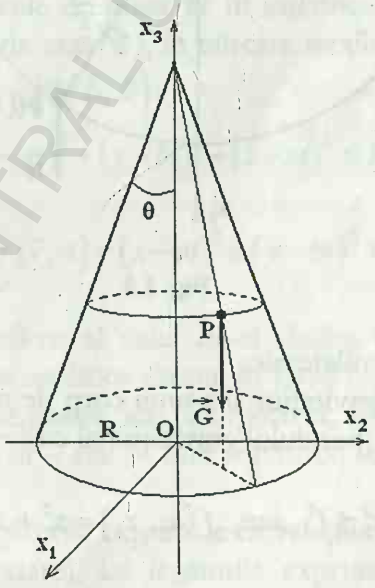


Fig. I.2

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iii) mişcarea unei particule pe suprafaţa unei sfere de rază fixă R, al cărei centru se mişcă rectiliniu şi uniform cu viteza $\vec{v}_C = (\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$:

$$(x-at)^2+(y-bt)^2+(z-ct)^2=R^2,$$

sau,

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3;\ t)\equiv f(\vec{r};\ t)=(x-at)^2+(y-bt)^2+(z-ct)^2-R^2=0\ ;(1.4)$$

iv) mişcarea în câmp gravitaţional a unui corp de masă m atârnat de o tijă rigidă ideală de lungime l (pendulul gravitaţional cu tijă – vezi Fig. I.3):

$$x_1^2+x_2^2=l^2\text{, sau, } f(x_1,\ x_2)=x_1^2+x_2^2-l^2=0\,.$$

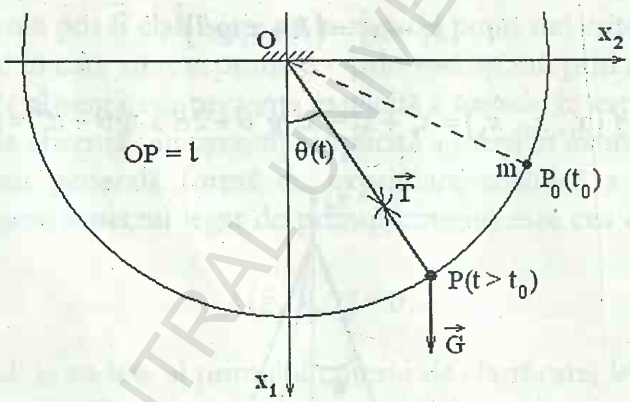


Fig. I.3

Exemple de legături unilaterale:

i) mişcarea în câmp gravitaţional a unui corp de masă m atârnat de un fir flexibil şi inextensibil (pendulul gravitaţional cu fir – vezi Fig. I.4):

$$x_1^2+x_2^2\le l^2\text{, sau, } f(x_1,\ x_2)=x_1^2+x_2^2-l^2\le 0\ ; \qquad (1.5)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

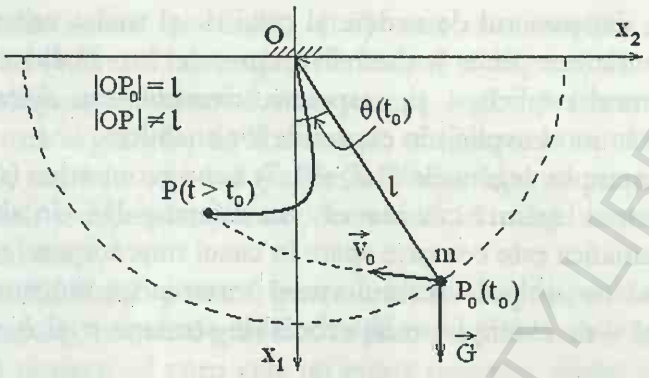


Fig. I.4

ii) mişcarea unei particule de masă m în interiorul unei mingi de rugby (presupusă a avea forma unui elipsoid de rotaţie, cu semiaxele a, b şi c) care este fixă (în repaus):

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}\le 1\text{, sau, } f(x_1, x_2, x_3)=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}-1\le 0; \qquad (1.6)$$

iii) mişcarea unei particule de masă m în interiorul unei mingi de fotbal (presupusă a fi o sferă de rază R), în mişcare rectilinie şi uniformă, viteza centrului sferei fiind $\vec{v}_C=(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$:

$$(x-at)^2+(y-bt)^2+(z-ct)^2\le R^2,$$

sau,

$$f(x_1, x_2, x_3; t)\equiv f(\vec{r}, t)=(x-at)^2+(y-bt)^2+(z-ct)^2-R^2\le 0. \qquad (1.7)$$

2. Din punctul de vedere al celui de-al doilea criteriu, legăturile pot conţine în expresiile lor analitice timpul în mod explicit – şi atunci ele se numesc *reonome* sau *nestaţionare*, sau, dimpotrivă, timpul nu apare în mod explicit în aceste expresii – caz în care legăturile se numesc *scleronome* sau *staţionare*.

De exemplu, legăturile exprimate de relaţiile (1.1), (1.4) şi (1.7) sunt reonome (sau nestaţionare), iar legăturile exprimate prin relaţiile (1.2), (1.3), (1.5) şi (1.6) sunt scleronome (sau staţionare).

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

3. În sfârşit, din punctul de vedere al celui de-al treilea criteriu, legăturile pot fi *geometrice* sau *finite* – dacă în expresiile lor analitice nu intervin vitezele în mod explicit – şi, respectiv, *cinematice* sau *diferenţiale* – dacă vitezele apar în mod explicit în expresiile lor analitice.

De exemplu, legăturile (1.2)÷(1.7) sunt geometrice (sau finite), pe când (1.1) este o legătură cinematică (sau diferenţială). Un alt exemplu de legătură cinematică este cea care apare în cazul mişcării unui corp care este forţat să aibă tot timpul vectorul viteză instantanee tangent la curba pe care se mişcă – de exemplu, o hiperbolă de semiaxe a şi b şi cu distanţa focală φ,

$$\frac{(x_1-\varphi)^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1.$$

În acest caz, legătura mai sus amintită se scrie astfel:

$$f(x_1,\, x_2,\, \dot{x}_1,\, \dot{x}_2)=b^2(x_1-\varphi)\dot{x}_1-a^2x_2\dot{x}_2=0. \qquad (1.8)$$

Derivând total în raport cu timpul expresia (1.1) a celei mai generale legături geometrice, obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

ceea ce arată faptul că orice legătură geometrică poate fi scrisă ca o legătură diferenţială liniară (liniară în componentele vitezei). Evident, reciproca acestei afirmaţii nu este adevărată.

Acele legături diferenţiale care pot fi puse sub formă geometrică sau finită se numesc *integrabile*. Legăturile geometrice împreună cu cele integrabile formează clasa legăturilor *olonome*. Legăturile neintegrabile împreună cu cele unilaterale formează clasa legăturilor *neolonome*.

Nu există metode generale de rezolvare a problemelor care implică legături neolonome. În aceste situaţii, fiecare problemă este studiată separat prin metode şi cu mijloace specifice, cât mai adecvate. Evident, pot fi situaţii în care problema să nu admită soluţie analitică şi atunci doar metodele numerice sunt cele care pot furniza informaţii despre mişcarea sistemului respectiv.

De obicei, legăturile sunt investigate (caracterizate) din punctul de vedere al tuturor celor trei criterii simultan. Astfel, legătura (1.3) este

bilaterală, scleronomă şi finită, (1.7) este unilaterală, reonomă şi geometrică, iar (1.8) este bilaterală, scleronomă şi diferențială.

Întotdeauna există o foarte strânsă legătură între numărul de legături şi numărul gradelor de libertate ale unui anumit sistem mecanic.

Definiție: Se numeşte *numărul gradelor de libertate* al unui corp, numărul de parametri reali independenți care determină în mod univoc poziția în spațiu a acelui corp.

Această definiție poate fi generalizată în mod banal la un sistem de corpuri (particule), numărul gradelor de libertate fiind o mărime aditivă.

Dacă respectivul corp este un punct material, atunci el poate avea maxim trei grade de libertate, corespunzător celor trei posibilități de mişcare de translație după cele trei axe ale unui reper triortogonal. Dacă acel corp este un solid rigid, atunci el poate avea maxim şase grade de libertate (trei ale mişcării de translație şi trei pentru mişcarea de rotație – sunt posibile maxim trei moduri independente de rotație în spațiul euclidian tridimensional). Numărul maxim de grade de libertate îl are doar acel corp asupra căruia acționează doar forțe aplicate (nu există nici o forță de legătură, deci nu există legături). În general, cu fiecare nouă legătură geometrică bilaterală, numărul gradelor de libertate scade cu câte o unitate. Numărul de legături nu poate depăşi numărul gradelor de libertate. Dacă cele două numere sunt egale, atunci starea[5] corpului (sau a sistemului de corpuri) este complet determinată doar de legături, indiferent câte forțe aplicate acționează asupra corpului (sistemului de corpuri).

I.1.2. Problema fundamentală a dinamicii punctului material supus la legături

Enunț: Fiind date: masa punctului material, m, forțele aplicate asupra punctului material (a căror rezultantă este $\vec{F}$) şi condiții inițiale compatibile cu legăturile, $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ şi $\dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0)$, să se determine legea de

[5] Care poate fi de repaus sau de mişcare relativă față de un anumit reper.

BCU IAŞI / CENTRALA / PROVISORY

mişcare a punctului material, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ şi forţele de legătură (a căror rezultantă este $\vec{L}$).

Rezolvare: Vom rezolva această problemă pentru cazul în care punctul material este obligat să se mişte pe o curbă fixă.

i) Curba este dată parametric: $x_i = x_i(q)$, $i = 1, 2, 3$, unde $q = q(t)$ este un parametru real care depinde de timp. În cel mai general caz, dependenţa funcţională a lui $\vec{F}$ este $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right)$, astfel încât, dacă ţinem cont de parametrizarea făcută, obţinem $\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right) \overset{x_i = x_i(q)}{\rightarrow} \vec{F}\left(q, \dot{q}, t\right)$. Problema se rezolvă făcând apel la principiul fundamental al dinamicii:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{L}, \tag{1.9}$$

unde $\vec{r}$ şi $\vec{L}$ sunt necunoscute. Proiectând ecuaţia vectorială (1.9) pe axele de coordonate ale unui reper triortogonal $Oxyz$ (considerat în spaţiul euclidian E_3), în raport cu care studiem mişcarea punctului material, obţinem:

$$m\ddot{x}_i = F_i + L_i, \quad \left(i = \overline{1,3}\right). \tag{1.10}$$

Acesta este un sistem de trei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul doi, pentru patru necunoscute: L_x, L_y, L_z şi q, deoarece, în virtutea parametrizării, $F_i = F_i\left(q, \dot{q}, t\right)$. Pentru a-l putea rezolva în mod univoc mai avem nevoie de încă o ecuaţie. Aceasta se determină în felul următor (vezi Fig. I.5): descompunem forţa de legătură $\vec{L}$ în două componente vectoriale reciproc perpendiculare, $\vec{L}_t$ şi $\vec{L}_n$, $\vec{L} = \vec{L}_t + \vec{L}_n$, unde componenta $\vec{L}_t$ este tangentă la curbă în punctul curent, iar componenta $\vec{L}_n$ se află într-un plan perpendicular la curbă în acelaşi punct. Această componentă $\left(\vec{L}_n\right)$ se numeşte de obicei *reacţiune normală*, iar cealaltă $\left(\vec{L}_t\right)$ se numeşte *forţă de frecare*. Dacă $\vec{L}_t = 0$, atunci corpul se mişcă fără frecare (evident, acesta este un caz ideal), iar curba $\left(\Gamma\right)$ se numeşte *perfect netedă* sau *ideală*. În cazul în care $\vec{L}_n = 0$, forţa de legătură $\vec{L}$ este tangentă la o curbă numită *perfect rugoasă*.

BCU "ASTRA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

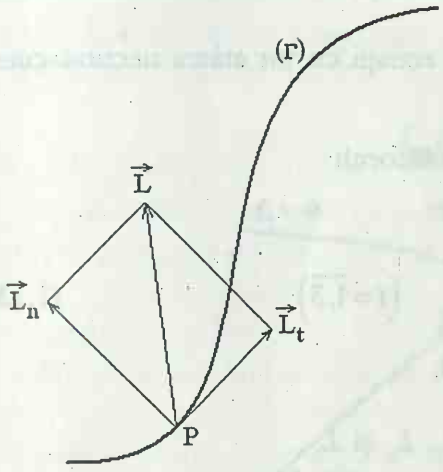


Fig. I.5

În continuare, vom presupune curba (Γ) ideală $\left(\vec{L}_t = 0\right)$, şi, deoarece în orice punct al curbei care reprezintă traiectoria corpului de masă m (şi care, în acest caz, coincide cu legătura) viteza $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ a corpului este tangentă la traiectorie (la curba (Γ)), putem scrie

$$\vec{L} \cdot \vec{v} = \dot{x}L_x + \dot{y}L_y + \dot{z}L_z = 0. \tag{1.11}$$

Acum problema este rezolvabilă (cel puţin în principiu, dificultăţi majore putând să apară în continuare datorită expresiei forţei aplicate $\vec{F}$) în mod univoc, întrucât suntem în posesia unui sistem de patru ecuaţii

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i = F_i + L_i, \\ \dot{x}_i L_i = 0, \end{cases} \quad \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{1.12}$$

cu tot atâtea necunoscute, q şi L_i, $\left(i = \overline{1,3}\right)$. Rezolvarea acestui sistem de patru ecuaţii diferenţiale furnizează soluţia problemei: $q = q(t)$, care exprimă legea de mişcare a corpului pe curba (Γ) şi componentele L_i, $\left(i = \overline{1,3}\right)$ ale forţei de legătură.

În vederea formulării metodei ecuaţiilor Lagrange de speţa I de rezolvare a problemelor de mecanică vom aborda în continuare aceeaşi problemă, dar în situaţia în care

ii) Curba este dată sub formă implicită (ca intersecţie a două suprafeţe spaţiale),

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Soluţia problemei în acest caz se poate obţine în două moduri:

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

a) rezolvând un sistem de şase ecuaţii cu tot atâtea necunoscute, sau

b) rezolvând un sistem de cinci ecuaţii cu tot atâtea necunoscute, ceea ce, evident, este mai simplu.

a) În primul caz, sistemul este următorul:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i = F_i + L_i, \\ \dot{x}_i L_i = 0, \\ f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{1.13}$$

iar cele şase necunoscute sunt x, y, z, L_x, L_y şi L_z.

b) În cea de-a doua situaţie, pentru a determina sistemul de cinci ecuaţii, vom descompune (oarecum la fel ca în cazul în care curba era dată parametric) forţa de legătură $\vec{L}$ tot după două direcţii, dar care, de această dată, nu mai coincid cu direcţiile tangentă şi normală la traiectorie, ci cu direcţiile gradienţilor celor două funcţii, ∇f_1 şi ∇f_2, adică direcţiile normale la suprafeţele spaţiale a căror intersecţie dă curba (Γ). Astfel, presupunând şi acum curba ideală (legătura nu comportă frecare), putem scrie (vezi Fig. I.6):

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \mu \nabla f_1 + \nu \nabla f_2,$$

unde μ şi ν sunt doi scalari (care nu pot fi simultan nuli) – coeficienţi de proporţionalitate între componentele $\vec{L}_1$ şi $\vec{L}_2$ ale forţei de legătură şi vectorii gradient ai celor două funcţii, ∇f_1 şi respectiv ∇f_2.

Pe componente, ecuaţia vectorială diferenţială a mişcării se va scrie astfel:

$$m\ddot{x}_i = F_i + \mu \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \quad \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{1.14}$$

iar sistemul de cinci ecuaţii cu cinci necunoscute (x, y, z, μ şi ν) va fi

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

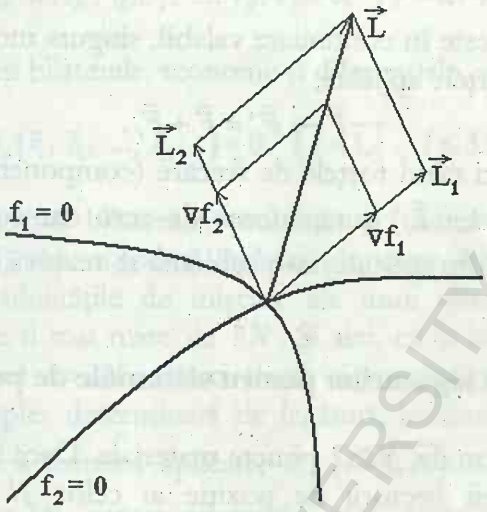


Fig. I.6

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i = F_i + \mu \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \nu \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}, \\ f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \qquad \left(i = \overline{1,3}\right). \tag{1.15}$$

În acest fel, sunt determinate şi legea de mişcare a corpului, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ şi forţa de legătură, $\vec{L} = \mu \nabla f_1 + \nu \nabla f_2$.

Observaţie: În rezolvarea problemei fundamentale a dinamicii punctului material supus la legături am considerat – atât în situaţia în care curba care exprima legătura era dată parametric, cât şi în cazul în care aceasta era dată sub formă implicită – că legătura este ideală (cu alte cuvinte, forţa de frecare este nulă). Evident, aceasta este o restricţie foarte drastică, în realitate totdeauna existând frecări. La prima vedere, ar apărea că această metodă de rezolvare nu poate fi utilizată în cazul unei probleme reale. Totuşi, situaţia nu este chiar atât de „sumbră", deoarece, dacă forţele de

BCU "I. Vlădutz" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

frecare sunt cunoscute[6], fie acestea $\vec{F}_f \left(\equiv \vec{L}_t\right)$, atunci formalismul prezentat mai sus este în continuare valabil, singura modificare apărând în ceea ce priveşte forţele aplicate,

$$\vec{F} \to \vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_f .$$

Deci, atunci când forţele de frecare (componentele tangenţiale ale forţelor de legătură, $\vec{L}_t$) sunt diferite de zero dar cunoscute, ele pot fi considerate ca şi forţe aplicate, iar problema se rezolvă la fel ca mai sus.

I.1.3. Clasificarea legăturilor pentru sistemele de puncte materiale

Fie un sistem de $N \geq 2$ puncte materiale. Dacă în orice moment de timp t al mişcării vectorii de poziţie ai celor N puncte materiale, $\vec{r}_i(t)$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$ şi vitezele lor, $\dot{\vec{r}}_i(t)$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$ pot lua valori arbitrare, atunci spunem că sistemul este liber (nu este afectat de legături sau constrângeri). În caz contrar sistemul de puncte materiale se numeşte supus la legături.

Cea mai generală expresie (lăsând la o parte faptul că aceasta poate fi exprimată printr-o egalitate sau printr-o inegalitate) a unei legături pentru un sistem de N puncte materiale se scrie astfel:

$$f\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, ..., \dot{\vec{r}}_N; t\right) = 0 \qquad (1.16)$$

şi reprezintă, la fel ca în cazul unui singur punct material o condiţie de ordin geometric (prin intermediul vectorilor de poziţie, $\vec{r}_i$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$ ai celor N puncte materiale) şi/sau cinematic (prin intermediul vectorilor viteză, $\dot{\vec{r}}_i$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$ ai celor N puncte materiale) care limitează posibilităţile de mişcare ale punctelor materiale din sistem.

Clasificarea legăturilor pentru un sistem de puncte materiale se face exact la fel ca în cazul unui singur punct material, după aceleaşi trei criterii. De exemplu, relaţiile

---

[6] Pentru detalii vezi nota de subsol de la rezolvarea problemei pendulului gravitaţional prin intermediul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa I.

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$f_j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, ..., \dot{\vec{r}}_N; t\right)=0, \quad \left(j=\overline{1,l}\ ,\ l\le 3N\right) \tag{1.17}$$

reprezintă l legături bilaterale, reonome şi diferenţiale, iar

$$f_j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; t\right)=0, \quad \left(j=\overline{1,l}\ ,\ l\le 3N\right) \tag{1.18}$$

exprimă tot l legături bilaterale, reonome şi finite (geometrice). Atât (1.17), cât şi (1.18) sunt totodată legături olonome. Numărul de legături care limitează posibilităţile de mişcare ale unui sistem de N puncte materiale nu poate fi mai mare de $3N$. Şi aici, ca şi în cazul unui singur punct material, dacă $l=3N$, atunci starea sistemului (repaus sau mişcare relativă) este complet determinată de legături, indiferent de numărul şi modul de acţiune a forţelor aplicate, $\vec{F}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$. Cu alte cuvinte, în situaţia în care $l=3N$, starea sistemului este determinată complet (de legături) fără a mai fi necesară rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării.

De asemenea, la fel ca în cazul unui singur punct material, orice legătură geometrică sau finită poate fi pusă sub formă cinematică sau diferenţială prin derivare totală în raport cu timpul. De exemplu, realizând acest lucru pentru legăturile (1.18), avem

$$\sum_{i=1}^{N}\left(grad_i f_j\right)\cdot\dot{\vec{r}}_i+\frac{\partial f_j}{\partial t}=0, \quad \left(j=\overline{1,l}\right),$$

care este o legătură cinematică liniară în viteze, de tipul

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{g}_i^{\,j}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; t\right)\cdot\dot{\vec{r}}_i+g_0^j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; t\right)=0, \quad \left(j=\overline{1,l}\right).$$

În schimb, nu toate legăturile cinematice pot fi integrate pentru a putea fi aduse la o formă finită (geometrică). Legăturile diferenţiale care pot fi puse sub formă finită se numesc *integrabile*. În caz contrar ele se numesc *neintegrabile* sau *de tip Pfaff* (sau încă, *pfaffiene*). Toate celelalte denumiri şi noţiuni (cum ar fi legăturile olonome, numărul gradelor de libertate etc.) se definesc la fel ca în cazul unui singur punct material.

BCU - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I.1.4. Ecuaţiile Lagrange de speţa I

Ecuaţia fundamentală a dinamicii pentru punctul material cu numărul de ordine i, a cărui masă este m_i, se scrie astfel

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{L}_i, \quad \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{1.19}$$

unde $\vec{F}_i$ reprezintă rezultanta forţelor aplicate acestui punct material, iar $\vec{L}_i$ este rezultanta forţelor de legătură pentru acelaşi punct material.

După cum am văzut, în cazul unui singur punct material, dacă acesta este supus unei singure legături ideale exprimabile sub forma

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1.20}$$

(corpul este obligat să se mişte pe o suprafaţă perfect netedă a cărei ecuaţie sub formă implicită este (1.20)), forţa de legătură este

$$\vec{L} \equiv \vec{L}_n = \mu \nabla f,$$

iar dacă punctul material este supus la două constrângeri ideale de tipul

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \tag{1.21}$$

(corpul este forţat să se deplaseze fără frecare pe curba aflată la intersecţia suprafeţelor spaţiale date de relaţiile (1.21)), atunci forţa de legătură se scrie

$$\vec{L} = \mu \nabla f_1 + \nu \nabla f_2.$$

Generalizând aceste rezultate pentru un număr de $l \le 3N$ legături ideale care afectează mişcarea unui sistem de N puncte materiale, putem scrie că forţa de legătură care acţionează asupra punctului material cu numărul de ordine i este

$$\vec{L}_i = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \left(grad_i f_j\right). \tag{1.22}$$

Introducând relaţiile (1.22) în ecuaţiile (1.19) obţinem N ecuaţii vectoriale diferenţiale de ordinul doi

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \left(grad_i f_j\right), \quad \left(i = \overline{1,N}\right), \tag{1.23}$$

care, completate cu ecuaţiile (1.18) ale legăturilor olonome (considerate ideale), formează un sistem de $3N + l$ ecuaţii scalare

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \left(grad_i f_j\right), \\ f_j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t\right) = 0, \end{cases}, \left(i = \overline{1,N}, j = \overline{1,l}\right) \quad (1.24)$$

cu tot atâtea necunoscute: $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i, \left(i = \overline{1,N}\right)$ şi $\mu_j, \left(j = \overline{1,l}\right)$.

Ecuaţiile (1.23) se numesc *ecuaţiile Lagrange de speţa I* şi stau la baza formalismului de rezolvare a unei probleme de mecanică cu ajutorul sistemului de ecuaţii (1.24), apelând la algoritmul prezentat în capitolul dedicat studiului pendulului gravitaţional (vezi subcapitolul III-2, pag. 100).

I.2. Noţiunea de deplasare elementară

I.2.1. Deplasări elementare reale, posibile şi virtuale

Aceasta este o altă noţiune fundamentală – cel puţin la fel de importantă ca şi cea de legătură – necesară înţelegerii formalismelor „superioare" ale mecanicii analitice (cel al ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a, cel al ecuaţiilor canonice ale lui Hamilton etc.).

De altfel, necesitatea introducerii şi studierii noţiunii pe care am prezentat-o până aici – cea de legătură – ne apare acum ca evidentă, întrucât pe baza ei am elaborat formalismul ecuaţiilor Lagrange de speţa I. În mod analog, noţiunea de deplasare elementară ne va ajuta să stabilim un formalism şi mai general (şi astfel, mai „puternic") de rezolvare a unei probleme de mecanică (şi, după cum vom vedea, nu numai), anume, formalismul ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a.

Elementul esenţial îl reprezintă şi aici tot forţele de legătură. Introducând noţiunea de legătură – care, după cum am văzut, din punct de vedere matematic se poate reprezenta sub forma unei expresii analitice, care depinde de vectorii de poziţie ai punctelor materiale, de vitezele acestora şi eventual de timp – am reuşit să evităm (în cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa I) necesitatea de a cunoaşte explicit forţele de legătură, $\vec{L}_i$, încă de la început. Totuşi, pentru a putea rezolva o problemă în cadrul acestui formalism este necesar să cunoaştem expresiile analitice ale legăturilor.

În cele ce urmează, vom vedea cum, introducând noțiunea de deplasare elementară, vom reuși să eliminăm chiar și necesitatea de a cunoaște expresiile analitice ale legăturilor (care, de cele mai multe ori sunt mult mai ușor de determinat, în comparație cu forțele de legătură). În acest fel „puterea" de rezolvare a problemelor în cadrul formalismelor bazate pe această noțiune crește simțitor, putând obține o soluție completă chiar și în acele cazuri în care este dificil să identificăm expresiile analitice ale legăturilor. În mod sintetic și schematic, am putea prezenta situația în felul următor:

Formalismul clasic (newtonian)
Obligativitatea cunoașterii tuturor forțelor
încă de la început (măcar ca direcție și sens)
↓
Formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I
Nu necesită cunoașterea forțelor de legătură
Obligativitatea cunoașterii expresiilor analitice ale legăturilor
↓
Formalismul ecuațiilor Lagrange de speța a II-a
Nu necesită cunoașterea forțelor de legătură
Nu necesită nici cunoașterea expresiilor analitice ale legăturilor
Obligativitatea cunoașterii doar a numărului de legături

Evident, gradul de generalitate al formalismelor (și implicit „puterea" lor de rezolvare a unei probleme) crește de sus în jos, în sensul indicat de săgețile verticale.

De fapt, introducerea noțiunii de deplasare elementară are o origine foarte pragmatică. După cum este simplu de înțeles, a rezolva o problemă de statică este mult mai ușor decât a rezolva una de cinematică și, cu atât mai mult, una de dinamică. Dacă rezolvarea unei probleme de statică presupune, de cele mai multe ori – din punct de vedere matematic – rezolvarea unei probleme de algebră[7], cu totul alta este situația atunci

[7] Cel puțin în ceea ce privește determinarea poziției și/sau condiției de echilibru a unui sistem de puncte materiale.

BCU "LUCIAN BLAGA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

când avem de rezolvat o problemă de dinamică; în acest caz, trebuie să rezolvăm o problemă de ecuaţiile fizicii matematice (de regulă, este necesar să determinăm soluţia unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi). Şi atunci, ideea este de a face cumva, astfel încât să „transformăm" o problemă de dinamică într-una de statică. Astfel, necesitatea de a determina *legile de mişcare* ale punctelor materiale din sistem (ca soluţii ale unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi, scris pentru problema de dinamică respectivă) ar putea fi înlocuită cu necesitatea de a studia *echilibrul* unui sistem de puncte materiale (ca „sarcină" specifică („task") a problemei de statică corespunzătoare acelei probleme de dinamică). Ori, pentru a realiza acest lucru (pentru a studia echilibrul unui sistem de puncte materiale) trebuie să deplasăm cu cantităţi elementare (de aici şi numele noţiunii pe care o analizăm, anume, aceea de „deplasare elementară") punctele materiale ale sistemului din poziţiile lor iniţiale (de echilibru) şi să studiem cum „se comportă" punctele materiale aflate sub acţiunea tuturor forţelor la care sunt supuse, la acest „tratament" (cu alte cuvinte, să studiem ce efect au aceste deplasări elementare asupra staticii sistemului de puncte materiale).

Cum se poate realiza concret acest aparent „miracol", anume, de a „transforma" o problemă de dinamică într-una de statică, vom vedea atunci când vom discuta despre principiul lui D'Alembert. Partea a doua a „task"-ului, adică studiul echilibrului sistemului de puncte materiale (ca esenţă a problemei de statică ce corespunde problemei de dinamică iniţiale), se poate face, după cum vom vedea, cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual[8]. Dar, pentru a enunţa acest principiu, trebuie să introducem mai întâi noţiunea de lucru mecanic virtual, iar pentru a defini această noţiune, este necesar să clarificăm ce se înţelege prin *deplasare elementară virtuală*.

Aşadar, în cele ce urmează vom căuta să introducem cât mai pe înţelesul tuturor noţiunile de:

i) deplasare elementară *reală*;
ii) deplasare elementară *posibilă* şi cea de

[8] De fapt, principiul lucrului mecanic virtual permite doar determinarea poziţiei şi/sau condiţiei de echilibru a unui sistem de puncte materiale. Studiul stabilităţii acestui echilibru constituie o altă problemă.

iii) deplasare elementară *virtuală*,

toate acestea fiind foarte strâns legate între ele, într-un mod care, de cele mai multe ori este dificil de înţeles. Autorii nu au pretenţia de a prezenta problema în mod exhaustiv (sub toate aspectele ei mai mult sau mai puţin particulare), însă, consideră că, prin modul în care va fi prezentat acest subiect, vor contribui la înţelegerea lui într-o manieră uşoară, logică şi integratoare[9].

Fie un sistem de $N \geq 2$ puncte materiale supus unui număr de $l < 3N$ legături olonome. În ceea ce priveşte înţelegerea noţiunii de *deplasare elementară reală*, lucrurile sunt foarte simple. Dificultatea constă însă, în a înţelege cât mai bine celelalte două noţiuni, această înţelegere neputându-se obţine decât dacă facem încă de la bun început distincţia necesară între problema analizată în cazul unui sistem supus unor legături scleronome – pe de o parte – şi în cazul unui sistem supus unor legături reonome – pe de altă parte. De altfel, „factorul timp" este cel care joacă aici rolul esenţial. Din păcate, tocmai acest fapt nu apare cu suficientă claritate în unele lucrări care abordează acest subiect.

În intervalul de timp elementar (infinitezimal) dt, fiind sub acţiunea forţelor aplicate, $\vec{F}_i$, şi satisfăcând ecuaţiile legăturilor (oricare ar fi acestea), precum şi condiţiile iniţiale compatibile cu legăturile, punctul material cu numărul de ordine i se va deplasa cu cantitatea elementară $d\vec{r}_i$. Această deplasare *are loc efectiv*, este *unică*, şi, de aceea, este numită *reală*. Aceasta este ceea ce trebuie să se înţeleagă printr-o *deplasare elementară reală*.

În ceea ce priveşte celelalte două tipuri de deplasări elementare, cele posibile şi cele virtuale, pentru a înţelege corect cum stau lucrurile, vom considera că sistemul de puncte materiale este supus unor legături olonome reonome, fie acestea

$$f_j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N; t\right) = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right). \tag{1.25}$$

[9] Autorii doresc să aducă pe această cale sincere mulţumiri d-lui Voltaire Teodorescu, cu care au avut discuţii extrem de fructuoase şi căruia îi datorează înţelegerea la care au ajuns. De asemenea, autorii îşi exprimă întreaga consideraţie şi gratitudine faţă de d-l prof. dr. Ioan Merches, autorul lucrării „Applied Analytical Mechanics" [34], care a constituit un material de studiu valoros şi totodată un punct de inspiraţie în elaborarea acestei lucrări.

În evoluţia spaţio-temporală a sistemului, punctele materiale se deplasează pe traiectoriile lor reale, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$. Pentru a uşura analiza ne vom referi în continuare la un singur punct material din sistem, fie acesta cel cu numărul de ordine i. Fixându-ne atenţia asupra acestui punct material la un moment oarecare de timp[10], $t_1 < t < t_2$ (unde t_1 şi t_2 sunt momentele de timp între care urmărim evoluţia sistemului de puncte materiale), şi urmărind mişcarea în continuare pe parcursul intervalului elementar (infinitezimal) de timp, dt, acesta (punctul material) are – în principiu – posibilitatea să se deplaseze cu cantităţile elementare, pe care le vom nota tot cu $d\vec{r}_i$, de-a lungul unei infinităţi de traiectorii, corespunzătoare infinităţii de valori ale vectorului viteză, $\vec{\dot{r}}_i$ (toate compatibile cu legăturile), pe care – tot în principiu – punctul material le poate lua în acel moment de timp arbitrar ales, t. Aceste deplasări, $d\vec{r}_i$ (infinite ca număr), sunt numite *deplasări elementare posibile*. Spunem „în principiu", deoarece, în realitate punctul material se va deplasa cu o singură viteză (cea reală) pe o singură traiectorie (cea reală), cu cantitatea elementară $d\vec{r}_i$ (deplasarea elementară reală). Cu alte cuvinte, mulţimea deplasărilor elementare reale (dacă ne referim acum la toate punctele materiale din sistem, cărora le urmărim mişcarea între momentele de timp t şi $t+dt$) este inclusă în mulţimea deplasărilor elementare posibile, deplasările reale fiind acelea care, după cum am precizat mai sus, *satisfac simultan*:

i) ecuaţiile diferenţiale ale mişcării;
ii) ecuaţiile legăturilor şi
iii) condiţiile iniţiale compatibile cu legăturile.

Să considerăm acum legătura fixată (cu alte cuvinte, o transformăm brusc/instantaneu dintr-o legătură reonomă, într-una scleronomă), sau, altfel spus, să „înghe̦ţăm" legătura la momentul de timp $t+dt$. Deplasările elementare pe care „le poate realiza"[11] în aceste condiţii punctul material,

[10] În acest fel, practic noi fixăm poziţia punctului material, la cea pe care o are la momentul de timp arbitrar ales, t.

[11] Am pus între ghilimele „le poate realiza", deoarece, timpul fiind „înghe̦ţat" aceste deplasări nu se fac în timp, ci sunt instantanee. Altfel spus, aceste deplasări au un caracter pur geometric, şi

fără a viola legătura, sunt și ele tot infinite ca număr (și, dacă luăm în considerație caracterul lor vectorial, atunci acestea sunt infinite și ca direcție și sens) și se numesc *deplasări elementare virtuale.*

Pentru a putea înțelege mai ușor aceste elemente, vom da în continuare trei exemple concrete, două dintre acestea fiind ilustrate grafic.

Primul dintre ele se referă la mișcarea unui punct material obligat să rămână pe un plan înclinat (legătura în acest caz este reprezentată de suprafața planului înclinat). Pentru a face legătura reonomă, vom presupune că planul înclinat are o mișcare de translație cu viteza constantă $\vec{v}_{plan}$, ca în Fig. I.7.

În Fig. I.7 sunt ilustrate două poziții succesive ale planului înclinat (legăturii) separate în timp de intervalul infinitezimal dt și în spațiu de distanța infinitezimală $d\vec{r}_{plan}$. Astfel, la momentul de timp t, muchia AB a planului înclinat se află în punctul $Q(t)$, iar dt secunde mai târziu, în punctul $Q'(t+dt)$. Poziția fixată la momentul de timp arbitrar ales, t, a punctului material P este precizată pe figură prin punctul $P(t)$, iar $P'(t+dt)$ reprezintă poziția reală a punctului material la momentul de timp $t+dt$. Conform definiției, vectorii elementari (infinitezimali) având ca punct de aplicație punctul $P(t)$ și vârfurile în punctele P', P_1, P_2, P_3, P_4 (ș.a.m.d.; practic, există o infinitate de puncte de acest gen – în fapt, toate punctele din planul înclinat), adică vectorii $d\vec{r}$, $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$, $d\vec{r}_3$ și respectiv $d\vec{r}_4$ reprezintă *deplasări elementare posibile* ale punctului material P. Dintre acestea, doar una singură este cea reală, anume $d\vec{r} = \overrightarrow{PP'}$. Să observăm că toate deplasările elementare posibile satisfac legătura. În schimb, acestea nu „satisfac" nici ecuațiile de mișcare și nici condițiile inițiale compatibile cu legăturile. Acea deplasare elementară posibilă care satisface aceste ultime două cerințe este unică, are loc în mod efectiv și este numită *reală.*

Să „înghețăm" acum totul la momentul de timp $t' = t + dt$ (este ca și cum am realiza o fotografie, adică „am lua un instantaneu" la momentul de timp t'). Aceasta înseamnă că „am surprins" planul înclinat în poziția în care el se afla în momentul „înghețării", adică aceea în care muchia AB

---

nu reprezintă deplasări care să rezulte ca urmare a modificării în timp a poziției spațiale a punctului material.

a planului înclinat se află în punctul $Q'(t') = Q'(t+dt)$. Acum, dacă „ieşim din timp" putem vedea punctul material „mişcându-se"[12] doar pe suprafaţa planului înclinat. Este ca şi cum legătura reonomă (planul înclinat aflat în mişcare cu viteza $\vec{v}_{plan}$) s-ar transforma într-o legătură scleronomă (planul este considerat fix la momentul $t' = t + dt$).

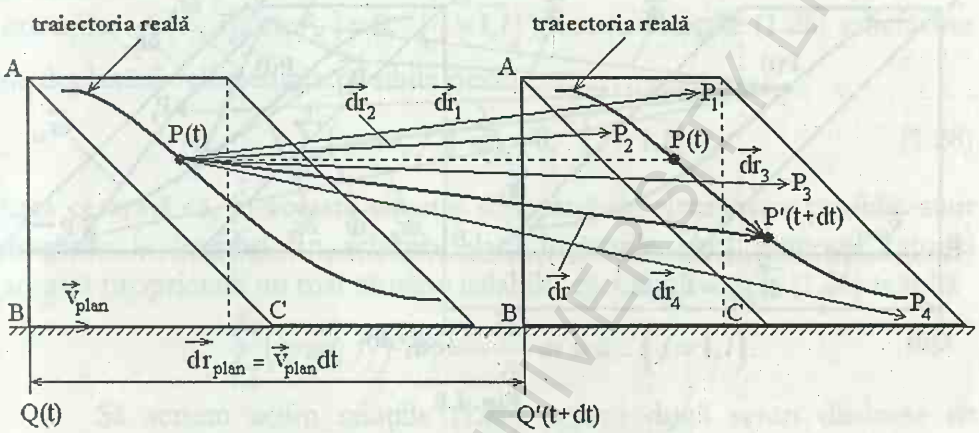


Fig. I.7

Deplasările elementare pe care „le poate realiza" în această situaţie punctul material P, astfel încât legătura să fie respectată se numesc *deplasări elementare virtuale*. Evident, acestea sunt deplasări elementare „efectuate" doar pe suprafaţa planului înclinat (cu alte cuvinte, sunt tangente la legătură). În plus, aceste deplasări sunt, aşa cum precizam şi mai înainte, pur geometrice, ele nerealizându-se în timp (se fac după ce „am ieşit din timp"). Exemple de astfel de deplasări elementare sunt reprezentate în Fig. I.8.

Pentru a le deosebi de cele posibile, deplasările elementare virtuale sunt notate cu litera grecească delta mic, δ. În Fig. I.8 sunt date două categorii de exemple de deplasări elementare virtuale (care, în esenţă, sunt identice):

- cu un singur indice, cum sunt $\delta\vec{r}_1$ şi $\delta\vec{r}_2$;
- cu doi indici, cum ar fi $\delta\vec{r}_{12}$, sau $\delta\vec{r}_{34}$.

[12] Este valabilă aceeaşi observaţie pe care am făcut-o în nota de subsol precedentă.

Această diferență de notație apare datorită faptului că am preferat ca deplasării elementare reale, $d\vec{r}$, să nu-i atașăm nici un indice (atunci când am dat exemple de deplasări elementare din fiecare categorie: reale, posibile și virtuale), deoarece aceasta este unică.

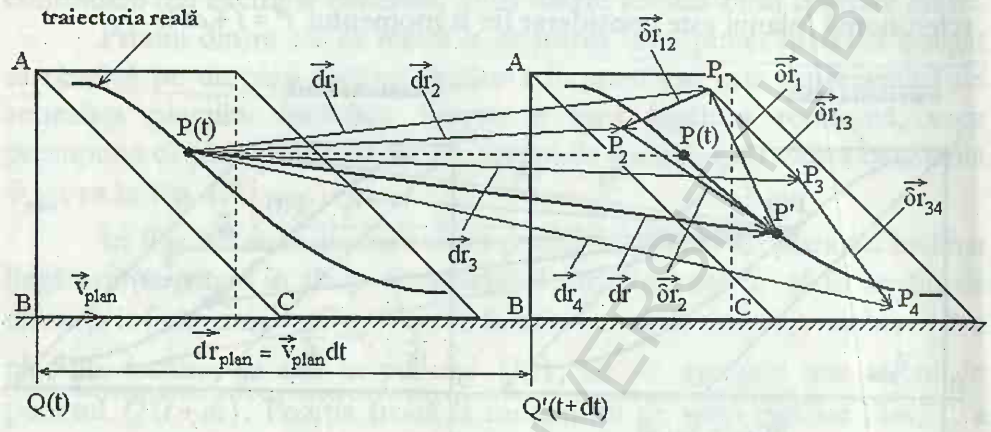


Fig. I.8

Să arătăm în continuare că, întotdeauna, o deplasare elementară virtuală poate fi scrisă ca diferența a două deplasări elementare posibile. Pentru a realiza acest lucru, să considerăm un sistem de puncte materiale supus la l legături olonome reonome, de tipul (1.25):

$$f_j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; t\right) = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right).$$

Diferențiind aceste relații, obținem condițiile pe care trebuie să le satisfacă deplasările elementare posibile, $d\vec{r}_i$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(grad_i f_j\right)\cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t}dt = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right), \tag{1.26}$$

unde am ținut cont că $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$. Considerând $dt \equiv \delta t = 0$ (care exprimă condiția pentru a obține deplasările elementare virtuale – reamintim că acestea sunt instantanee), din (1.26) rezultă relațiile satisfăcute de aceste deplasări:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(grad_i f_j\right)\cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right). \tag{1.27}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece $grad_i f_j$ sunt vectori perpendiculari pe suprafeţele legăturilor $f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; t) = 0$, $\left(j = \overline{1,l}\right)$, din relaţiile (1.27) rezultă că deplasările elementare virtuale sunt totdeauna *tangente la legături.* Nu acelaşi lucru se poate însă spune despre deplasările elementare posibile (şi, evident, şi despre cele reale). Într-adevăr, dacă legăturile sunt scleronome (de exemplu, $f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N) = 0$, $\left(j = \overline{1,l}\right)$), atunci relaţiile (1.26) satisfăcute de deplasările elementare posibile devin

$$\sum_{i=1}^{N}\left(grad_i f_j\right)\cdot d\vec{r}_i = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right), \tag{1.28}$$

ceea ce arată că, în această situaţie şi deplasările elementare posibile sunt tangente la legături. În schimb, dacă legăturile sunt reonome, atunci această proprietate nu mai rămâne valabilă, căci, din relaţiile (1.26) rezultă

$$\sum_{i=1}^{N}\left(grad_i f_j\right)\cdot d\vec{r}_i = -\frac{\partial f_j}{\partial t}dt \neq 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right).$$

Să scriem acum relaţiile (1.26) pentru două seturi distincte de deplasări elementare posibile, $d\vec{r}_i'$ şi $d\vec{r}_i''$,

$$\sum_{i=1}^{N}\left(grad_i f_j\right)\cdot d\vec{r}_i' + \frac{\partial f_j}{\partial t}dt = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right)$$

şi

$$\sum_{i=1}^{N}\left(grad_i f_j\right)\cdot d\vec{r}_i'' + \frac{\partial f_j}{\partial t}dt = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right)$$

şi să le scădem. Obţinem

$$\sum_{i=1}^{N}\left(grad_i f_j\right)\cdot\left(d\vec{r}_i' - d\vec{r}_i''\right) = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right),$$

care, dacă introducem notaţia

$$\delta\vec{r}_i \overset{not.}{=} d\vec{r}_i' - d\vec{r}_i'', \quad \left(i = \overline{1,N}\right), \tag{1.29}$$

se scrie

$$\sum_{i=1}^{N}\left(grad_i f_j\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right),$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică exact relațiile (1.27) satisfăcute de deplasările elementare virtuale. Deci, întotdeauna, deplasările elementare virtuale pot fi scrise ca diferența a două deplasări elementare posibile.

În acest fel, apare și mai evidentă notația pe care am utilizat-o în Fig. I.8, în care, deplasărilor virtuale le-am ataşat uneori un singur indice, iar alteori doi indici. De exemplu, deplasarea elementară virtuală $\delta\vec{r}_{12}$ se obține ca diferența dintre deplasările elementare posibile $d\vec{r}_2$ și $d\vec{r}_1$ (vezi Fig. I.8),

$$\delta\vec{r}_{12} = d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1 .$$

La fel, deplasarea elementară virtuală $\delta\vec{r}_{34}$ se obține ca diferența dintre deplasările elementare posibile $d\vec{r}_4$ și $d\vec{r}_3$ (vezi Fig. I.8),

$$\delta\vec{r}_{34} = d\vec{r}_4 - d\vec{r}_3 .$$

În general, pentru astfel de deplasări elementare virtuale (care să rezulte prin diferența a două deplasări elementare posibile, nici una dintre ele nefiind deplasarea elementară reală, notată simplu cu $d\vec{r}$), putem scrie

$$\delta\vec{r}_{mn} = d\vec{r}_n - d\vec{r}_m, \quad \left(\forall\, m,\ n = \overline{1,N}\right).$$

În cazul în care una din cele două deplasări elementare posibile este chiar cea reală, avem

$$\delta\vec{r}_i = \pm d\vec{r} \mp d\vec{r}_i, \quad \left(i = \overline{1,N}\right).$$

De exemplu (vezi Fig. I.8), pentru deplasarea elementară virtuală $\delta\vec{r}_1$ avem

$$\delta\vec{r}_1 = -d\vec{r} + d\vec{r}_1 ,$$

iar pentru $\delta\vec{r}_2$,

$$\delta\vec{r}_2 = d\vec{r} - d\vec{r}_2 .$$

Al doilea exemplu se referă la un balon de formă sferică, cu centrul fix, aflat în proces de umflare. Acesta este un exemplu de legătură reonomă foarte ușor de înțeles și este ilustrat grafic în Fig. I.9. Pentru a nu complica figura și a putea urmări mai ușor explicațiile vom reprezenta și aici (ca și în cazul exemplului cu planul înclinat) doar două poziții succesive ale suprafeței balonului, de raze R și $R+dR$. Evident, raza balonului variază continuu, la momentul – arbitrar considerat – t, raza având valoarea R, iar la un moment ulterior, depărtat infinitezimal de t cu cantitatea dt, raza are valoarea $R+dR$ (vezi Fig. I.9). Să presupunem

că pe suprafața balonului se mișcă o furnică, considerată punct material. Dacă balonul are la momentul inițial $t_0 = 0$ raza nulă, centrul în punctul de coordonate $P(0, 0, 0)$ și viteza de creștere a razei balonului este constantă, fie aceasta v_R, atunci expresia analitică a legăturii este

$$f(x, y, x, t) = x^2 + y^2 + z^2 - v_R^2 t^2 = 0.$$

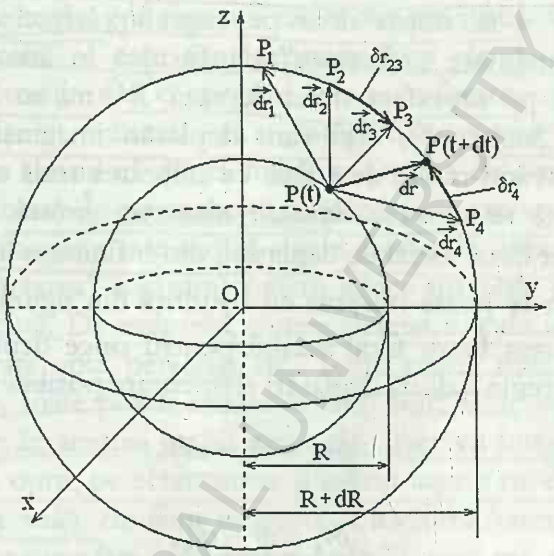


Fig. I.9

La momentul de timp t, furnica se află în punctul $P(t)$ pe sfera de rază $R = R(t) = v_R t$. La momentul ulterior, $t' = t + dt$ ea se poate afla – în principiu – în oricare din punctele P_1, P_2, P_3, P, P_4 etc.[13], situate pe sfera de rază $R' = R(t') = v_R t' = R + dR$. Atunci, vectorii $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$, $d\vec{r}_3$, $d\vec{r}$ și respectiv $d\vec{r}_4$, corespunzători punctelor amintite, vor reprezenta (conform definiției) *deplasări elementare posibile.* Evident, dintre toate deplasările posibile (infinite ca număr, direcție și sens) una singură are loc în mod efectiv. Aceasta este, deci, unică și este numită *deplasare elementară reală*, fiind aceea care satisface (pe lângă ecuația legăturii, care este satisfăcută de

[13] Există o infinitate de astfel de puncte.

BUCUREȘTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

toate deplasările elementare posibile) şi ecuaţiile diferenţiale ale mişcării, şi condiţiile iniţiale. Pentru a o deosebi de celelalte deplasări elementare posibile, am notat-o simplu, cu $d\vec{r}$ şi este cea care corespunde punctului $P(t+dt)$ (reprezentată cu o linie mai groasă în Fig. I.9). „Înghețând" acum (la momentul de timp $t+dt$, când furnica se află pe sfera de rază R') balonul (legătura) – altfel spus, oprind brusc umflarea balonului (ceea ce este echivalent cu a „scleronomiza" instantaneu legătura), furnica are posibilitatea de a se mişca doar pe suprafaţa sferei de rază $R+dR$. Deplasările elementare „efectuate" de furnică în această situaţie sunt realizate (toate) pe suprafaţa sferei de rază R', nu au loc în timp (căci timpul a fost „înghețat"), deci sunt deplasări imaginare (virtuale), pur geometrice, neavând nimic de-a face cu mişcarea reală a furnicii (care se face în timp) şi se numesc *deplasări elementare virtuale.* În Fig. I.9, am reprezentat doar două astfel de deplasări, din infinitatea lor, anume, $\delta\vec{r}_{23}$ şi $\delta\vec{r}_4$. După cum se poate observa cu uşurinţă din figură, aceste deplasări pot fi scrise (acest lucru fiind valabil pentru orice deplasare elementară virtuală) ca diferenţa a două deplasări elementare posibile[14]:

$$\delta\vec{r}_{23} = d\vec{r}_3 - d\vec{r}_2$$

şi, respectiv,

$$\delta\vec{r}_4 = d\vec{r} - d\vec{r}_4 .$$

În fine, ultimul exemplu pe care dorim să-l prezentăm (de această dată fără reprezentare grafică) pentru a înţelege mai bine doar natura deplasărilor elementare virtuale este acela al „rulării" unui film într-un cinematograf. Chiar dacă acest exemplu este mai dificil de reprezentat grafic şi necesită astfel o putere mai mare de vizualizare mentală, totuşi, el este foarte sugestiv. Filmul (imaginea, sau acţiunea) care apare că se derulează continuu pe ecranul cinematografului reprezintă de fapt o succesiune de cadre (care nu sunt altceva decât nişte sui-generis fotografii – cu alte cuvinte, imagini luate instantaneu), care sunt proiectate pe acel ecran cu o frecvenţă de apariţie (dată de viteza de rulare a filmului de pe bobina sursă pe cea colectoare) mai mare sau cel puţin egală cu frecvenţa

[14] În ceea ce priveşte notarea acestor deplasări elementare virtuale, este valabilă aceeaşi observaţie, pe care am făcut-o în primul exemplu, cel cu planul înclinat.

caracteristică de sesizare distinctă (de către ochiul uman sănătos şi normal) a imaginilor care se succed rapid. Frecvenţa de succesiune a unor imagini ce mai pot fi încă sesizate ca fiind distincte de către aparatul vizual al unui om „normal" şi sănătos are o valoare situată în jurul a 16-20 de cadre pe secundă[15]. Să presupunem că în timpul unei proiecţii cinematografice, la un anumit moment de timp, operatorul de imagine realizează un stop-cadru (rola tractoare/colectoare a filmului este oprită). Atunci, pe ecran va apărea o imagine statică (de fapt, un cadru din succesiunea foarte mare de cadre – „fotografii" – care sunt separate între ele de intervale foarte înguste care nu conţin nici o imagine; este ceva foarte asemănător cu un film foto obişnuit, numai că „fotografiile vecine" sunt foarte asemănătoare, în sensul că diferă foarte puţin una de alta ca şi conţinut, fiind totuşi distincte). În acest moment (când pe ecran apare proiectat un singur cadru şi imaginea este statică – este ceea ce în exemplele anterioare am numit „îngheţarea" legăturii) putem aduce tot felul de „retuşuri" la imaginea proiectată. De exemplu, putem desena fire de iarbă pe sol, fire de păr în mustaţa unui personaj etc. Toate aceste mici (infinitezimale) modificări (care, toate pot fi reduse la linii) sunt acele *deplasări elementare virtuale*. Într-adevăr, acestea nu au nimic de-a face cu imaginea reală (dacă filmul nu s-ar fi oprit, pe ecran nu ar fi apărut aceste modificări făcute de noi, ci imaginea *reală*), ele sunt tangente la legătură (completările noastre sunt desenate pe suprafaţa „fotografiei-cadru"), sunt pur geometrice şi nu se fac în timp (timpul, pentru personajele şi acţiunea din film „s-a oprit"), adică sunt instantanee ($\delta t = 0$).

O relaţie de incluziune între mulţimea deplasărilor elementare virtuale şi cea a deplasărilor elementare posibile, apare numai în cazul

[15] Dacă frecvenţa de succesiune a unor imagini depăşeşte această valoare, atunci ochiul uman nu mai poate sesiza că este vorba de imagini separate, ci le percepe ca fiind „un film continuu" – imaginile dau senzaţia de continuitate. Dimpotrivă, dacă frecvenţa cu care se succed acele imagini (cadre) este mai mică decât această valoare, atunci acele imagini („fotografii") vor fi sesizate ca fiind distincte. De exemplu, dacă ochiul uman ar avea această frecvenţă caracteristică mai mare de 50 de cadre pe secundă (sau, altfel spus, de 50 Hz, care este frecvenţa curentului electric alternativ de la reţeaua de 220 V, de alimentare cu energie electrică a locuinţelor) atunci el nu ar mai percepe lumina emisă de un bec cu incandescenţă ca fiind continuă, ci ar percepe-o ca şi cum becul „ar pâlpâi". Acest efect apare evident atunci, când, într-o emisiune de televiziune este prezentat monitorul unui calculator; oricine îşi aminteşte că pe ecranul filmat al monitorului imaginea apare ca şi cum „s-ar da peste cap" (ca şi cum monitorul ar fi „defect").

legăturilor scleronome. Dacă legătura este reonomă, cele două mulţimi nu au nici un element în comun, iar dacă legătura este scleronomă, atunci orice deplasare elementară posibilă este totodată o deplasare elementară virtuală. Cu alte cuvinte, în cazul legăturilor scleronome, mulţimea deplasărilor elementare posibile este inclusă în mulţimea deplasărilor elementare virtuale. Dacă facem notaţiile:

- M_{DER} - mulţimea deplasărilor elementare reale;
- M_{DEP} - mulţimea deplasărilor elementare posibile;
- M_{DEV} - mulţimea deplasărilor elementare virtuale;

atunci, sintetizând, pentru legăturile scleronome avem următoarea relaţie de incluziune între cele trei mulţimi:

$$M_{DER} \subset M_{DEP} \subset M_{DEV},$$

iar dacă legătura este reonomă, atunci

$$M_{DER} \subset M_{DEP}, \quad M_{DER} \cap M_{DEV} = \varnothing, \quad M_{DEP} \cap M_{DEV} = \varnothing.$$

O altă imagine sintetică (sub formă de tabel) asupra celor trei tipuri de deplasări elementare arată astfel[16]:

	Deplasări elementare reale	Deplasări elementare posibile	Deplasări elementare virtuale
Satisfac ecuaţiile de mişcare	👍	👎	👎
Satisfac condiţiile iniţiale	👍	👎	👎
Satisfac legăturile	👍	👍	👍
Au loc în timp	👍	👍	👎
Sunt instantanee	👎	👎	👍
Sunt pur geometrice	👎	👎	👍
Sunt tangente la legătură	👎	👎	👍

[16] Proprietăţile enumerate în tabel (asupra celor trei tipuri de legături) sunt valabile strict în cazul legăturilor reonome. Dacă legăturile sunt scleronome, trebuiesc avute în consideraţie precizările anterioare din text.

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

I.3. Noţiunea de lucru mecanic virtual. Principiul lucrului mecanic virtual

I.3.1. Principiul lucrului mecanic virtual

După cum am văzut în paragraful precedent, înlocuirea unei probleme de dinamică cu o problemă echivalentă de statică ar avea marele avantaj că, din punct de vedere matematic, ar permite înlocuirea unei probleme de ecuaţiile fizicii matematice cu una de algebră. Mai exact, necesitatea de a rezolva un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi ar putea fi înlocuită cu aceea a rezolvării unui sistem de ecuaţii algebrice. Cum se poate realiza în mod concret această „echivalare" între o problemă de dinamică şi una de statică vom vedea în paragraful următor. Cât priveşte însă studiul efectiv al unei probleme de statică, trebuie să precizăm că, esenţa unei astfel de probleme constă întotdeauna în „lămurirea" a două aspecte, din care primul se referă la determinarea poziţiei şi/sau condiţiei de echilibru a unui sistem de puncte materiale. Acest lucru poate fi realizat cu ajutorul *principiului lucrului mecanic virtual.* La al doilea aspect – şi el la fel de important ca primul – anume, studiul stabilităţii echilibrului unui sistem de puncte materiale, nu ne vom referi aici.

Noţiunea de *lucru mecanic virtual* apare cu necesitate în cadrul demersului pe care ni l-am propus, deoarece, aşa cum tocmai am precizat, rezolvarea unei probleme de statică implică, într-o primă etapă, studiul echilibrului unui sistem mecanic. După cum ştim, la modul cel mai general, aceasta se face în felul următor: se modifică poziţiile punctelor materiale ale sistemului cu cantităţi (deplasări) elementare virtuale şi se urmăreşte/constată apoi ce efect au aceste mici deplasări asupra staticii sistemului. Cum oricărei deplasări elementare $d\vec{r}$ a punctului de aplicaţie al unei forţe $\vec{F}$ îi corespunde un lucru mecanic elementar $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, unei deplasări elementare *virtuale* $\delta\vec{r}$ îi va corespunde un aşa-numit *lucru mecanic virtual*, $\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$.

În termenii deplasărilor elementare virtuale, condiţia de echilibru se obţine astfel:

Fie un sistem de $N \geq 2$ puncte materiale şi $\delta\vec{r}_i$ o deplasare elementară virtuală a punctului material cu numărul de ordine i, P_i, asupra căruia acţionează forţa aplicată $\vec{F}_i$. Atunci, prin definiţie

$$\delta W = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \tag{1.30}$$

este *lucrul mecanic virtual* realizat de această forţă. Întrucât punctul material este în echilibru static, $\ddot{\vec{r}}_i = 0$, şi atunci, din expresia matematică a principiului fundamental al dinamicii, scris pentru acest punct material,

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{L}_i,$$

rămâne

$$0 = \vec{F}_i + \vec{L}_i.$$

Înmulţind scalar această relaţie cu $\delta\vec{r}_i$ şi sumând după indicele i, obţinem

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{1.31}$$

Dacă legăturile sunt ideale (cu alte cuvinte, dacă forţele de legătură au doar componente normale la legătură), $\vec{L}_i \equiv \left(\vec{L}_i\right)_{normal} = \left(\vec{L}_i\right)_{\perp}$, ţinând cont că totdeauna deplasările elementare virtuale sunt tangente la legătură, $\delta\vec{r}_i \equiv \left(\delta\vec{r}_i\right)_{\parallel}$, rezultă că lucrul mecanic virtual al forţelor de legătură este nul:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{L}_i\right)_{\perp} \cdot \left(\delta\vec{r}_i\right)_{\parallel} = 0.$$

Deci, în cazul legăturilor ideale, relaţia (1.31) se scrie:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \tag{1.32}$$

şi exprimă – matematic – *principiul lucrului mecanic virtual*, care se poate enunţa astfel:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un sistem de puncte materiale supus unor legături ideale să fie în echilibru este ca lucrul mecanic virtual al tuturor forţelor aplicate să fie nul, pentru orice deplasări virtuale compatibile cu legăturile.

Fie

$$f_j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N; t\right) = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right),$$

BCU "ALEXANDRU IOAN CUZA" UNIVERSITY LIBRARY

l legături ideale care limitează posibilitățile de mișcare ale sistemului de puncte materiale. După cum am văzut în paragraful precedent, deplasările elementare virtuale satisfac relațiile

$$\sum_{i=1}^{N}\left(grad_i f_j\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0,\quad\left(j=\overline{1,l}\right),\tag{1.33}$$

sau

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0,\quad\left(j=\overline{1,l}\right).\tag{1.34}$$

Pe de altă parte, relația (1.32) – care exprimă principiul lucrului mecanic virtual – mai poate fi scrisă sub forma:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i\right)=0,\tag{1.35}$$

unde $\vec{F}_i=\left(X_i,\ Y_i,\ Z_i\right)$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$. Dacă deplasările elementare virtuale $\left(\delta x_i,\ \delta y_i,\ \delta z_i\right)$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ ar fi liniar independente, atunci din (1.35) ar rezulta următorul sistem de ecuații algebrice:

$$\begin{cases}X_i=0,\\ Y_i=0,\\ Z_i=0,\end{cases}\quad\left(i=\overline{1,N}\right),\tag{1.36}$$

a cărui soluție ar furniza poziția de echilibru: $x_i,\ y_i,\ z_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$, pentru sistemul de puncte materiale. Însă, relațiile (1.34) reprezintă l constrângeri pentru setul de deplasări virtuale $\left(\delta x_i,\ \delta y_i,\ \delta z_i\right)$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$, care, astfel, nu pot fi considerate ca fiind independente.

Pentru a rezolva problema (adică pentru a determina poziția de echilibru a sistemului de puncte materiale) vom utiliza metoda multiplicatorilor lui Lagrange. În acest sens, vom înmulți relațiile (1.34) cu scalarii nenuli λ_j, $\left(j=\overline{1,l}\right)$, vom suma după j şi vom aduna rezultatul la expresia (1.35) a principiului lucrului mecanic virtual. În acest fel, rezultă:

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left(X_i+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\delta x_i+\left(Y_i+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\right)\delta y_i+\left(Z_i+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\right)\delta z_i\right]=0,\tag{1.37}$$

BCU CLUJ-NAPOCA UNIVERSITY LIBRARY

relaţie care trebuie satisfăcută de orice δx_i, δy_i, δz_i, $\left(i=\overline{1,N}\right)$. Deoarece deplasările virtuale δx_i, δy_i, δz_i, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ se supun celor l constrângeri (1.34), înseamnă că, din numărul total de $3N$ deplasări virtuale, doar $3N-l$ sunt liniar independente. Soluţia problemei rezultă astfel: se egalează cu zero l paranteze rotunde din cele $3N$ câte sunt în total în relaţia (1.37), obţinându-se astfel l ecuaţii algebrice pentru necunoscutele λ_j, $\left(j=\overline{1,l}\right)$. În acest fel, în (1.37) rămân doar $3N-l$ termeni (în care λ_j, $\left(j=\overline{1,l}\right)$ au fost determinaţi) corespunzători celor $3N-l$ deplasări virtuale liniar independente. Coeficienţii acestor deplasări virtuale (adică cele $3N-l$ paranteze rotunde care au rămas în (1.37)) vor trebui să se anuleze, deoarece relaţia (1.37) reprezintă acum o combinaţie liniară de „vectori[17]" liniar independenţi. În acest fel, toate cele $3N$ paranteze rotunde din relaţia (1.37) trebuie să se anuleze, rezultând astfel un sistem de $3N$ ecuaţii algebrice cu $3N+l$ necunoscute (cele $3N$ coordonate care dau poziţia de echilibru: x_i, y_i, z_i, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ şi cei l multiplicatori Lagrange, λ_j, $\left(j=\overline{1,l}\right)$). Pentru ca problema să aibă soluţie unică, sistemul celor $3N$ ecuaţii algebrice se completează cu relaţiile analitice care exprimă cele l legături, $f_j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t\right)=0$, $\left(j=\overline{1,l}\right)$, rezultând astfel un sistem cu $3N+l$ ecuaţii, pentru cele $3N+l$ necunoscute,

$$\begin{cases} X_i+\sum\limits_{j=1}^{l}\lambda_j\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}=0, \\ Y_i+\sum\limits_{j=1}^{l}\lambda_j\dfrac{\partial f_j}{\partial y_i}=0, \\ Z_i+\sum\limits_{j=1}^{l}\lambda_j\dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}=0, \\ f_j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; t\right)=0. \end{cases} \qquad \left(i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,l}\right). \tag{1.38}$$

În acest fel, problema este rezolvată complet.

[17] „Vectorii" liniar independenţi fiind cele $3N-l$ deplasări virtuale liniar independente.

BIBLIOTECA UNIVERSITARĂ

I.3.2. Principiul vitezelor virtuale

Principiul lucrului mecanic virtual mai are o formulare, anume, cea în termenii aşa-numitelor *viteze virtuale*, caz în care el este cunoscut sub denumirea de *principiul vitezelor virtuale.*

Prin analogie cu definiţia vitezei obişnuite,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}},$$

se introduce noţiunea de *viteză virtuală*, definită prin

$$\vec{v} = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t}, \tag{1.39}$$

unde, tot prin analogie cu cazul obişnuit, δt ar desemna intervalul virtual de timp în care are loc deplasarea elementară virtuală $\delta\vec{r}$. Evident, aceasta este o definiţie formală, deoarece, aşa cum am văzut în paragraful dedicat deplasărilor elementare, o deplasare virtuală este una pur geometrică, instantanee, considerată pentru $\delta t = 0$. Totuşi, făcând abstracţie de această observaţie, noua formă a principiului lucrului mecanic virtual – aşa numitul principiu al vitezelor virtuale – se dovedeşte a fi deosebit de util în determinarea condiţiei/condiţiilor[18] de echilibru cinematic[19] a/ale unui sistem de puncte materiale. Toate consideraţiile făcute anterior rămân valabile şi aici, chiar dacă echilibrul nu mai este unul static, deoarece, în ambele cazuri $\ddot{\vec{r}}_i = 0$ ($\varepsilon_i = \frac{d\omega_i}{dt} = \ddot{\alpha}_i = 0$, pentru mişcarea circulară). Într-adevăr, condiţia $\ddot{\vec{r}}_i = 0$ (respectiv $\varepsilon_i = 0$) nu înseamnă numai repaus (viteză liniară sau unghiulară nulă) – ceea ce corespunde *echilibrului static* – ci şi

[18] Trebuie să observăm că, aşa cum este şi normal, dacă pentru cazul echilibrului static vorbim despre „poziţie/poziţii" de echilibru, în cazul echilibrului cinematic vorbim despre „condiţie/condiţii" de echilibru. Aceasta, deoarece, în cazul echilibrului cinematic, punctele materiale ale sistemului aflându-se într-o continuă mişcare, acestea nu pot avea o „poziţie" de echilibru, ci, în acest caz va trebui satisfăcută o anumită „condiţie" de către diversele mărimi caracteristice sistemului (forţe, momente ale unor forţe, diverse alte elemente specifice sistemului) pentru ca să se asigure condiţia de acceleraţie nulă (condiţia de echilibru cinematic).

[19] Despre un sistem de puncte materiale se spune că este în echilibru cinematic atunci când are o mişcare uniformă (atât în ceea ce priveşte mişcarea rectilinie – când acceleraţia liniară $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ este zero – cât şi cea circulară – când acceleraţia unghiulară $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ este nulă).

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

mișcare, numai că o mișcare uniformă, realizată cu viteză (liniară sau unghiulară) constantă,

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \overrightarrow{const.} \text{ (respectiv } \omega_i = const.), \tag{1.40}$$

ceea ce corespunde *echilibrului cinematic.*

Din acest punct de vedere, principiul vitezelor virtuale reprezintă o extindere a principiului lucrului mecanic virtual, la cazul în care constanta din relațiile (1.40) nu este obligată să ia valoarea zero.

Expresia matematică a acestui principiu poate fi dedusă banal pornind de la cea a principiului lucrului mecanic virtual,

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

prin împărțirea acesteia din urmă cu intervalul de timp „virtual", $\delta t (\neq 0)$:

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i}{\delta t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = 0. \tag{1.41}$$

Pentru mișcarea circulară, această relație se scrie astfel:

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} M_i \delta \alpha_i}{\delta t} = \sum_{i=1}^{N} M_i \frac{\delta \alpha_i}{\delta t} = \sum_{i=1}^{N} M_i \omega_i = 0. \tag{1.42}$$

Întrucât în relațiile (1.41) și (1.42) $\frac{\delta W}{\delta t}$ are dimensiunile unei puteri, această formă a principiului lucrului mecanic virtual mai este numită uneori și *principiul puterii virtuale.* Asupra acestei forme a principiului lucrului mecanic virtual vom reveni, după ce vom introduce noțiunile de coordonate generalizate și spațiu al configurațiilor.

I.3.3. Principiul lui Torricelli

În cazul particular când singurele forțe aplicate sistemului de puncte materiale sunt forțele de greutate proprie a punctelor materiale, principiul lucrului mecanic virtual primește forma *principiului lui Torricelli.* Acesta se enunță astfel: *Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem de*

BCU "ST. O. TAUFER" UNIVERSITY LIBRARY

puncte materiale supus unor legături ideale și asupra căruia sunt aplicate doar forțele de greutate proprie ale punctelor materiale să fie în echilibru este ca variația virtuală a cotei centrului de greutate al sistemului să fie zero, $\delta z_G = 0$.

Pentru a rezolva o problemă de echilibru static cu ajutorul acestui principiu, putem utiliza următorul algoritm:

1) ataşăm sistemului de puncte materiale un sistem de referință triortogonal (de preferință cartezian), având axa Oz orientată vertical;
2) identificăm numărul l de legături, stabilim numărul gradelor de libertate ale sistemului, $n = 3N - l$ (unde N reprezintă numărul punctelor materiale din sistem) și asociem fiecărui grad de libertate o anumită mărime variabilă caracteristică sistemului, astfel încât să rezulte în final un set liniar independent de n astfel de mărimi ($n > 0$ parametri liniar independenți, care să caracterizeze sistemul);
3) determinăm cota centrului de greutate[20] al sistemului de puncte materiale, cu ajutorul uneia din următoarele relații de definiție:

i) $z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \dfrac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$, dacă sistemul este discret, sau

ii) $z_G = \dfrac{\int_{(D)} z\rho(x, y, z)\, dxdydz}{\int_{(D)} \rho(x, y, z)\, dxdydz} = \dfrac{1}{M} \int_{(D)} z\rho(x, y, z)\, dxdydz$, dacă sistemul are o distribuție continuă de masă în domeniul spațial D;

4) cota centrului de greutate determinată la punctul 3) al algoritmului se va exprima ca o funcție de cei n parametri liniar independenți ce caracterizează sistemul de puncte materiale,

$$z_G = z_G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

[20] Presupunând că extinderea spațială a sistemului de puncte materiale este relativ mică (astfel încât accelerația gravitațională să nu varieze sensibil în limitele ei), putem identifica centrul de greutate al sistemului de puncte materiale cu centrul lui de masă. Formulele pe care le vom da mai jos sunt scrise în sensul acestei presupuneri.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Calculăm apoi diferenţiala cotei centrului de greutate, dz_G:

$$dz_G = X_1(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)d\xi_1 + X_2(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)d\xi_2 + ... + X_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)d\xi_n,$$

o identificăm cu prima variaţie $dz_G \equiv \delta z_G$,

$$\delta z_G = X_1(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\delta\xi_1 + X_2(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\delta\xi_2 + ... + X_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\delta\xi_n, \tag{1.43}$$

şi rezolvăm ecuaţia $\delta z_G = 0$. Ţinând cont de faptul că setul de parametri $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ este liniar independent, şi setul de variaţii virtuale $\delta\xi_1, \delta\xi_2, ..., \delta\xi_n$ va fi tot unul liniar independent, şi atunci, din (1.43) va rezulta următorul sistem de n ecuaţii algebrice în necunoscutele $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$:

$$\begin{cases} X_1(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = 0, \\ X_2(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = 0, \\ \vdots \\ X_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = 0. \end{cases}$$

Soluţiile reale ale acestui sistem vor furniza poziţia de echilibru a sistemului de puncte materiale.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul II

Principii ale mecanicii analitice

II.1. Principiul lui D'Alembert

În paragraful precedent, am enunțat principiul lucrului mecanic virtual și am indicat metoda de determinare a poziției (respectiv a condiției[1]) de echilibru pentru un sistem de puncte materiale. Această metodă este utilă în rezolvarea problemelor de statică (respectiv de cinematică), constituind instrumentul de bază în rezolvarea problemei fundamentale a staticii. Totuși, „miracolul" despre care vorbeam în paragraful consacrat deplasărilor elementare, anume, acela de a „transforma" o problemă de dinamică într-una de statică, realizează acest lucru doar într-o primă fază – ce-i drept, foarte utilă – anume, atunci când considerăm sistemul mecanic (fizic) în spațiul real al mișcării, permițând enunțarea principiului lui D'Alembert dar, după cum vom vedea, până la urmă problema revine la a rezolva tot o problemă de dinamică, însă nu pe spațiul real – unde problema este foarte complicată uneori – ci pe spațiul configurațiilor, unde aceasta se simplifică (prin comparație cu problema de dinamică din spațiul real), adesea foarte mult, în sensul în care vom vedea în continuare.

Astfel, să observăm că rezolvarea unei probleme cu ajutorul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I devine din ce în ce mai dificilă, pe măsură ce numărul N de corpuri din sistem și numărul de legături l cresc. Se poate ajunge în situația în care sistemul de $3N+l$ ecuații (cu tot atâtea necunoscute) să devină imposibil de rezolvat chiar și numeric din cauza numărului foarte mare de ecuații. Simplificarea problemei a fost rodul imaginației creatoare și intuiției marelui savant care a fost Lagrange. El a observat un fapt aparent simplu, dar foarte important: cu cât numărul de ecuații ale sistemului (1.24) crește – și aici ne interesează în primul rând creșterea numărului de ecuații datorată creșterii

[1] În cazul unui echilibru cinematic și nu static.

BCU "ION CREANGĂ" LIBRARY

numărului l de legături (număr care *se adună* la $3N$) – cu atât numărul gradelor de libertate ale sistemului scade (pentru a obţine numărul gradelor de libertate, din $3N$ *se scade* numărul de legături: $n=3N-l$). Aşadar, lui Lagrange i-a venit ideea genială de a înlocui numărul mare de necunoscute $\vec{r}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ şi λ_j, $\left(j=\overline{1,l}\right)$, cu numărul mai mic (cu atât mai mic, cu cât numărul de legături e mai mare) al altor necunoscute – să le notăm cu q_k, $\left(k=\overline{1,n}\right)$ – necunoscute egale ca număr cu numărul gradelor de libertate n ale sistemului. Aceste noi necunoscute se numesc astăzi *variabile Lagrange*, sau – pentru a ţine cont de proveniența lor (ele practic „înlocuiesc" coordonatele din spaţiul real al mişcării, $\vec{r}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$) – *coordonate generalizate*. Şi, fiind nişte coordonate, este firesc să ne întrebăm: ale cărui spaţiu? Spaţiul coordonatelor generalizate se numeşte *spaţiul configuraţiilor*, este un spaţiu abstract şi de el ne vom ocupa mai îndeaproape după ce vom discuta despre coordonatele generalizate.

Aşadar, coordonatele generalizate au fost introduse cu scopul de a înlocui problema rezolvării unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi (pentru cele $3N+l$ necunoscute $\vec{r}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ şi λ_j, $\left(j=\overline{1,l}\right)$ din cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa I) cu aceea a rezolvării unui sistem de aceeaşi natură, dar cu un număr mai mic cu $2l$ ecuaţii (pentru cele $n=3N-l$ necunoscute q_k, $\left(k=\overline{1,n}\right)$). În plus, formalismul în cadrul căruia se poate realiza acest lucru este mult mai general, permiţând abordarea problemelor şi din alte capitole ale fizicii (şi nu numai).

Modul concret în care se poate face trecerea de la coordonatele spaţiului real, $\vec{r}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$, la noile coordonate, q_k, $\left(k=\overline{1,n}\right)$, numite după cum am precizat mai sus, coordonate generalizate, nu urmează un algoritm bine stabilit şi unic. Alegerea cât mai adecvată a coordonatelor generalizate depinde de „îndemânarea", intuiţia şi experienţa celui care doreşte să rezolve o problemă pe această cale, dar, întotdeauna această „trecere",

$$\vec{r}_i \to q_k$$

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

trebuie să respecte anumite cerinţe, şi anume:

1) cerinţe obligatorii:

i) alegerea coordonatelor generalizate trebuie să se facă întotdeauna astfel încât să putem exprima toţi vectorii de poziţie ai punctelor materiale din sistem în funcţie de aceste coordonate generalizate şi, eventual, de timp:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n; t) \equiv \vec{r}_i(q, t), \quad \left(i = \overline{1,N}\right); \quad (2.1)$$

ii) să respecte ecuaţiile legăturilor, adică să avem:

$$f_j\left(q_1, q_2, ..., q_n; t\right) \equiv$$

$$\equiv f_j\left(\vec{r}_1(q, t), \vec{r}_2(q, t), ..., \vec{r}_N(q, t); t\right) = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right);$$

iii) să existe transformarea inversă, adică să putem exprima toate coordonatele generalizate în funcţie de vectorii de poziţie,

$$q_k = q_k\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; t\right), \quad \left(k = \overline{1,n}\right); \quad (2.2)$$

2) cerinţe facultative:

i) alegerea coordonatelor generalizate trebuie să ţină cont de proprietăţile de simetrie ale sistemului fizic studiat;

ii) alegerea coordonatelor generalizate trebuie să se facă astfel încât rezolvarea noilor ecuaţii diferenţiale (în noile coordonate) să poată fi făcută cât mai uşor;

iii) alegerea coordonatelor generalizate trebuie să conducă la o expresie cât mai simplă a funcţiei lui Lagrange (pentru sistemele naturale) sau a forţelor generalizate şi a energiei cinetice (pentru sistemele care nu admit un potenţial, fie el chiar generalizat)[2].

Ca şi coordonatelor spaţiului real al mişcării, $\vec{r}_i$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$, coordonatelor generalizate li se cere să fie funcţii continue de timp, cel puţin de două ori derivabile (pentru a exista $\ddot{q}_k$, $\left(k = \overline{1,n}\right)$, analoagele acceleraţiilor $\vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$ din spaţiul real).

[2] Noţiunile noi pe care le-am utilizat aici (cum ar fi: funcţia Lagrange, forţe generalizate etc.) vor fi explicate ulterior, tot în cadrul acestui paragraf, consacrat principiului lui D'Alembert.

BUJAS CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Spre deosebire însă de coordonatele spaţiului real (a căror unitate de măsură este totdeauna metrul), coordonatele generalizate pot fi mărimi din cele mai diverse. De exemplu, putem alege ca şi coordonate generalizate: elemente de lungime de arc, elemente de suprafaţă, unghiuri, componente de potenţial/antipotenţial sau de intensitate a unor câmpuri fizice, entropia, componente de viteză unghiulară etc. Mai mult, de cele mai multe ori alegerea coordonatelor generalizate nu este unică, ci este posibilă o transformare punct cu punct pe spaţiul acestor coordonate, adică putem defini un alt set de coordonate generalizate, prin

$$q_k \to q_k' = q_k'(q_1, q_2, ..., q_n; t), \quad \left(k = \overline{1,n}\right).$$

Dacă sistemul de puncte materiale nu este supus nici unei legături, atunci ca şi coordonate generalizate pot fi utilizate chiar coordonatele spaţiului real, în diverse reprezentări (carteziană, x_i, y_i, z_i, $\left(i = \overline{1,N}\right)$, sau una specifică sistemelor de coordonate curbilinii ortogonale, cum ar fi cea a coordonatelor sferice sau a celor cilindrice). De exemplu, pentru sistemul prezentat în Fig. I.2, existând o singură legătură,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 tg^2\theta + 2R\, x_3 tg\theta - R^2 = 0,$$

rezultă că punctul material care se mişcă pe suprafaţa conului are $n = 3-1 = 2$ grade de libertate. În acest caz există mai multe posibilităţi de a alege cele două coordonate generalizate asociate celor două grade de libertate. De exemplu, putem alege perechea $(q_1, q_2) = (x_1, x_3)$ sau, la fel de bine, perechea $(q_1, q_2) = (\varphi, x_3)$, unde φ este unghiul dintre axa Ox_1 şi proiecţia în planul x_1Ox_2 a vectorului de poziţie a punctului material. Şi acestea nu sunt singurele posibilităţi. Lăsăm cititorului să identifice şi alte asemenea perechi de variabile[3]. Dacă facem prima alegere, atunci relaţiile (2.1) se vor scrie astfel:

$$\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = \sqrt{\left[\left(R/tg\theta\right) - x_3\right]^2 - x_1^2}, \\ x_3 = x_3, \end{cases}$$

[3] Mai există cel puţin încă două astfel de posibilităţi.

BCU IAŞI / CENTRUL DE CULTURĂ LIBRARY

iar dacă facem cea de-a doua alegere, atunci avem

$$\begin{cases} x_1 = (R - x_3 tg\ \theta)\cos\varphi, \\ x_2 = (R - x_3 tg\ \theta)\sin\varphi, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

II.1.1. Spaţiul configuraţiilor

După cum deja am precizat, spaţiul configuraţiilor este spaţiul coordonatelor generalizate q_k, $\left(k = \overline{1,n}\right)$. El este un spaţiu matematic abstract (nu are corespondent fizic, real, decât în anumite cazuri particulare) şi, de obicei, este notat cu R^n. Un punct P al acestui spaţiu are n coordonate – setul celor n coordonate generalizate. Denumirea sa de spaţiu „al configuraţiilor" provine din faptul că punctele acestui spaţiu nu reprezintă altceva decât „configuraţii" ale sistemului de puncte materiale în spaţiul real, fizic. După cum ştim, ansamblul tuturor celor N vectori de poziţie $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_N$ (consideraţi la un moment de timp dat, t) ai celor N puncte materiale ale sistemului defineşte ceea ce numim *configuraţia* sistemului de puncte materiale (la acel moment de timp). Relaţiile (2.1) ne arată că, a cunoaşte toţi vectorii de poziţie ai punctelor materiale din sistem, este echivalent cu a cunoaşte setul celor n coordonate generalizate q_k, $\left(k = \overline{1,n}\right)$. Astfel, întreaga configuraţie a sistemului de puncte materiale din spaţiul real (adică toţi $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_N$ consideraţi la momentul de timp arbitrar t) este sintetizată într-un singur punct al spaţiului configuraţiilor – punctul care are ca şi coordonate cele n coordonate generalizate q_k, $\left(k = \overline{1,n}\right)$. Aceasta este o treabă formidabilă! Cunoscând poziţia unui singur punct din acest spaţiu abstract la un moment de timp oarecare t, cunoaştem de fapt poziţiile tuturor celor N puncte materiale în spaţiul real la acel moment de timp. Acest punct din spaţiul configuraţiilor, care conţine în el întreaga configuraţie a sistemului din spaţiul real se numeşte *punct reprezentativ al sistemului de puncte materiale*, sau simplu, *punct reprezentativ*. Mai mult, a urmări evoluţia

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

temporală a sistemului de puncte materiale, cu alte cuvinte, a cunoaşte toate cele N traiectorii (date, de exemplu, parametric prin relaţia vectorială $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$ sau, prin setul de relaţii scalare $x_i = x_i(t),\ y_i = y_i(t),\ z_i = z_i(t)$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$) este echivalent cu a urmări evoluţia temporală a unui singur punct, anume, punctul reprezentativ în spaţiul configuraţiilor. Cu alte cuvinte, cunoscând o singură traiectorie în spaţiul configuraţiilor (traiectoria punctului reprezentativ, numită şi *traiectorie generalizată*) cunoaştem de fapt traiectoriile tuturor celor N puncte materiale ale sistemului. Într-adevăr, cunoscând relaţiile $q_k = q_k(t)$, $\left(k = \overline{1,n}\right)$ (care reprezintă legea de mişcare a punctului reprezentativ în spaţiul configuraţiilor şi totodată ecuaţiile parametrice ale traiectoriei lui – traiectoria generalizată), prin intermediul relaţiilor (2.1) cunoaştem de fapt toate cele N legi de mişcare $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$ ale tuturor punctelor materiale din sistem, legi care reprezintă în acelaşi timp ecuaţiile parametrice (parametrul fiind chiar timpul) ale traiectoriilor punctelor materiale în spaţiul real.

Observaţii:

1) Traiectoria generalizată nu reprezintă nici una din traiectoriile din spaţiul real a vreunui punct material al sistemului, ci „înglobează" în ea toate traiectoriile celor N puncte materiale ale sistemului;
2) Traiectoria generalizată poate fi privită ca o succesiune de puncte reprezentative, fiecare dintre acestea reprezentând configuraţia întregului sistem la momentele succesive de timp din decursul evoluţiei temporale a acestuia.

II.1.2. Forţe generalizate

Diferenţiind relaţiile (2.1) în raport cu timpul, obţinem

$$d\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt, \quad \left(i = \overline{1,N}\right), \tag{2.3}$$

care poate exprima:

i) deplasarea elementară reală a punctului material P_i în intervalul de timp dt, dacă $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t)$ verifică toate cele trei condiții (ecuațiile diferențiale ale mișcării, ecuațiile legăturilor și condițiile inițiale compatibile cu legăturile);

ii) o deplasare elementară posibilă a aceluiași punct material, supus unor legături reonome,

$$f_j(\vec{r}_1(q, t), \vec{r}_2(q, t), ..., \vec{r}_N(q, t); t) = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right), \qquad (2.4)$$

(dacă $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t)$ verifică doar ecuațiile acestor legături);

Dacă în (2.3) facem $dt \to \delta t = 0$, atunci $d\vec{r}_i \to \delta\vec{r}_i$ și $dq_k \to \delta q_k$, și, conform definiției, relația obținută, adică

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \left(i = \overline{1,N}\right) \qquad (2.5)$$

va exprima o deplasare elementară virtuală a aceluiași punct material, supus legăturilor reonome (2.4).

Semnificația mărimilor dq_k din relațiile (2.3) și δq_k din relațiile (2.5) este analoagă mărimilor corespunzătoare din spațiul real, $d\vec{r}_i$ și $\delta\vec{r}_i$. Deci, dq_k poate desemna:

i) o deplasare elementară reală a punctului reprezentativ în spațiul configurațiilor, dacă $q_k = q_k(t)$ satisfac în spațiul configurațiilor toate cele trei cerințe (corespunzătoare celor satisfăcute de $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t)$ în spațiul real), anume: ecuațiile diferențiale ale mișcării (ecuațiile Lagrange de speța a II-a), condițiile inițiale compatibile cu legăturile, $q_{k0} = q_k(t_0)$ și $\dot{q}_{k0} = \dot{q}_k(t_0)$, $\left(k = \overline{1,n}\right)$ din spațiul configurațiilor și ecuațiile legăturilor (2.4);

ii) o deplasare elementară posibilă a aceluiași punct, dacă acesta satisface doar ecuațiile legăturilor reonome

$$f_j(\vec{r}_1(q, t), \vec{r}_2(q, t), ..., \vec{r}_N(q, t); t) = 0, \quad \left(j = \overline{1,l}\right),$$

iar δq_k desemnează o deplasare elementară virtuală a punctului reprezentativ în spațiul configurațiilor. Dacă $q_1, q_2, ..., q_n$ sunt liniar independente, atunci și setul deplasărilor elementare virtuale

BCUIAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

corespunzătoare, δq_1, δq_2, ..., δq_n, are aceeaşi proprietate (este un set de n deplasări elementare virtuale independente).

Să revenim acum – aşa cum am precizat în paragraful precedent – la noţiunea de lucru mecanic virtual. În spaţiul real, lucrul mecanic virtual al tuturor forţelor $\vec{F}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ aplicate unui sistem cu $N \geq 2$ puncte materiale, la deplasările elementare virtuale $\delta\vec{r}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ este

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i .$$

Înlocuind aici mărimile $\delta\vec{r}_i$ date de relaţiile (2.5), obţinem

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \tag{2.6}$$

$$\overset{not}{=} \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k ,$$

unde, prin definiţie,

$$Q_k \overset{def.}{=} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{2.7}$$

sunt numite *forţe generalizate*. Deci, în spaţiul configuraţiilor, principiul lucrului mecanic virtual se scrie astfel:

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k = 0 . \tag{2.8}$$

Întrucât forţele aplicate $\vec{F}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ au o dependenţă funcţională de tipul

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, ..., \dot{\vec{r}}_N; t\right),$$

având în vedere relaţiile (2.1), concluzionăm că forţele generalizate Q_k, $\left(k=\overline{1,n}\right)$ au o dependenţă funcţională de tipul

$$Q_k = Q_k\left(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n; t\right), \left(k=\overline{1,n}\right), \tag{2.9}$$

unde mărimile

$$\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}, \left(k=\overline{1,n}\right) \tag{2.10}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

se numesc (prin analogie cu cazul coordonatelor din spațiul real) *viteze generalizate* și sunt „legate" de vitezele din spațiul real $\dot{\vec{r}}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ prin relațiile

$$\dot{\vec{r}}_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t},\ \left(i=\overline{1,N}\right), \tag{2.11}$$

care rezultă din (2.3) prin împărțire la intervalul infinitezimal de timp dt.

Observație: După cum se observă din relațiile lor de definiție, forțele generalizate nu se măsoară în newtoni decât în cazul particular când coordonatele generalizate au dimensiune de lungime. Rezultă așadar că, în general, forțele generalizate nu sunt de fapt forțe (în sensul obișnuit, newtonian, al termenului). Semnificația forțelor generalizate este dată totdeauna de cea a coordonatelor generalizate cărora le corespund (cu care sunt asociate, dacă ne referim la expresia (2.8) a principiului lucrului mecanic virtual scris în spațiul configurațiilor). Chiar dacă, în general, forțele generalizate nu au dimensiunea unei forțe, produsul dintre orice forță generalizată și coordonata generalizată corespunzătoare (prin relația (2.8)) are dimensiunea unui lucru mecanic (Joule). De exemplu, dacă coordonata generalizată este o mărime care se măsoară în metri, atunci forța generalizată corespunzătoare este o forță obișnuită (newtoniană), dar dacă coordonata generalizată este o variabilă unghiulară, atunci forța generalizată este un moment al forței (deci, se măsoară în $N\cdot m$) etc.

Această observație este valabilă și în cazul principiului vitezelor virtuale. După cum am văzut în paragraful precedent, principiul vitezelor virtuale derivă din principiul lucrului mecanic virtual. La fel cum principiul lucrului mecanic virtual poate fi scris atât pe spațiul real, cât și în spațiul configurațiilor, și principiul vitezelor virtuale se bucură de aceeași proprietate.

Într-adevăr, avem:

$$\frac{\delta W}{\delta t}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i}{\delta t}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\frac{\delta\vec{r}_i}{\delta t}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k}{\delta t}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\delta q_k}{\delta t}=$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \frac{\delta q_k}{\delta t} = \sum_{k=1}^{n} Q_k w_k, \qquad (2.12)$$

unde prin w_k, $\left(k = \overline{1,n}\right)$ am desemnat vitezele virtuale generalizate, $w_k = \frac{\delta q_k}{\delta t}$, $\left(k = \overline{1,n}\right)$. Referitor la definiţia acestor viteze virtuale generalizate, este valabilă şi aici observaţia făcută cu ocazia introducerii noţiunii de viteză virtuală „obişnuită", $\vec{v}_i = \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta t}$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$. Dacă în relaţia (2.12) w_k este o viteză „obişnuită" (newtoniană), adică măsurabilă în m/s, atunci forţa generalizată corespunzătoare ei, Q_k, este o forţă „obişnuită" (newtoniană), dar dacă, de exemplu, viteza virtuală generalizată w_k este o viteză unghiulară, atunci forţa generalizată asociată va fi un moment al forţei etc.

În concluzie, în spaţiul configuraţiilor, principiul vitezelor virtuale se scrie sub forma

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \sum_{k=1}^{n} Q_k w_k = 0. \qquad (2.13)$$

Să ne reîntoarcem acum la principiul lui D'Alembert. Mai întâi trebuie să precizăm că acesta face parte din categoria principiilor diferenţiale ale mecanicii analitice, adică, din categoria acelor principii care ţin cont de comportarea sistemelor mecanice (fizice) la variaţii infinitezimale ale coordonatelor şi vitezelor. Scris pe spaţiul real, în esenţă, principiul lui D'Alembert nu face altceva decât, aşa cum spuneam şi în introducerea acestui paragraf, să realizeze acel „miracol" al transformării unei probleme de dinamică într-una de statică. Cum se poate acest lucru? Foarte simplu, după cum urmează:

Să considerăm, la fel ca de obicei, un sistem de $N \geq 2$ puncte materiale, P_1, P_2, ..., P_N supuse forţelor aplicate $\vec{F}_i$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$ şi forţelor de legătură $\vec{L}_i$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$, datorate unor legături olonome. Principiul fundamental (*lex secunda*) al dinamicii newtoniene scris pentru punctul material P_i are următoarea expresie matematică:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{L}_i, \qquad (2.14)$$

şi este valabil pentru orice punct material din sistem, deci pentru orice $i = \overline{1,N}$. Aceasta este expresia principiului acţiunii forţei într-un sistem de referinţă inerţial. Acest fapt, adesea de la sine subînţeles şi trecut prea uşor cu vederea, este extrem de important. De ce? Pentru că tocmai această observaţie permite realizarea acelui aşa-zis „miracol" despre care am tot amintit. Cum? Prin introducerea noţiunii de *forţă de inerţie*. Din păcate, destul de des această noţiune este înţeleasă rău, sau în cel mai fericit caz, în mod deformat. Şi aceasta, deoarece nu se are în vedere deosebirea clară care trebuie făcută între studiul comportării unui sistem fizic faţă de un sistem de referinţă inerţial – pe de o parte, şi faţă de un sistem de referinţă neinerţial – pe de altă parte. Din această cauză, forţele de inerţie sunt numite deseori, în mod nefericit, forţe fictive sau forţe imaginare. Această imagine deformată asupra forţelor de inerţie este prezentată uneori elevilor încă din clasa a IX-a, atunci când acestora li se predă pentru prima dată acest subiect. De fapt, dacă nu se face clar distincţia amintită mai sus, nici nu poate fi altfel. Într-un anumit sens, utilizarea denumirii de forţe fictive sau forţe imaginare dată forţelor de inerţie ar fi scuzabilă şi astfel ar putea fi tolerată, numai cu condiţia de a fi conştienţi de faptul că atunci când folosim aceste denumiri ne raportăm la un sistem de referinţă inerţial[4]. Aceasta, deoarece, aşa cum ar trebui să ştim, într-un sistem de referinţă inerţial, forţele de inerţie pur şi simplu **nu există**. Nu că ar fi imaginare, sau fictive, sau complementare etc. Pe de altă parte, într-un sistem de referinţă neinerţial aceste forţe există, **sunt reale**, deci pot fi considerate – şi chiar trebuie să fie considerate – ca forţe aplicate. Dar atenţie! Esenţială este raportarea noastră, ca şi observatori, la un tip de sistem de referinţă sau altul (inerţial sau, respectiv, neinerţial).

Totuşi, ce sunt aceste forţe de inerţie? Efectul lor l-am putut simţi cu toţii (şi astfel ne-am putut da seama cât de „reale" sau „ireale" sunt), de exemplu, atunci când, călătorind cu un mijloc de transport în comun (cum ar fi un tramvai aglomerat în care, evident, trebuie să stăm în picioare), în

[4] Şi chiar şi aşa, pentru a elimina definitiv orice posibilitate de confuzie şi orice ambiguitate, este de preferat să se renunţe la aceste denumiri. În acest fel se elimină posibilitatea de a lăsa elevilor (mai ales celor din clasa a IX-a, care abia stăpânesc conceptul de forţă) o imagine confuză, dubioasă, asupra existenţei sau inexistenţei acestor forţe.

momentul în care conducătorul acelui autovehicul frânează brusc (pentru a evita un accident, de exemplu) suntem nevoiţi să ne scuzăm faţă de persoana din faţă (care, la rândul ei trebuie să se scuze faţă de cea din faţa ei ş.a.m.d.) pentru că, fără să dorim aceasta (sau, uneori, chiar dorind, însă fără să găsim un motiv bine întemeiat !) „am luat-o în braţe". Mărimea forţei cu care suntem „împinşi" în faţă (la frânare) sau în spate (la accelerare) depinde de viteza de variaţie a vitezei acelui mobil, cu alte cuvinte, de acceleraţia (negativă sau, respectiv, pozitivă) imprimată autovehiculului[5]. Totuşi, un trecător care se află în repaus pe trotuar nu sesizează şi nu poate determina (din sistemul lui de referinţă, care este inerţial[6]) existenţa nici unei forţe care să acţioneze asupra călătorilor din mijlocul de transport. Tocmai din această cauză există tendinţa de a numi, în mod greşit, forţele de inerţie ca fiind „imaginare" sau „fictive". Din acest exemplu banal putem identifica două din cele trei caracteristici ale forţelor de inerţie, anume, direcţia şi sensul. Forţele de inerţie au aceeaşi direcţie cu cea a direcţiei acceleraţiei sistemului de referinţă neinerţial (tramvaiul aflat în mişcare accelerată, în exemplul nostru) şi sens opus faţă de sensul acestei acceleraţii (la frânare avem tendinţa de a merge „înainte", iar la accelerare, „înapoi"). Asupra mărimii (modulului) acestei forţe nu putem face decât o apreciere calitativă (dacă luăm în considerare exemplul dat aici) şi anume, că acesta este direct proporţional cu acceleraţia sistemului de referinţă neinerţial (tramvaiul, în exemplul considerat).

Aceste observaţii sunt corecte şi în deplină concordanţă cu definiţia teoretică dată forţelor de inerţie. Astfel, prin definiţie, mărimile $\left(-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)$ (fără sumare) din relaţiile (2.14) sunt de obicei notate cu

$$\vec{J}_i \overset{def.}{=} -m_i\ddot{\vec{r}}_i \tag{2.15}$$

[5] Referindu-ne tot la exemplul dat mai sus, dacă viteza cu care se deplasează tramvaiul este mică sau foarte mică, atunci efectul frânării este foarte mic, uneori insesizabil. Dar, dacă viteza este foarte mare şi vatmanul frânează brusc (cu alte cuvinte, decelerația imprimată tramvaiului este foarte mare), atunci cu siguranţă „vom lua persoana din faţă în braţe".

[6] Aici trebuie să avem în vedere faptul că, în realitate, nu există sisteme de referinţă inerţiale la modul absolut. Însă, cu o aproximaţie mai mult sau mai puţin bună, putem considera că un anume sistem de referinţă este inerţial. În cazul exemplului dat de noi, trotuarul poate fi considerat un sistem de referinţă inerţial.

şi sunt numite *forţe de inerţie.* Într-adevăr, după cum se poate observa, aceste forţe au aceeaşi direcţie cu acceleraţia $\ddot{\vec{r}}_i$, sens opus (datorită semnului minus din relaţia (2.15)), iar factorul de proporţionalitate de care vorbeam mai sus este (în acord cu principiul fundamental al mecanicii newtoniene) chiar masa corpului (punctului material).

Cu ajutorul acestor forţe, principiul fundamental al dinamicii exprimat prin relaţiile (14) capătă forma

$$\vec{F}_i + \vec{L}_i + \vec{J}_i = 0, \ \left(i = \overline{1,N}\right). \tag{2.16}$$

Această relaţie exprimă sub forma matematică principiul lui D'Alembert, care se enunţă astfel: *În orice moment de timp există un echilibru perfect între forţele aplicate, forţele de legătură şi forţele de inerţie care acţionează asupra unui corp.*

Ţinând cont de observaţiile făcute mai sus relativ la forţele de inerţie şi de modul în care este enunţat, rezultă cu necesitate că acest principiu nu poate fi valabil decât într-un sistem de referinţă neinerţial. Acesta este chiar sistemul de referinţă în care „miracolul" la care ne-am referit la început poate fi realizat. Într-adevăr, relaţiile (2.16) nu exprimă altceva decât condiţiile de echilibru pentru un sistem de N puncte materiale (rezultanta tuturor forţelor care acţionează asupra fiecărui punct material din sistem este zero). În acest fel, problema de dinamică s-a transformat într-una de cinematică ($\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \overrightarrow{(const.)_i}$) sau chiar de statică (dacă vitezele $\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i$ sunt nule), deoarece în acest sistem de referinţă toate acceleraţiile $\vec{a}_i$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$ ale celor N puncte materiale din sistem sunt nule:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{L}_i + \vec{J}_i = 0, \ \left(i = \overline{1,N}\right). \tag{2.17}$$

Vom ilustra această situaţie într-un caz foarte simplu. Fie în acest sens un corp paralelipipedic de masă m care se mişcă uniform accelerat, cu acceleraţia $\vec{a} > 0$ sub acţiunea unei forţe $\vec{F}$, pe un plan orizontal, ca în Fig. II.1.

BCU IAŞI CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

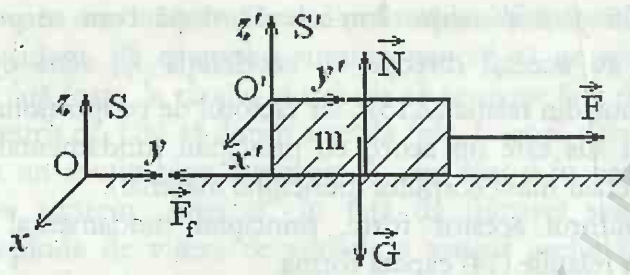


Fig. II.1

Deoarece $N = G = mg$ și $\left|\vec{F}_f\right| = \mu\left|\vec{N}\right|$, rezultă că accelerația corpului este

$$a = |\vec{a}| = \frac{\left|\vec{F}\right| - \mu mg}{m} = \frac{F}{m} - \mu g > 0. \qquad (2.18)$$

În sistemul de referință inerțial S (sistemul de referință „al laboratorului") corpul de masă m se mișcă uniform accelerat cu accelerația dată de relația (2.18) spre dreapta (vezi Fig. II.2).

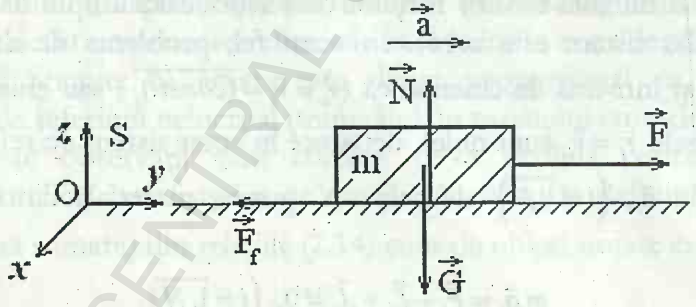


Fig. II.2

Un observator din sistemul de referință neinerțial S' (referențial solidar cu corpul, deci, care se mișcă spre dreapta cu aceeași accelerație $a > 0$ față de sistemul de referință „al laboratorului") va sesiza că, față de el, corpul este în repaus (vezi Fig. II.3).

BCU Iași / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

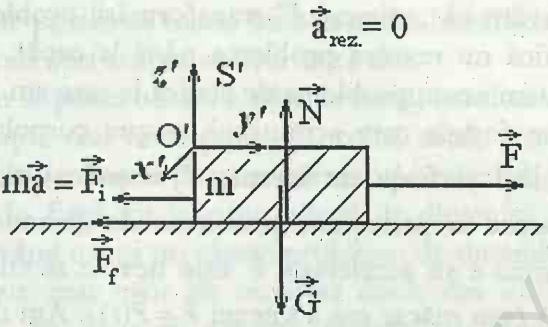


Fig. II.3

Forţele ($\vec{F}$, $\vec{F}_f$, $\vec{G}$ şi $\vec{N}$) care acţionează asupra corpului în referenţialul inerţial S vor acţiona şi în referenţialul neinerţial S'. Însă, faptul că în S' corpul este în repaus nu poate fi explicat decât dacă acceptăm că în acest referenţial mai apare o forţă, care are aceeaşi direcţie şi acelaşi modul cu rezultanta forţelor[7] $\vec{F}$ şi $\vec{F}_f$, dar sens opus acesteia,

$$\vec{F}_i = -\left(\vec{F} + \vec{F}_f\right) = -m\vec{a}\,. \tag{2.19}$$

Aceasta este tocmai *forţa de inerţie*. Ea este o forţă reală (aplicată) în referenţialul neinerţial S' şi are rolul de a „explica" situaţia fizică concretă care apare în acest referenţial (faptul că $\ddot{\vec{r}} = 0$). Deci, raportându-ne la referenţialul S' (şi implicit, luând în considerare forţa de inerţie $\vec{F}_i$) am transformat problema de dinamică într-una de statică. Într-adevăr, în S' avem

$$m\vec{a}_{rez} = \vec{F} + \vec{F}_f + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_i = 0\,, \tag{2.20}$$

adică $\vec{a}_{rez} = \ddot{\vec{r}} = 0$. Spre deosebire de forţele $\vec{F}$, $\vec{F}_f$, $\vec{G}$ şi $\vec{N}$ care acţionează atât în S cât şi în S', forţa de inerţie $\vec{F}_i$ nu acţionează decât în referenţialul neinerţial S'. Cu alte cuvinte, în sistemul de referinţă inerţial S, forţa de inerţie pur şi simplu *nu există*.

[7] Evident, e vorba despre rezultanta tuturor forţelor care acţionează asupra corpului, dar, având în vedere faptul că aici $\vec{G} + \vec{N} = 0$, la forţa rezultantă vor contribui doar $\vec{F}$ şi $\vec{F}_{fr}$.

BUJIAC CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să observăm că „miracolul" transformării problemei de dinamică într-una de statică nu rezolvă problema până la capăt. Într-adevăr, dacă am dori să studiem acum problema de statică la care am ajuns, ar trebui să cunoaştem toate forţele care acţionează asupra corpului în referenţialul neinerţial S', deci şi forţa de inerţie, $\vec{F}_i = -m\ddot{\vec{r}}$. Ori, aceasta nu este cunoscută deoarece ar presupune problema de dinamică deja rezolvată. Într-adevăr, pentru a şti acceleraţia $\ddot{\vec{r}}$ este nevoie să cunoaştem legea de mişcare $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (sau măcar cea a vitezei $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$). Am dat astfel peste un cerc vicios: pentru a rezolva problema, trebuie să-i cunoaştem soluţia! De aceea, soluţia trebuie căutată în altă parte. Acest lucru a fost realizat pentru prima dată tot de către Lagrange, pornind de la principiul lui D'Alembert, dar scris într-o formă uşor diferită de (2.16). Pentru a o determina vom înmulţi scalar expresia (2.16) cu deplasările virtuale din spaţiul real al mişcării, $\delta\vec{r}_i$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$. Rezultă:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{J}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i + \vec{J}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0\,, \tag{2.21}$$

unde am ţinut cont că, în cazul legăturilor ideale,

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \cdot \delta\vec{r}_i \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{L}_i\right)_{\text{normal}} \cdot \left(\delta\vec{r}_i\right)_{\text{tangenţial}} = 0\,.$$

Relaţia (2.21), care se mai scrie sub forma

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i + \vec{J}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{2.22}$$

exprimă principiul lui D'Alembert sub forma dată de către Lagrange. El se enunţă în felul următor:

Suma lucrurilor mecanice virtuale elementare ale tuturor forţelor aplicate şi de inerţie care acţionează asupra unui sistem mecanic supus unor legături ideale este nulă.

Această formă a principiului lui D'Alembert este mult mai utilă deoarece nu conţine forţele de legătură. Ea este utilizată pentru a deduce ecuaţiile diferenţiale de ordinul doi ale mişcării sistemului în spaţiul configuraţiilor. Aceste ecuaţii sunt unele dintre cele mai importante – chiar celebre – din întreaga fizică şi poartă numele de *ecuaţiile lui Lagrange de speţa a II-a*, sau, mai simplu, *ecuaţiile lui Lagrange*. Modul de deducere a

acestor ecuații este prezentat foarte bine în multe lucrări de specialitate[8] și de aceea nu ne vom opri asupra acestui lucru aici.

După cum se poate observa, până la urmă, rezolvarea problemei de dinamică din spațiul real nu a putut fi ocolită total, „trecerea" printr-o problemă de statică (enunțată într-un referențial neinerțial, pe spațiul real), pentru a ajunge în final tot la o problemă de dinamică (dar pe spațiul configurațiilor) având totuși un câștig: problema de dinamică de pe spațiul configurațiilor este mai ușor de rezolvat decât cea din spațiul real al mișcării. Aceasta fie doar și datorită faptului că sistemul de ecuații diferențiale de ordinul doi are mai puține ecuații (cu $2l$, unde l reprezintă numărul de legături).

În încheierea acestui paragraf vom prezenta, fără a indica modul concret în care pot fi obținute din principiul lui D'Alembert (2.22), ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a. Acestea sunt:

- pentru sistemele pentru care nu poate fi definit un potențial (și deci, nici o funcție Lagrange),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k,\ \left(k=\overline{1,n}\right), \tag{2.23}$$

unde $T=T\left(q_k,\ \dot{q}_k,\ t\right)$ este energia cinetică a sistemului de puncte materiale, iar $Q_k,\ \left(k=\overline{1,n}\right)$ sunt forțele generalizate;

- pentru *sistemele naturale* (sistemele pentru care poate fi definit un potențial, fie el și generalizat),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0,\ \left(k=\overline{1,n}\right), \tag{2.24}$$

unde $L=L\left(q_k,\ \dot{q}_k,\ t\right)=T\left(q_k,\ \dot{q}_k,\ t\right)-V\left(q_k,\ t\right)$ este funcția lui Lagrange pentru sistemele care admit un potențial simplu („obișnuit") și $L=L\left(q_k,\ \dot{q}_k,\ t\right)=T\left(q_k,\ \dot{q}_k,\ t\right)-V\left(q_k,\ \dot{q}_k,\ t\right)$, pentru sistemele care admit un *potențial generalizat* (care depinde de viteze).

[8] Vezi de exemplu lucrarea „Applied Analytical Mechanics", „The voice of Bucovina" Press, Iași, 1995, elaborată de I. Mercheș și L. Burlacu (pag. 52).

BIBLIOTECA UNIVERSITARĂ IAȘI

II.2. Principiul lui Hamilton

Principiul lui Hamilton este un principiu de bază nu doar în mecanica analitică, ci, am putea spune, fără să exagerăm, în întreaga fizică. El face parte din categoria principiilor integrale, fiind totodată (după cum vom arăta în detaliu) un principiu variaţional. Spre deosebire de principiile diferenţiale, cele integrale consideră mişcarea unui sistem fizic într-un interval *finit* (şi nu infinitezimal) de timp. Aceste principii operează cu variaţii globale (şi nu infinitezimale) considerate fie pe spaţiul real, fie pe cel al configuraţiilor.

Înainte de a prezenta principiul lui Hamilton menţionăm că, la modul absolut nu există vreo diferenţă între cele două categorii de principii (cele diferenţiale şi respectiv cele integrale), căci, după cum vom vedea, între principiile mecanicii analitice există o legătură foarte strânsă, oricare ar fi categoria acestora.

Pentru a înţelege mai uşor raţionamentele vom începe analiza noastră în spaţiul real al mişcării, R^3.

Fie un sistem de $N \geq 2$ puncte materiale, supus la l legături olonome,

$$f_k\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; t\right) = 0, \quad \left(k = \overline{1,l}\right) \tag{2.25}$$

şi să presupunem cunoscută legea de mişcare a sistemului de puncte materiale în spaţiul real,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \quad \left(i = \overline{1,N}\right) \tag{2.26}$$

în intervalul finit de timp $t_1 \leq t \leq t_2$.

Fie, de asemenea, o altă lege de mişcare a aceluiaşi sistem de puncte materiale,

$$\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i^{\,*}(t), \quad \left(i = \overline{1,N}\right), \tag{2.27}$$

care satisface ecuaţiile legăturilor (2.25), fără a verifica ecuaţiile diferenţiale de ordinul doi ale mişcării (de exemplu, ecuaţiile fundamentale ale dinamicii scrise pentru un sistem supus la legături sau ecuaţiile Lagrange de speţa I) şi nici condiţiile iniţiale compatibile cu legăturile. O astfel de mişcare o vom numi (prin analogie cu terminologia utilizată în cazul deplasărilor elementare) *mişcare virtuală*. Vom cere (prin analogie cu cazul

funcțiilor $y = y(x) \in C^2[a, b]$, pe a căror mulțime este definită funcționala $J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx$, și care trebuie să treacă – toate – prin aceleași două puncte $P(a, a_1)$ și $Q(b, b_1)$ situate pe „frontiera domeniului" de variație a variabilei independente $x \in [a, b]$ – vezi subcapitolul V.1, observația de la pagina 163) ca cele două traiectorii descrise de legile de mișcare (2.26) și (2.27) să treacă prin aceleași două puncte P_1 și P_2 corespunzătoare celor două momente de timp t_1 și t_2 (cu alte cuvinte, vom cere ca cele două traiectorii „să coincidă" la capetele intervalului de variație a variabilei independente, care aici este timpul t – vezi Fig. II.4), adică

$$\vec{r}_i(t_1) = \vec{r}_i^{\,*}(t_1) \text{ și } \vec{r}_i(t_2) = \vec{r}_i^{\,*}(t_2), \left(i = \overline{1, N}\right). \tag{2.28}$$

Definind deplasarea virtuală $\delta\vec{r}_i$ ca reprezentând variația vectorului de poziție al punctului material cu numărul de ordine i dintr-un punct al traiectoriei reale (C_{real}) într-un punct infinitezimal depărtat de acesta și aparținând traiectoriei virtuale $(C_{virtual}) \equiv (C^*)$ prin (vezi Fig. II.4):

$$\delta\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_i^{\,*}(t), \left(i = \overline{1, N}\right), \tag{2.29}$$

condițiile (2.28) se vor scrie astfel:

$$\delta\vec{r}_i(t_1) = 0, \quad \delta\vec{r}_i(t_2) = 0, \quad \left(i = \overline{1, N}\right). \tag{2.30}$$

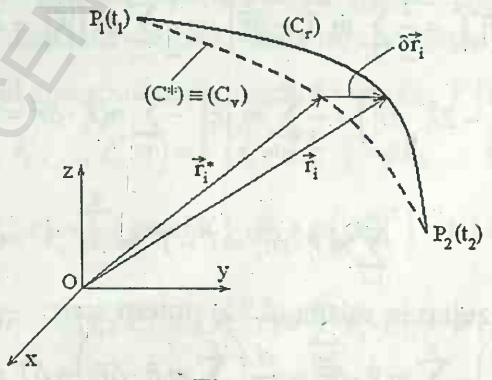


Fig. II.4

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Încă de la început evidențiem faptul că, pentru a găsi relația matematică ce exprimă principiul lui Hamilton, vom porni de la relația analoagă ce exprimă principiul lui D'Alembert sub forma dată de către Lagrange. În acest fel este mai mult decât evidentă „înrudirea" dintre cele două principii ale mecanicii analitice (legătură amintită chiar la început).

Principiul lui D'Alembert se scrie astfel:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0,$$

de unde,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \delta W,$$

sau, exprimând derivata de ordinul doi a vectorului de poziție $\vec{r}_i$ ca derivata celei de ordinul întâi,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\delta\vec{r}_i\right) = \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \delta W.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Analizând termenul $\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i$, se observă că el provine din variația virtuală a energiei cinetice $T = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left|\dot{\vec{r}}_i\right|$ a sistemului de puncte materiale.

Într-adevăr, evaluând energia cinetică a mișcării virtuale, avem

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left|\dot{\vec{r}}_i^{\,*}\right|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left|\dot{\vec{r}}_i - \delta\dot{\vec{r}}_i\right|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\left|\dot{\vec{r}}_i\right|^2 - 2\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i + \left|\delta\dot{\vec{r}}_i\right|^2\right) \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\left|\dot{\vec{r}}_i\right|^2 - 2\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left|\dot{\vec{r}}_i\right|^2 - \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i = T - \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i,$$

de unde,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i = T - T^* = \delta T.$$

Utilizând acest rezultat în relația (2.31) putem scrie:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right) - \delta T = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \delta W,$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i\right) = \delta T + \delta W = \delta\left(T + W\right). \tag{2.32}$$

Integrând acum această relație între momentele de timp t_1 și t_2 și ținând cont de relațiile (2.30), obținem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta\left(T + W\right) dt,$$

sau,

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i(t_2) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i(t_1) = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta\left(T + W\right) dt,$$

adică,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\left(T + W\right) dt = 0,$$

unde am ținut cont de relațiile (2.30). Având în vedere comutativitatea operatorilor de integrare, $\int \bullet\, dt$ și variație, $\delta\bullet$, relația precedentă se mai scrie:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(T + W\right) dt = 0, \tag{2.33}$$

și reprezintă expresia matematică a așa-numitului *principiu al lui Hamilton generalizat*, denumire dată din motive pe care le vom prezenta ulterior.

Dacă forțele aplicate sistemului de puncte materiale sunt forțe potențiale, adică dacă ele derivă dintr-un potențial $V\left(\vec{r},\, t\right)$, atunci, evaluând potențialul corespunzător mișcării virtuale, $V\left(\vec{r}^{\,*},\, t\right)$, avem:

$$V\left(\vec{r}^{\,*},\, t\right) \equiv V\left(\vec{r}_1^{\,*},\, \vec{r}_2^{\,*},\, ...,\, \vec{r}_N^{\,*};\, t\right) = V\left(\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_1,\, \vec{r}_1 - \delta\vec{r}_1,\, ...,\, \vec{r}_1 - \delta\vec{r}_1;\, t\right) =$$

$$= V\left(\vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, ...,\, \vec{r}_N;\, t\right) - \sum_{i=1}^{N} \left(grad_i V\right) \cdot \delta\vec{r}_i + o\left(\left|\delta\vec{r}_i\right|^2\right) \simeq V\left(\vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, ...,\, \vec{r}_N;\, t\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \left(grad_i V\right) \cdot \delta\vec{r}_i = V\left(\vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, ...,\, \vec{r}_N;\, t\right) + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = V\left(\vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, ...,\, \vec{r}_N;\, t\right) +$$

$$+ \delta W,$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau,

$$V\left(\vec{r}^{\,*},\, t\right) \equiv V^{*} = V + \delta W\,,$$

de unde,

$$\delta W = -\left(V - V^{*}\right) = -\delta V\,,$$

care, înlocuită în expresia (2.33) conduce la

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(T - V\right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(\vec{r},\, \dot{\vec{r}},\, t\right) dt = 0\,, \qquad (2.34)$$

unde $L\left(\vec{r},\, \dot{\vec{r}},\, t\right) = T\left(\dot{\vec{r}},\, t\right) - V\left(\vec{r},\, t\right)$ este funcţia lui Lagrange scrisă pe spaţiul real.

Relaţia (2.34) reprezintă expresia matematică a *principiului lui Hamilton* dar nu este folosită în forma în care a fost determinată aici, deoarece mărimile $\vec{r}_i$ şi $\dot{\vec{r}}_i$ care apar ca variabile în expresia funcţiei lui Lagrange nu sunt independente, ci satisfac aceleaşi constrângeri, date de relaţiile (2.25). Din această cauză întreg raţionamentul făcut mai sus se reia pe spaţiul configuraţiilor, R^n. În acest fel, coordonatele şi vitezele reale vor fi înlocuite prin analoagele lor generalizate de pe spaţiul configuraţiilor. Întrucât coordonatele generalizate sunt independente, şi vitezele generalizate vor fi la fel, ceea ce va duce la forma finală, corectă, a principiului lui Hamilton,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(T - V\right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(q,\, \dot{q},\, t\right) dt = 0\,.$$

Nu vom relua toate calculele făcute anterior pe spaţiul real, ci vom indica doar etapele principale. Astfel, legilor de mişcare (2.26) şi (2.27) din spaţiul real le vor corespunde legile de mişcare

$$q_k = q_k(t), \quad \left(k = \overline{1,n}\right) \qquad (2.26')$$

şi respectiv

$$q_k^{*} = q_k^{*}(t), \quad \left(k = \overline{1,n}\right), \qquad (2.27')$$

din spaţiul configuraţiilor, iar condiţiilor (2.30) din spaţiul real le vor corespunde noile condiţii din spaţiul configuraţiilor,

$$\delta q_k(t_1) = 0, \quad \delta q_k(t_2) = 0, \quad \left(k = \overline{1,n}\right), \qquad (2.30')$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

variațiile virtuale ale coordonatelor generalizate fiind definite cu ajutorul unor relații analoage celor de pe spațiul real, (2.29), adică,

$$\delta q_k(t) = q_k(t) - q_k^*(t), \quad \left(k = \overline{1,n}\right). \tag{2.29'}$$

Deoarece coordonatele generalizate sunt independente, rezultă că, exceptând condițiile (2.29') și variațiile virtuale ale lor, δq_k, $\left(k = \overline{1,n}\right)$ sunt independente. În plus, conform definiției, aceste variații sunt și instantanee (cu alte cuvinte, nu se fac în timp) ceea ce, într-o reprezentare grafică cu axa timpului în abscisă și cu axa ordonatelor sintetizând prin „compactificare" toate cele n dimensiuni ale spațiului configurațiilor, implică ortogonalitatea acestora la axa timpului (vezi Fig. II.5).

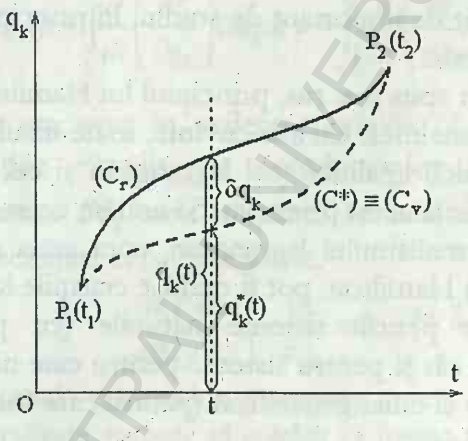


Fig. II.5

În aceste condiții, expresiei (2.34) din spațiul real îi va corespunde următoarea expresie pe spațiul configurațiilor:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\, \dot{q},\, t)\, dt = 0. \tag{2.35}$$

Integrala

$$S \equiv S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\, \dot{q},\, t)\, dt \tag{2.36}$$

este numită *integrala acțiunii* sau, simplu, *acțiune.*

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cu ajutorul ei, relația (2.35) se transcrie astfel:

$$\delta S = 0 . \tag{2.37}$$

Această relație extrem de simplă conține totuși în ea, esențializată, întreaga mecanică analitică! Ea exprimă *principiul lui Hamilton* pentru sistemele naturale supuse la legături olonome, care se enunță astfel: *Dintre toate traiectoriile generalizate posibile, care trec prin două puncte fixe din spațiul configurațiilor, corespunzătoare la două momente de timp* t_1 *și* t_2, *mișcarea reală se realizează pe acea traiectorie, care face acțiunea staționară.* Deoarece, de cele mai multe ori extremumul integralei acțiunii este un minim, acest principiu mai este numit uneori și *principiul acțiunii minime.*

El a fost publicat de către William Rowan Hamilton în anul 1834 și de atunci putem spune că fizicienilor le-a fost pus la dispoziție un instrument deosebit de important de studiu, în principiu, a oricărui sistem fizic, nu doar mecanic.

Așa cum am spus mai sus, principiul lui Hamilton conține în esență întreaga mecanică analitică. Cu alte cuvinte, toate rezultatele formalismelor de bază ale mecanicii analitice (cel lagrangean și cel hamiltonian) pot fi obținute pornind de la acest principiu. Să arătăm acest lucru.

1. În cazul formalismului lagrangean vom arăta cum, pornind de la principiul lui Hamilton, pot fi deduse ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a, atât pentru sisteme naturale (cu potențial simplu și generalizat), cât și pentru sisteme pentru care nu poate fi definit un potențial, fie el chiar generalizat (pentru care forțele aplicate nu sunt forțe potențiale):
   i) pentru a deduce ecuațiile lui Lagrange se speța a II-a pentru sisteme naturale cu potențial simplu, $V = V(q, t)$, vom porni de la forma (2.37) a principiului lui Hamilton,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0 ,$$

   pentru variații δq virtuale și independente (arbitrare[9]) ale coordonatelor generalizate. Astfel, avem:

[9] ... dar satisfăcând condițiile $\delta q_k(t_1) = 0$ și $\delta q_k(t_2) = 0$.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\, \dot{q},\, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q,\, \dot{q},\, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) dt -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) \Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(t_2) \delta q_k(t_2) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(t_1) \delta q_k(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] \delta q_k dt = 0,$$

unde am avut în vedere condițiile (2.30') satisfăcute de variațiile virtuale ale coordonatelor generalizate, δq_k. Deoarece δq_k sunt arbitrare, din relația de mai sus rezultă cu necesitate ecuațiile căutate,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad \left(k = \overline{1, n} \right); \tag{2.38}$$

ii) în cazul sistemelor naturale care admit potențiale generalizate, trebuie să arătăm că forma (2.33) a principiului lui Hamilton este echivalentă cu (2.37), cu condiția ca forțele generalizate să poată fi scrise sub forma $Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_k}$, $\left(k = \overline{1, n} \right)$, unde $V = V(q,\, \dot{q},\, t)$ este potențialul generalizat. Într-adevăr, după cum foarte ușor se poate arăta, dacă forțele generalizate au o astfel de reprezentare, atunci ecuațiile Lagrange de speța a II-a în forma generală, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$, $\left(k = \overline{1, n} \right)$ pot fi scrise

BCU IAȘI - CENTRUL UNIVERSITAR IBAȚAY

sub forma uzuală, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0,\ \left(k=\overline{1,n}\right)$, adică tot cu ajutorul unei funcții Lagrange, dar în care potențialul V este unul generalizat: $L(q,\dot{q},t)=T(q,\dot{q},t)-V(q,\dot{q},t)$. Să arătăm aşadar că (2.33) trece în (2.37) dacă are loc $Q_k=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial V}{\partial q_k}$. Avem,

$$0=\delta\int_{t_1}^{t_2}(T+W)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}(\delta T+\delta W)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt+\int_{t_1}^{t_2}\delta W dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt+\int_{t_1}^{t_2}Q_k\delta q_k dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt+\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial V}{\partial q_k}\right]\delta q_k dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k dt-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)dt-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k dt-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt+$$

$$+\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k+\frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}(t_2)\delta q_k(t_2)-\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}(t_1)\delta q_k(t_1)-\int_{t_1}^{t_2}\delta V dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\delta V dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta(T-V)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta L dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}L dt=\delta S=0.\ \textit{q.e.d.}$$

iii) în vederea deducerii ecuațiilor Lagrange pentru sisteme care sunt supuse unor forțe aplicate care nu derivă dintr-un potențial (fie el și generalizat) vom porni de la forma (2.33) a principiului lui Hamilton. Avem,

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$0=\delta\int_{t_1}^{t_2}(T+W)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}(\delta T+\delta W)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt+\int_{t_1}^{t_2}\delta W dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta \dot q_k\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}Q_k\delta q_k dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta \dot q_k dt+\int_{t_1}^{t_2}Q_k\delta q_k dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k\right)dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right)\delta q_k dt+\int_{t_1}^{t_2}Q_k\delta q_k dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k dt+\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right)\delta q_k dt+\int_{t_1}^{t_2}Q_k\delta q_k dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k dt+\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}(t_2)\times$$

$$\times\delta q_k(t_2)-\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}(t_1)\delta q_k(t_1)-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right)\delta q_k dt+\int_{t_1}^{t_2}Q_k\delta q_k dt=$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k\right]\delta q_k dt,\quad \left(k=\overline{1,n}\right),$$

unde am ținut cont de condițiile (2.30'). Cum variațiile δq_k, $\left(k=\overline{1,n}\right)$ sunt arbitrare[10], din relația anterioară rezultă cu necesitate ecuațiile căutate,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k,\quad \left(k=\overline{1,n}\right). \tag{2.39}$$

Întrucât relația (2.33) permite deducerea pe cale variațională atât a ecuațiilor Lagrange de speța a II-a pentru sistemele naturale care admit un potențial generalizat cât și a ecuațiilor Lagrange de speța a II-a pentru sistemele supuse

[10] Mai puțin condițiile (2.30').

BCU IAȘI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

unor forțe nepotențiale, (2.39), se spune că ea exprimă *principiul lui Hamilton generalizat.*

2. În cazul formalismului hamiltonian vom arăta cum poate fi dedus pe cale variațională sistemul de ecuații canonice ale lui Hamilton, „inima" formalismului hamiltonian. Astfel, utilizând expresia (2.37) a principiului lui Hamilton și definiția funcției lui Hamilton, $H = p_k\dot{q}_k - L$, avem:

$$0 = \delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(p_k\dot{q}_k - H\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(p_k\dot{q}_k\right) - \delta H\right]dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(p_k\delta\dot{q}_k + \dot{q}_k\delta p_k\right)dt - \int_{t_1}^{t_2}\delta H dt = \int_{t_1}^{t_2} p_k\delta\dot{q}_k dt + \int_{t_1}^{t_2}\dot{q}_k\delta p_k dt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(p_k\delta q_k\right)dt - \int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_k\delta q_k dt +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\dot{q}_k\delta p_k dt - \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\right)dt = \left(p_k\delta q_k\right)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_k\delta q_k dt +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\dot{q}_k\delta p_k dt - \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\right)dt = p_k(t_2)\delta q_k(t_2) -$$

$$-p_k(t_1)\delta q_k(t_1) - \int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_k\delta q_k dt + \int_{t_1}^{t_2}\dot{q}_k\delta p_k dt - \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\right)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[-\left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k + \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\delta p_k\right]dt,$$

unde, din nou am avut în vedere relațiile (2.30'). Datorită faptului că variațiile δq_k și δp_k, $\left(k = \overline{1,n}\right)$ sunt arbitrare[11], din relația de mai

[11] Este valabilă și aici observația făcută la nota de subsol precedentă.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sus rezultă cu necesitate că $\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$ şi $\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0$, care reprezintă sistemul ecuațiilor canonice ale lui Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q}_k = +\dfrac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial p_k}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Observații

1. Principiul lui Hamilton este un principiu variațional. Într-adevăr, o comparație rapidă a rezultatelor obținute în acest paragraf cu acelea prezentate în paragraful dedicat funcționalelor şi extremelor acestora, scoate în evidență o identitate de formă între cele două cazuri (vezi subcapitolul V.1). Acest lucru reiese cu claritate din corespondența următoare:

Variabila independentă x	$\leftrightarrow$	Variabila independentă t
Variabila dependentă (parametrul variațional) $y = y(x)$	$\leftrightarrow$	Variabila dependentă (parametrul variațional) $q = q(t)$
Funcția de clasă C^2 $f = f(x, y, y')$	$\leftrightarrow$	Funcția lui Lagrange $L = L(t, q, \dot{q})$
Funcționala $J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$	$\leftrightarrow$	Funcționala acțiunii $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q})dt$
Ecuațiile Euler-Lagrange $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0,\ \left(i = \overline{1,n}\right)$	$\leftrightarrow$	Ec. Lagrange de speța a II-a $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,\ \left(k = \overline{1,n}\right)$

BCU "Ovidius" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

După cum am văzut în paragraful dedicat calculului variaţional, soluţiile $y_i = y_i(x)$ ale ecuaţiilor Euler-Lagrange sunt acele „puncte" în care funcţionala de bază (funcţionala care a determinat forma concretă a acestor ecuaţii prin intermediul funcţiei $f(x, y, y')$) este staţionară; cu alte cuvinte, soluţiile ecuaţiilor Euler-Lagrange sunt acele „puncte" în care funcţionala este extremă (minimă sau maximă), acestea numindu-se şi *extremale.* Din acest punct de vedere, soluţiile ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a nu sunt altceva decât extremalele funcţionalei acţiunii, $S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$.

În această lumină, principiul lui Hamilton poate fi enunţat astfel: *Mişcarea reală a unui sistem fizic dat este cea descrisă de extremala funcţionalei acţiunii.* Cu alte cuvinte, dintre toate funcţiile $y_i = y_i(x)$ de clasă C^2 definite pe intervalul temporal $t \in [t_1, t_2]$ şi care satisfac condiţiilor $y_i(t_1) = a$, $y_i(t_2) = b$, $(i = 1, 2, ...)$, unde a şi b sunt două constante reale, mişcării reale a sistemului îi corespunde acea funcţie care face funcţionala acţiunii extremă.

2. Deoarece în acest paragraf am utilizat mărimi ce pot fi definite în raport cu orice sistem de referinţă, urmează că principiul lui Hamilton nu depinde de alegerea coordonatelor;
3. Întreaga informaţie despre sistemul fizic studiat este conţinută într-o singură funcţie scalară, funcţia lui Lagrange, care, odată cunoscută permite determinarea simplă şi rapidă a ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării, precum şi a legilor de conservare asociate;
4. Principiul lui Hamilton poate fi utilizat pentru a descrie într-o manieră unitară şi alte sisteme fizice (în afara celor mecanice), cum ar fi, de exemplu, câmpurile fizice. Acest lucru este posibil datorită faptului că termenii care intră în expresia funcţiei lui Lagrange au dimensiuni de energie (mărime care poate fi definită pentru orice sistem fizic), în timp ce nu orice tip de mişcare/interacţiune poate fi descrisă prin intermediul forţelor (care, uneori, sunt foarte greu de identificat). De exemplu, ecuaţiile fundamentale ale electrodinamicii (ecuaţiile lui Maxwell), cele ale teoriei elasticităţii

(ecuațiile Lamé), ecuația fundamentală a mecanicii cuantice nerelativiste (ecuația Schrödinger) etc., pot fi deduse pornind de la principiul lui Hamilton;

5. Din cele amintite mai sus reiese faptul că principiul lui Hamilton are un grad de aplicabilitate extrem de mare, fiind unul dintre cele mai generale principii ale naturii. Odată identificată funcția lui Lagrange ce caracterizează un anumit sistem, putem spune că „am prins în ecuație" acel aspect al universului. În acest scop există mai multe criterii-principii care trebuiesc luate în considerație atunci când dorim să construim funcția lui Lagrange pentru un anume sistem fizic. Acestea sunt:
   - *Principiul superpoziției.* Dacă sistemul este alcătuit din cel puțin două particule, atunci funcția lui Lagrange a întregului sistem trebuie să conțină trei grupuri de termeni: (i) termeni care să descrie fiecare particulă din sistem, ca și când aceasta ar fi singură, (ii) termeni care să descrie interacțiunea dintre fiecare particulă a sistemului cu oricare altă particulă din sistem și (iii) termeni care să descrie interacțiunea fiecărei particule a sistemului cu câmpurile de forță exterioare (evident, dacă acestea există);
   - *Principii de invarianță.* Acțiunea trebuie să fie construită în așa fel încât să fie invariantă la transformările grupului de simetrie ce caracterizează sistemul fizic studiat. De exemplu, în cazul mecanicii clasice-newtoniene, acest grup este grupul transformărilor Galilei-Newton, mecanicii relativiste îi corespunde grupul transformărilor Lorentz-Einstein etc.;
   - *Principiul de corespondență.* Acest principiu cere ca toate rezultatele cunoscute într-un domeniu particular al unui alt domeniu mai general să poată fi obținute din principiul lui Hamilton aplicat în domeniul mai general. De exemplu, trebuie ca toate rezultatele mecanicii clasice-newtoniene să poată fi obținute din principiul lui Hamilton aplicat în cadrul mecanicii analitice;
   - *Principiul simetriei.* Funcția lui Lagrange trebuie construită astfel încât aceasta să fie nu doar cea mai simplă cu putință,

BCU IAȘI - CARTEA UNIVERSITARĂ

ci şi astfel încât să conducă la ecuaţii diferenţiale ale mişcării care să evidenţieze/înglobeze proprietăţile de simetrie ale sistemului fizic studiat. În acest fel, rezolvarea acelor ecuaţii va fi mult uşurată. Acest lucru poate fi luat în consideraţie prin alegerea potrivită/convenabilă a coordonatelor generalizate.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul III

Problema pendulului simplu

În cele ce urmează vom rezolva problema fundamentală a dinamicii unui sistem fizic cu legături în cadrul a şase formalisme (clasic-newtonian, al ecuaţiilor Lagrange de speţa I, al ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a, al lui Hamilton, formalismul Hamilton-Jacobi şi formalismul variabilelor unghi-acţiune) pentru a scoate astfel în evidenţă asemănările şi deosebirile care există între aceste formalisme şi pentru a sesiza gradul sporit de generalitate (în strânsă legătură cu creşterea „puterii") a formalismelor mecanicii analitice faţă de cel clasic-newtonian – pe de o parte – dar şi a formalismelor mecanicii analitice între ele[1] – pe de altă parte.

Sistemul fizic particular pe care-l vom studia este alcătuit dintr-un corp de dimensiuni neglijabile (punct material) care se deplasează în plan vertical pe un arc de cerc în câmp gravitaţional uniform şi omogen. Acest sistem mecanic poate fi realizat cu ajutorul unei tije rigide de masă neglijabilă, fixată la capătul superior într-o articulaţie ideală şi având la celălalt capăt un corp de masă m asimilabil unui punct material.

Precizăm că ne vom opri doar asupra studiului mişcării acestui sistem într-un caz particular relativ simplu, şi anume, cel al oscilaţiilor de amplitudine oarecare, libere, armonice şi neamortizate, întrucât cazul general (cel care se referă la mişcarea neliniară, amortizată şi eventual în regim forţat) necesită cunoştinţe de dinamică neliniară (implicând noţiuni specifice cum ar fi: puncte de bifurcaţie, atractori stranii, coeficienţi Lyapunov etc.) şi iese din cadrul consideraţiilor din această lucrare. În plus, principalul scop pe care îl urmărim aici este acela de a oferi un exemplu de aplicare a cunoştinţelor teoretice dobândite în cadrul cursului de mecanică analitică, referitoare la cele şase metode distincte de rezolvare a unei probleme de mecanică.

[1] De exemplu, formalismul ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a este mai general şi are o arie de aplicabilitate mai mare decât cel al ecuaţiilor Lagrange de speţa I.

BUCHAREST UNIVERSITY LIBRARY

III.1. Formalismul clasic (newtonian)

În cadrul acestui formalism se consideră cunoscute masa corpului, forţele care acţionează asupra corpului (inclusiv forţele de legătură) şi condiţiile iniţiale compatibile cu legăturile, şi se cere să se găsească legea de mişcare, traiectoria şi eventual alte elemente caracteristice mişcării.

Dorim să evidenţiem încă de pe acum faptul că una dintre principalele deosebiri dintre formalismul clasic (newtonian) şi cele cinci formalisme ale mecanicii analitice este cea referitoare la forţele de legătură, care trebuiesc cunoscute încă de la început (măcar ca număr, direcţie şi sens) în cadrul formalismului newtonian, pe când, în cadrul formalismelor mecanicii analitice ele se determină abia la sfârşit.

Rezolvarea problemei în cadrul acestui formalism se bazează pe principiul fundamental al dinamicii (*lex secunda*), care furnizează ecuaţia diferenţială a mişcării. Evident, pentru a putea scrie expresia matematică a acestui principiu trebuiesc cunoscute toate forţele care acţionează asupra corpului (deci şi cele de legătură), iar rezolvarea ecuaţiei diferenţiale a mişcării necesită cunoaşterea condiţiilor iniţiale (poziţia şi viteza la momentul considerat iniţial). Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale reprezintă chiar *legea de mişcare a corpului*, $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Să notăm cu $\vec{G}$ forţa de greutate (forţa *aplicată* corpului) şi fie $\vec{T}$ forţa de *legătură* (tensiunea din tijă). Pentru a scrie ecuaţia fundamentală a mişcării vom alege un reper cu originea în punctul de suspensie a tijei, având axa Ox verticală, orientată în jos, iar axa Oy orizontală, orientată spre dreapta, aşa ca în Fig. III.1.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

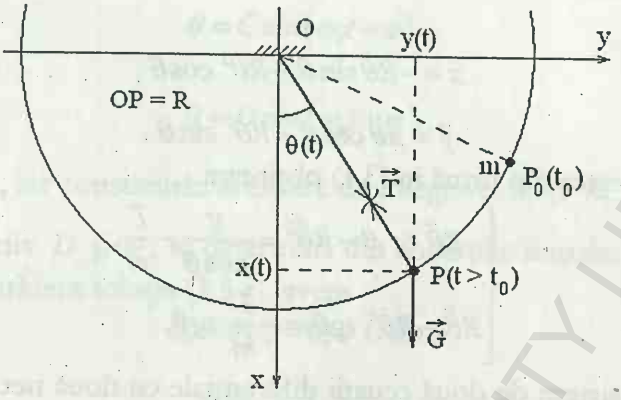


Fig. III.1

La momentul inițial, $t=0$, corpul se află în punctul $P_0(x_0, y_0)$ și este în repaus ($v_{0x}=0$, $v_{0y}=0$). La un moment oarecare de timp, t, tija face cu verticala unghiul $\theta(t)$. Proiectând ecuația fundamentală a mișcării pe cele două axe, putem scrie:

$$Ox: \quad m\ddot{x} = mg - T\cos\theta,$$
$$Oy: \quad m\ddot{y} = -T\sin\theta,$$

sau,

$$\begin{cases} \ddot{x} = g - \dfrac{T}{m}\cos\theta, \\ \ddot{y} = -\dfrac{T}{m}\sin\theta. \end{cases} \tag{3.1}$$

Suntem astfel în posesia unui sistem de două ecuații diferențiale cu patru necunoscute: x, y, θ, T. Pentru a-l rezolva vom apela la ecuațiile parametrice ale traiectoriei corpului de masă m,

$$x = R\cos\theta,$$

$$y = R\sin\theta.$$

Derivatele totale de ordinul unu și doi în raport cu timpul ale acestor ultime două relații sunt

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta,$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi respectiv,

$$\ddot{x} = -R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta,$$

$$\ddot{y} = R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta.$$

Cu acestea din urmă în (3.1) obţinem:

$$\begin{cases} -R\ddot{\theta}\ tg\ \theta - R\dot{\theta}^2 = \dfrac{g}{\cos\theta} - \dfrac{T}{m}, \\ R\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2\ tg\theta = -\dfrac{T}{m}\ tg\theta, \end{cases} \tag{3.2}$$

care este un sistem de două ecuaţii diferenţiale cu două necunoscute, deci rezolvabil în mod univoc.

Prin eliminarea lui T între cele două relaţii (3.2) obţinem

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0, \tag{3.3}$$

care este ecuaţia diferenţială a mişcării.

În cazul în care unghiul $\theta_0 = \theta(t_0 = 0)$ are valori mai mici decât cinci grade de arc, sinusul unghiului $\theta < \theta_0$ poate fi aproximat cu valoarea unghiului exprimată în radiani,

$$\sin\theta \cong \theta$$

şi atunci ecuaţia (3.3) devine

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0, \tag{3.4}$$

care este binecunoscuta *ecuaţie diferenţială a oscilatorului liniar armonic.* Deci, în acest caz (condiţii iniţiale care să respecte restricţia $\theta_0 < 5^\circ$) corpul de masă m efectuează oscilaţii libere[2] neamortizate[3], izocrone, cu amplitudinea şi faza iniţială depinzând de condiţiile iniţiale. Soluţia ecuaţiei (3.4) poate fi scrisă în cel puţin patru moduri:

$$\theta = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}, \tag{3.5 a}$$

$$\theta = B_1 \sin\omega_0 t + B_2 \cos\omega_0 t, \tag{3.5 b}$$

---

[2] În sensul că oscilaţiile nu sunt forţate.

[3] Oscilaţiile au loc în vid (nu există frecare între corp şi mediul în care acesta se mişcă – observaţie valabilă şi pentru tijă), iar articulaţia este ideală (nu există pierderi de energie prin frecare în articulaţie).

BU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\theta = C\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{3.5 c}$$

şi

$$\theta = D\cos(\omega_0 t + \psi), \tag{3.5 d}$$

unde $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$, iar constantele arbitrare de integrare A_1 şi A_2, B_1 şi B_2, C şi φ şi respectiv D şi ψ, se determină din condiţiile iniţiale. De exemplu, dacă vom considera soluţia (3.5 c), avem

$$\theta_0 = \theta(t_0 = 0) = C\sin\varphi$$

şi

$$\dot{\theta}_0 = \omega_0 C\cos\varphi = 0.$$

Cum C nu poate fi zero, rezultă $\varphi = \frac{\pi}{2}$ şi atunci, din $\theta_0 = C\sin\varphi$ rezultă $C = \theta_0$, deci soluţia finală va fi

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

În acest caz, perioada mişcării oscilatorii armonice a pendulului este

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{3.6}$$

şi depinde doar de lungimea pendulului (tijei), R, fiind independentă de amplitudinea mişcării (cu alte cuvinte, oricare ar fi amplitudinea mişcării oscilatorii armonice libere şi neamortizate, dacă ea îndeplineşte condiţia de oscilaţii mici, $\theta_0 < 5^\circ$, perioada rămâne tot timpul aceeaşi; astfel de oscilaţii se numesc *izocrone* sau *tautocrone* [4]).

Să studiem acum cazul în care unghiul θ_0 are o valoare oarecare. Evident, în această situaţie ecuaţia diferenţială a mişcării nu mai poate fi integrată imediat şi, în plus, trebuie să vedem dacă mişcarea mai rămâne una oscilatorie. Pentru aceasta vom transforma derivata de ordinul doi în raport cu timpul a unghiului θ într-o derivată de ordinul unu în raport cu θ, astfel:

[4] În limba greacă *tauto* înseamnă acelaşi/aceeaşi, iar *chronos* înseamnă timp.

BCU IAŞI - BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

$$\ddot{\theta} \equiv \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}.$$

Înlocuind $\ddot{\theta}$ astfel transformat în ecuația (3.3) obținem

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -\frac{2g}{R}\sin\theta$$

și separând variabilele, avem

$$d\dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{R}\sin\theta d\theta,$$

de unde,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

adică,

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0)}. \tag{3.7}$$

Cum $\dot{\theta}$ trebuie să fie o mărime reală (ea exprimă de fapt viteza unghiulară, care este o mărime fizică observabilă/măsurabilă), cantitatea de sub radical trebuie să fie o mărime pozitivă,

$$(\cos\theta - \cos\theta_0) \geq 0,$$

ceea ce conduce la

$$|\theta| \leq \theta_0.$$

Observăm așadar că mișcarea în acest caz are două *puncte de întoarcere*, anume,

$$\theta_1 = -\theta_0, \quad \theta_2 = +\theta_0.$$

Să analizăm în continuare modul de variație a mărimilor $\theta = \theta(t)$ și $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$. Pentru aceasta vom considera axa verticală Ox ca axă de zero pentru valorile unghiului θ: unghiurile măsurate pe arcul de cerc spre dreapta le vom considera pozitive, iar unghiurile măsurate spre stânga, negative.

Vom începe analiza pornind din punctul inițial, caracterizat de $\theta_i = \theta_0$ și $\dot{\theta}_i = \dot{\theta}_0 = 0$. Pentru a ușura analiza vom nota punctul de plecare cu litera A, punctul de trecere prin zero a unghiului θ cu C ș.a.m.d. (vezi Fig. III.2).

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

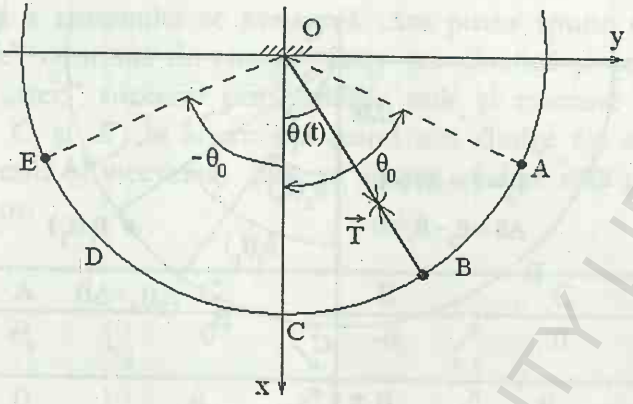


Fig. III.2

În intervalul $A \to B \to C$ unghiul θ scade prin valori pozitive până la zero, iar $\dot{\theta}$ (viteza unghiulară) scade de la zero (cât era în A) la valoarea minimă, $\dot{\theta}_{\min}$, prin valori negative. De acest lucru ne putem convinge uşor dacă vom utiliza definiţia derivatei unei funcţii într-un punct şi desenul ajutător din Fig. III.3. Într-adevăr,

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} < 0 .$$

În intervalul $C \to D \to E$ unghiul θ scade prin valori negative până la cea mai mică valoare a sa, $-\theta_0$ (corpul nu poate trece de acest punct, mergând spre valori mai negative ale lui θ, deoarece punctul $\theta = -\theta_0$ este punct de întoarcere), iar $\dot{\theta}$ creşte, tot prin valori negative (după cum se poate constata în urma unei analize ca mai sus) până la valoarea zero.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

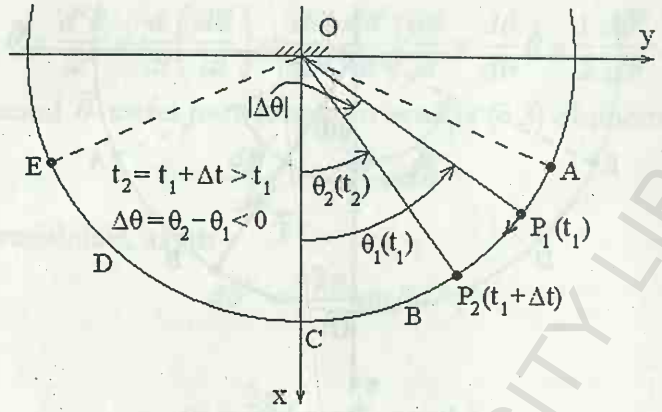


Fig. III.3

Pe intervalul $E \to D \to C$ unghiul θ creşte prin valori negative până la valoarea zero, iar $\dot{\theta}$ creşte (de data aceasta prin valori pozitive) până la valoarea maximă, $\dot{\theta}_{max}$, pe care o atinge în C. În intervalul următor, $C \to B \to A$, unghiul θ creşte prin valori pozitive până la valoarea maximă (iniţială), θ_0 şi nu poate trece de acest punct (mergând spre valori mai mari decât θ_0) deoarece şi punctul $\theta = +\theta_0$ este punct de întoarcere. Viteza unghiulară, $\dot{\theta}$ scade în acest interval de la valoarea sa maximă la zero (prin valori pozitive). Din acest moment, mişcarea se reia exact la fel, de unde tragem concluzia că, şi în acest caz, mişcarea rămâne una oscilatorie.

Această analiză poate fi completată cu cea realizată în termeni energetici. Dacă vom considera ca nivel de referinţă pentru energia potenţială gravitaţională planul perpendicular pe axa Ox, care trece prin punctul C, atunci, deoarece legătura este ideală (nu există pierderi energetice prin frecare şi nici prin alte mecanisme), energia potenţială maximă din punctul A este „cheltuită" pe seama realizării lucrului mecanic de către câmpul gravitaţional, care duce la creşterea energiei cinetice a corpului de masă m (nulă în punctul A) la valoarea sa maximă (valoare numeric egală cu aceea a lucrului mecanic realizat de câmpul gravitaţional şi egală cu energia potenţială din punctul iniţial A) din punctul C, unde energia potenţială este nulă. Neexistând pierderi de energie şi fiind implicat un câmp conservativ (câmpul gravitaţional)

BUCHAREST UNIVERSITY LIBRARY

energia totală a sistemului se conservă. Am putea spune că are loc o „transformare" continuă de energie, între cea cinetică şi cea potenţială, energii care „trec" succesiv prin valorile nule şi maxime (obţinute în punctele A, C şi E) în alternanţă (când una dintre ele este maximă, cealaltă este nulă şi viceversa). Sinteza acestei analize este prezentată în tabelul următor:

Punctul →	A		C		E		C		A
$\theta(t)$	θ_0	$\overset{(+)}{\searrow}$	0	$\overset{(-)}{\searrow}$	$-\theta_0$	$\overset{(-)}{\nearrow}$	0	$\overset{(+)}{\nearrow}$	θ_0
$\dot{\theta}(t)$	0	$\overset{(-)}{\searrow}$	$\dot{\theta}_{\min}$	$\overset{(-)}{\nearrow}$	0	$\overset{(+)}{\nearrow}$	$\dot{\theta}_{\max}$	$\overset{(+)}{\searrow}$	0
E_c	0	$\nearrow$	$E_{c\max}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$E_{c\max}$	$\searrow$	0
E_p	$E_{p\max}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$E_{p\max}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$E_{p\max}$

Deoarece (făcând abstracţie de semn) mişcarea se face în mod identic pe fiecare din cele patru subintervale ale unui ciclu complet, $\overset{\frown}{ABC} \to \overset{\frown}{CDE} \to \overset{\frown}{EDC} \to \overset{\frown}{CBA}$, rezultă că perioada mişcării este de patru ori intervalul de timp corespunzător oricăruia din cele patru subintervale. De exemplu, dacă notăm cu $(\Delta t)_{\overset{\frown}{ABC}}$ intervalul de timp necesar corpului pentru a parcurge primul subinterval (arcul de cerc/traiectorie $\overset{\frown}{ABC}$), atunci perioada mişcării va fi

$$\tau = 4(\Delta t)_{\overset{\frown}{ABC}}.$$

Pentru a-l determina pe τ utilizăm relaţia (3.7). Deoarece, conform tabelului de variaţie de mai sus, $\dot{\theta}$ este negativ pe intervalul $\overset{\frown}{ABC}$, avem

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0)},$$

de unde,

$$dt = -\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = -\sqrt{\frac{R}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

şi atunci,

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\tau = 4(\Delta t)_{\overset{\frown}{ABC}} = 4\int_0^{(\Delta t)_{\overset{\frown}{ABC}}} dt = -4\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} = \tag{3.8}$$

$$= \sqrt{\frac{8R}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}.$$

În continuare, vom exprima perioada mișcării, τ, în două moduri, cel mai des întâlnite în aplicații:

1) cu ajutorul integralelor eliptice complete de speța I și
2) prin intermediul unei serii de puteri pare ale sinusului amplitudinii unghiulare a mișcării, θ_0.

În acest sens, în integrala (3.8) să realizăm următoarea schimbare de variabilă:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi = k\sin\varphi,$$

unde am făcut notația evidentă, $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$.

Avem atunci,

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = k\cos\varphi\, d\varphi,$$

de unde,

$$d\theta = \frac{2k\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Pentru mărimea $(\cos\theta-\cos\theta_0)$ care apare în integrandul din (3.8) avem

$$\cos\theta-\cos\theta_0 = -(1-\cos\theta)+(1-\cos\theta_0) = -2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta_0}{2} =$$

$$= -2k^2\sin^2\varphi+2k^2 = 2k^2(1-\sin^2\varphi) = 2k^2\cos^2\varphi.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin înlocuirea acestor relații în (3.8) rezultă:

$$\tau = \sqrt{\frac{8R}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{8R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2}\, k\cos\varphi} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}} = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Am ajuns astfel la o integrală de tipul:

$$F(\varphi_0, k) = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

numită *integrală eliptică de speța I.* φ_0 se numește *amplitudinea*, iar k se numește *modulul* integralei eliptice de speța I. Integrala

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

se numește *integrală eliptică completă de speța I.* Aceste integrale nu au primitive exprimabile prin funcții analitice cunoscute și, de obicei, ele se tabelează.

Cu ajutorul acestei integrale, perioada pendulului matematic în regim de oscilații armonice libere, neamortizate, de amplitudine oarecare se poate scrie astfel

$$\tau = 4\sqrt{\frac{R}{g}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = 4\sqrt{\frac{R}{g}} K(k) = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \quad (3.9)$$

Să găsim acum cea de-a doua formă pentru τ, cea exprimabilă ca o serie de puteri. Pentru această să observăm că, excluzând valoarea singulară $\theta_0 = \pi$, avem $|k| < 1$. Atunci, dezvoltând în serie integrandul din (3.9) obținem

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}k^{2n}\sin^{2n}\varphi=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi. \tag{3.10}$$

Într-adevăr, notând $k^2\sin^2\varphi=z$, pentru funcţia $f(z)=\frac{1}{\sqrt{1-z}}$ avem următoarea *dezvoltare în serie Taylor* în jurul punctului $z=z_0$:

$$f(z)=f(z_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=z_0}(z-z_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)_{z=z_0}(z-z_0)^2+\ldots$$

Dacă $z_0=0$, atunci *dezvoltarea în serie* se numeşte de tip *Mac-Laurin* şi se scrie astfel

$$f(z)=f(0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=0}z+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)_{z=0}z^2+\ldots$$

În cazul nostru, $f(0)=1$, $\frac{df}{dz}=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-z)^{3/2}}$, $\frac{d^2f}{dz^2}=\frac{3}{4}\frac{1}{(1-z)^{5/2}}$ etc.

Înlocuind, obţinem

$$f(z)=1+\frac{1}{2}z+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^2+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}z^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}z^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}z^n,$$

ceea ce justifică relaţia (3.10). Deoarece $|k|<1$, seria de puteri (3.10) este uniform şi absolut convergentă pe intervalul $(0,\ \pi)$. Aceasta ne permite să o integrăm termen cu termen (operatorii de integrare şi sumare comută în acest caz, adică integrala seriei este egală cu seria integralelor). Pentru a face acest lucru să deducem mai întâi o formulă utilă, numită *formula lui Wallis*.

BCU "ACADEMICA" UNIVERSITY LIBRARY

Fie în acest sens integralele de forma

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi ,$$

unde n este un număr întreg.

Putem scrie

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi \, d\varphi -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi \, d\varphi = I_{2n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi \, d\varphi$$

şi integrând prin părţi ultimul termen din relaţia de mai sus,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\left(\frac{1}{2n-1}\sin^{2n-1}\varphi\right) = \frac{1}{2n-1}\left[\sin^{2n-1}\varphi\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2n-1}\sin^{2n-1}\varphi\right)\left(-\sin\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi ,$$

avem

$$I_{2n} = I_{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi = I_{2n-2} - \frac{1}{2n-1} I_{2n},$$

de unde rezultă următoarea relaţie de recurenţă:

$$2nI_{2n} = (2n-1)I_{2n-2}.$$

Dând valori lui n de la 1 la n obţinem:

$$n=1; \qquad 2\cdot I_2 = I_0$$

$$n=2; \qquad 4I_4 = 3I_2 = \frac{1\cdot 3}{2} I_0$$

$$n=3; \qquad 6I_6 = 5I_4 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4} I_0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$n=n-1; \qquad 2(n-1)I_{2n-2} = (2n-3)I_{2n-4} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-4)} I_0$$

$$n=n; \qquad 2nI_{2n} = (2n-1)I_{2n-2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-2)} I_0,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde,

$$I_{2n}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot....\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot....\cdot2n}I_0=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot....\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot....\cdot2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot....\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot....\cdot2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

ceea ce reprezintă formula căutată (a lui Wallis).

Ținând cont de aceste rezultate, putem scrie:

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot....\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot....\cdot2n}k^{2n}\sin^{2n}\varphi\right]d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdot....\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot....\cdot2n}k^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}k^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi\right]=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}k^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2k^{2n}\right]\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2k^{2n}\right]\right\}$$

și atunci, pentru perioada pendulului matematic în regim de oscilații armonice libere, neamortizate, cu amplitudine mare (oarecare) se obține expresia

$$\tau=4\sqrt{\frac{R}{g}}K(k)=4\sqrt{\frac{R}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2k^{2n}\right]\right\}=$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2k^{2n}\right]\right\}=T_0\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2k^{2n}\right]\right\}=$$

$$=T_0\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}\right]\right\}. \tag{3.11}$$

Acest rezultat este exact (nu am făcut până aici nici un fel de aproximații). Dacă amplitudinea oscilațiilor satisface relația $\theta_0<\pi/2$,

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

atunci putem dezvolta în serie şi $\sin\frac{\theta_0}{2}$. Folosind binecunoscuta dezvoltare în serie a funcției trigonometrice sinus,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1},$$

avem

$$\sin\frac{\theta_0}{2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^l = \frac{\theta_0}{2^1\cdot 1!} - \frac{\theta_0^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{\theta_0^5}{2^5\cdot 5!} - \frac{\theta_0^7}{2^7\cdot 7!} + \ldots$$

Întrucât de multe ori în practică este suficient să ne oprim la primii trei termeni ai acestei dezvoltări în serie, să determinăm în cele ce urmează coeficienții numerici C_i, $(i = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ ai primilor patru termeni ce apar ca puteri pare ale amplitudinii de oscilație θ_0 din dezvoltarea în serie a lui τ. Primul coeficient este[5] $C_1 = 1$, căci, conform relației (3.11) avem

$$\tau = T_0\left(C_1 + C_2\theta_0^2 + C_3\theta_0^4 + C_4\theta_0^6 + \ldots\right) = T_0\left(1 + C_2\theta_0^2 + C_3\theta_0^4 + C_4\theta_0^6 + \ldots\right) \simeq$$
$$\simeq T_0\left(1 + C_2\theta_0^2 + C_3\theta_0^4 + C_4\theta_0^6\right).$$

Pentru a determina ceilalți trei coeficienți, C_2, C_3 şi C_4 trebuie să observăm că la coeficienții numerici ai diverselor puteri pare ale lui θ_0 contribuie mai mulți termeni ai seriei (3.11), după cum urmează: pentru C_2 contribuie doar termenul corespunzător lui $n = 1$, pentru C_3 termenii corespunzători lui $n = 1$ şi $n = 2$, iar pentru C_4 termenii corespunzători lui $n = 1$, $n = 2$ şi $n = 3$. Astfel, din relația (3.11) avem

$$\tau = T_0\left\{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \frac{225}{2304}\sin^6\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right\} \simeq$$
$$\simeq T_0\left\{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \frac{225}{2304}\sin^6\frac{\theta_0}{2}\right\}. \qquad (3.12)$$

Cum

$$\sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{\theta_0}{2^1\cdot 1!} - \frac{\theta_0^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{\theta_0^5}{2^5\cdot 5!} - \frac{\theta_0^7}{2^7\cdot 7!} + \ldots \simeq \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0^3}{48} + \frac{\theta_0^5}{3840}, \qquad (3.13)$$

putem scrie

[5] Lăsând la o parte factorul $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

$$\sin^2\frac{\theta_0}{2}=\left(\frac{\theta_0}{2^1\cdot 1!}-\frac{\theta_0^3}{2^3\cdot 3!}+\frac{\theta_0^5}{2^5\cdot 5!}-\frac{\theta_0^7}{2^7\cdot 7!}+\ldots\right)^2=\frac{\theta_0^2}{4}+\mathcal{O}\left(\theta_0^4\right). \quad (3.14)$$

Deci, ținând cont de relația (3.12), coeficientul lui θ_0^2 va fi:

$$C_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}.$$

Pentru a-l determina pe C_3 trebuie să utilizăm și expresia lui $\sin^4\frac{\theta_0}{2}$. Din relația (3.13) rezultă:

$$\sin^4\frac{\theta_0}{2}=\left(\frac{\theta_0}{2^1\cdot 1!}-\frac{\theta_0^3}{2^3\cdot 3!}+\frac{\theta_0^5}{2^5\cdot 5!}-\frac{\theta_0^7}{2^7\cdot 7!}+\ldots\right)^4=$$

$$=\left(\frac{\theta_0}{2^1\cdot 1!}-\frac{\theta_0^3}{2^3\cdot 3!}+\frac{\theta_0^5}{2^5\cdot 5!}-\frac{\theta_0^7}{2^7\cdot 7!}+\ldots\right)^2\times$$

$$\times\left(\frac{\theta_0}{2^1\cdot 1!}-\frac{\theta_0^3}{2^3\cdot 3!}+\frac{\theta_0^5}{2^5\cdot 5!}-\frac{\theta_0^7}{2^7\cdot 7!}+\ldots\right)^2=\left(\frac{\theta_0}{2}-\frac{\theta_0^3}{48}+\frac{\theta_0^5}{3840}+\mathcal{O}\left(\theta_0^7\right)\right)^2\times$$

$$\times\left(\frac{\theta_0}{2}-\frac{\theta_0^3}{48}+\frac{\theta_0^5}{3840}+\mathcal{O}\left(\theta_0^7\right)\right)^2=\left(\frac{\theta_0^2}{4}+\frac{\theta_0^6}{2304}-2\frac{\theta_0}{2}\cdot\frac{\theta_0^3}{48}+2\frac{\theta_0}{2}\cdot\frac{\theta_0^5}{3840}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\theta_0^2}{4}+\frac{\theta_0^6}{2304}-2\frac{\theta_0}{2}\cdot\frac{\theta_0^3}{48}+2\frac{\theta_0}{2}\cdot\frac{\theta_0^5}{3840}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right)\right)=\left(\frac{\theta_0^2}{4}-\frac{\theta_0^4}{48}+\frac{\theta_0^6}{1440}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\theta_0^2}{4}-\frac{\theta_0^4}{48}+\frac{\theta_0^6}{1440}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right)\right)=\frac{\theta_0^4}{16}-\frac{\theta_0^6}{96}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right).$$

(3.15)

Scriind (3.14) astfel încât să punem în evidență coeficienții lui θ_0^4 și θ_0^6,

$$\sin^2\frac{\theta_0}{2}=\left(\frac{\theta_0}{2}-\frac{\theta_0^3}{3!\cdot 2^3}+\frac{\theta_0^5}{5!\cdot 2^5}-\frac{\theta_0^7}{7!\cdot 2^7}+\ldots\right)^2=\left(\frac{\theta_0}{2}-\frac{\theta_0^3}{48}+\frac{\theta_0^5}{3840}+\mathcal{O}\left(\theta_0^7\right)\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\theta_0^2}{4}+\frac{\theta_0^6}{2304}-2\frac{\theta_0}{2}\cdot\frac{\theta_0^3}{48}+2\frac{\theta_0}{2}\cdot\frac{\theta_0^5}{3840}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right)\right)=\left(\frac{\theta_0^2}{4}-\frac{\theta_0^4}{48}+\frac{\theta_0^6}{1440}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right)\right)$$

(3.16)

BCU "I. CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

pentru coeficientul C_3 rezultă următoarea valoare:

$$C_3 = \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{48}\right)+\frac{9}{64}\cdot\frac{1}{16}=\frac{11}{3072},$$

unde am avut în vedere că, în acord cu (3.12), coeficienții lui $\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ și $\sin^4\frac{\theta_0}{2}$ sunt $\frac{1}{4}$ și respectiv $\frac{9}{64}$.

În sfârșit, pentru a-l determina pe C_4 va trebui să considerăm și contribuția lui $\sin^6\frac{\theta_0}{2}$ la termenul în θ_0^6:

$$\sin^6\frac{\theta_0}{2}=\left(\frac{\theta_0^2}{4}-\frac{\theta_0^4}{48}+\frac{\theta_0^6}{1440}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right)\right)^3=\left(\frac{\theta_0^2}{4}-\frac{\theta_0^4}{48}+\frac{\theta_0^6}{1440}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right)\right)^2\times$$
$$\times\left(\frac{\theta_0^2}{4}-\frac{\theta_0^4}{48}+\frac{\theta_0^6}{1440}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right)\right)=\left(\frac{\theta_0^4}{16}-\frac{\theta_0^6}{96}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\theta_0^2}{4}-\frac{\theta_0^4}{48}+\frac{\theta_0^6}{1440}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right)\right)=\frac{\theta_0^6}{64}+\mathcal{O}\left(\theta_0^8\right). \tag{3.17}$$

Atunci, ținând cont de (3.12), (3.16), (3.15) și (3.17), pentru C_4 rezultă valoarea:

$$C_4=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1440}+\frac{9}{64}\cdot\left(-\frac{1}{96}\right)+\frac{225}{2304}\cdot\frac{1}{64}=\frac{173}{737280}.$$

Așadar, pentru $\theta_0<\frac{\pi}{2}$ putem scrie că:

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\frac{11}{3072}\theta_0^4+\frac{173}{737280}\theta_0^6+\ldots\right)\simeq$$
$$\simeq 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\frac{11}{3072}\theta_0^4+\frac{173}{737280}\theta_0^6\right). \tag{3.18}$$

Dacă amplitudinea oscilațiilor este mică $\left(\theta_0<5^\circ\right)$ termenii care conțin θ_0^2, θ_0^4 etc. sunt neglijabili în raport cu unitatea și se reobține binecunoscuta formulă (aproximativă) a perioadei oscilațiilor izocrone,

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI
F I Z I C Ă

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{3.19}$$

Această formulă este utilizată în construcţia ceasornicelor astronomice, pentru care $\theta_0 = 1°30'$.

În ceea ce priveşte forţa de legătură (tensiunea din tijă), $\vec{T}$, trebuie precizat faptul că în cadrul acestui formalism ea trebuie cunoscută de la bun început (măcar ca direcţie şi sens), căci altfel problema nu poate fi rezolvată (această forţă trebuie utilizată pentru scrierea expresiei matematice a principiului fundamental al mecanicii, care stă la baza formalismului clasic-newtonian). Aceste două caracteristici ale lui $\vec{T}$ (direcţia şi sensul) rezultă din Fig. III.1, iar modulul poate fi determinat utilizând relaţiile (3.1), (3.3) şi (3.7) astfel:

Din a doua relaţie (3.1) rezultă:

$$\left|\vec{T}\right| = T = -\frac{m\ddot{y}}{\sin\theta} = -\frac{m\left(R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta\right)}{\sin\theta},$$

în care, dacă ţinem cont de (3.3) şi (3.7) găsim:

$$T = -\frac{m\left(R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta\right)}{\sin\theta} =$$

$$= -\frac{m\left\{R\left(-\frac{g}{R}\sin\theta\right)\cos\theta - R\left[\frac{2g}{R}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)\right]\sin\theta\right\}}{\sin\theta} = \tag{3.20}$$

$$= mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right).$$

Cu aceasta, problema este rezolvată în cadrul formalismului clasic-newtonian. Să abordăm acum aceeaşi problemă utilizând formalismul ecuaţiilor Lagrange de speţa I.

III.2. Formalismul ecuaţiilor Lagrange de speţa I

În cadrul acestui formalism problema se enunţă astfel: date fiind masa corpului, forţele aplicate corpului, ecuaţiile analitice ale legăturilor şi condiţiile iniţiale compatibile cu legăturile, să se afle legea de mişcare a

corpului, forţele de legătură şi eventual elementele mişcării (traiectoria, perioada mişcării etc.).

După cum putem observa, în cadrul acestui formalism (ca şi în toate celelalte din cadrul mecanicii analitice) nu este necesară cunoaşterea *a priori* a forţelor de legătură, acestea apărând aici ca necunoscute ale problemei, determinându-se *a posteriori*. De altfel, acesta este şi principalul avantaj al formalismelor mecanicii analitice. În cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa I, cunoaşterea forţelor de legătură este înlocuită de cunoaşterea expresiilor analitice ale legăturilor (date ori sub formă explicită, ori sub formă implicită). De cele mai multe ori forţele de legătură nu sunt cunoscute de la început şi determinarea lor este adesea deosebit de dificilă. În cazurile în care aceste forţe nu pot fi cunoscute încă de la bun început, formalismul clasic (newtonian) nu poate furniza soluţia problemei. Singura rezolvare nu poate veni decât dinspre unul din formalismele mecanicii analitice.

În cele ce urmează, vom rezolva această problemă în cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa I. Algoritmul de rezolvare a unei probleme în cadrul acestui formalism este următorul:

i) identificarea forţelor aplicate $\vec{F}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$, unde N reprezintă numărul de corpuri (puncte materiale) din sistem şi exprimarea lor pe componente în raport cu un referenţial (sau mai multe) ales(e) în mod convenabil;

ii) stabilirea condiţiilor iniţiale compatibile cu legăturile $\vec{r}_{i0}=\vec{r}_i(t_0)$ şi $\dot{\vec{r}}_{i0}=\dot{\vec{r}}_i(t_0)$;

iii) identificarea legăturilor şi determinarea expresiilor analitice ale acestora, $f_k\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; t\right)=0$, $\left(k=\overline{1,s}\right)$, unde s reprezintă numărul de legături;

iv) scrierea şi rezolvarea sistemului de $3N+s$ ecuaţii (cele $3N$ ecuaţii de speţa I ale lui Lagrange, $m_i\ddot{\vec{r}}_i=\vec{F}_i+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k grad_i f_k$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ şi cele s expresii ale legăturilor) cu cele $3N+s$ necunoscute (cele $3N$ coordonate $x_i=x_i(t)$, $y_i=y_i(t)$ şi $z_i=z_i(t)$ şi cele s constante nenule λ_k, $k=\overline{1,s}$);

v) determinarea forţelor de legătură $\vec{L}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ utilizând relaţiile lor de definiţie, $\vec{L}_i=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k grad_i f_k$.

Înainte de a „aplica" acest algoritm în cazul problemei de faţă precizăm că formalismul ecuaţiilor Lagrange de speţa I este valabil doar pentru legăturile ideale. Evident, această situaţie este extrem de restrictivă, ea fiind o idealizare care nu îşi are corespondent în realitate. Totuşi, în măsura în care forţele de frecare sunt cunoscute[6], acestea pot fi considerate ca şi forţe aplicate şi adăugate acestora din urmă.

Faţă de sistemul de referinţă ales ca la început (pentru formalismul newtonian), singura forţă aplicată (forţa de greutate) are următoarele componente,

$$\vec{G}=\left(mg,\ 0,\ 0\right),$$

iar condiţiile iniţiale sunt, evident, aceleaşi cu cele din cazul formalismului clasic (newtonian),

$$\vec{r}_0=\left(x_0,\ y_0,\ 0\right)=\left(R\cos\theta_0,\ R\sin\theta_0,\ 0\right)$$

şi

$$\dot{\vec{r}}_0=0.$$

Fără a restrânge deloc generalitatea problemei am considerat că mişcarea are loc în planul xOy (sau, echivalent, în planul $z=0$).

Corpul de masă m este supus la două legături, şi anume:

$$f_1\left(x,\ y\right)=x^2+y^2-R^2=0, \qquad (3.21\ a)$$

---

[6] De obicei forţele de frecare se determină pe cale empirică. De exemplu, în cazul mişcării relative de translaţie a două corpuri, se determină pe cale experimentală că forţa de frecare este proporţională cu reacţiunea normală, $\vec{F}_f=\mu\vec{N}$, coeficientul de proporţionalitate μ fiind numit *coeficient de frecare* (static sau la alunecare). În cazul deplasării unui corp într-un fluid vâscos, tot pe cale experimentală se găseşte că forţa de frecare la viteze mici (în regim laminar) este proporţională cu puterea întâi a vitezei relative de mişcare a corpului faţă de mediu, $\vec{F}_f=-k\,\vec{v}_r$, unde k este un coeficient care depinde de vâscozitatea fluidului în care are loc mişcarea şi de forma secţiunii transversale a corpului, iar la viteze mari (regim turbulent sau de tranziţie) aceeaşi forţă este proporţională cu pătratul vitezei relative, $\vec{F}_f=-k\left|\vec{v}_r\right|^2\hat{v}$, în care $\hat{v}$ este versorul direcţiei de mişcare a corpului, iar k este o „constantă" ce depinde de densitatea mediului în care are loc mişcarea, de aria secţiunii transversale a corpului şi de un aşa-numit *coeficient de formă* al corpului (notat de obicei cu C_x şi strâns legat de calităţile „aerodinamice" ale corpului).

BCU CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

şi

$$f_2(z) = z = 0. \tag{3.21 b}$$

Deoarece sistemul în discuţie conţine doar un singur punct material, indicele i nu-şi mai află rostul, iar sistemul de ecuaţii care conduce la legea de mişcare a corpului de masă m este

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = \vec{G} + \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \, grad\, f_k, \\ f_1(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ f_2(z) = z = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Expresiile gradienţilor celor două funcţii f_k, $(k = 1, 2)$ care exprimă legăturile sunt

$$grad\, f_1 = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} \tag{3.23 a}$$

şi respectiv

$$grad\, f_2 = 0 \tag{3.23 b}$$

şi atunci, notând λ_1 simplu cu λ, sistemul (3.22) devine:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg + 2\lambda x, \\ m\ddot{y} = 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \tag{3.24}$$

care este un sistem de patru ecuaţii cu tot atâtea necunoscute (x, y, z, λ).

Relaţia (3.24 c) permite parametrizarea legăturii $f_1(x, y)$ sub forma:

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = R\sin\theta, \end{cases}$$

şi atunci, primele două ecuaţii ale sistemului (3.24) pot fi rescrise astfel:

$$\begin{cases} m\left(-R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta\right) = mg + 2\lambda R\cos\theta, \\ m\left(R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = 2\lambda R\sin\theta. \end{cases} \tag{3.25}$$

În acest fel problema este simplificată, întrucât totul revine acum la a rezolva un sistem de două ecuaţii diferenţiale cu două necunoscute:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

funcţia $\theta = \theta(t)$ şi scalarul nenul λ. Trecând termenul mg din membrul drept al primei ecuaţii din (3.25) în membrul stâng şi împărţind apoi cele două ecuaţii, obţinem:

$$\frac{-R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta - g}{R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

de unde rezultă o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea pentru θ:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0, \qquad (3.3')$$

care coincide cu ecuaţia (3.3) obţinută în cadrul formalismului clasic-newtonian.

De aici încolo, rezolvarea problemei urmează exact aceeaşi cale ca în cadrul primului formalism (newtonian). Singura diferenţă este modalitatea de determinare a forţei de legătură, $\vec{L}$, care aici nu este cunoscută – iniţial – nici măcar ca direcţie şi sens (şi, cu atât mai mult, ca mărime/modul). Aceasta se poate determina din relaţia ei de definiţie,

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \, grad\, f_k = \lambda_1 grad\, f_1 + \lambda_2 grad\, f_2 = \lambda grad\, f_1 =$$

$$= 2\lambda x\,\vec{i} + 2\lambda y\,\vec{j} = 2\lambda R\left(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta\right).$$

Modulul acestei forţe (de legătură) este

$$\left|\vec{L}\right| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \equiv L = \sqrt{4\lambda^2 R^2\cos^2\theta + 4\lambda^2 R^2\sin^2\theta} = 2\lambda R, \qquad (3.26)$$

unde λ poate fi determinat din relaţia (3.25 b),

$$\lambda = \frac{m\left(R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta\right)}{2R\sin\theta} =$$

$$= \frac{m\left\{R\left(-\frac{g}{R}\sin\theta\right)\cos\theta - R\left[\frac{2g}{R}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)\right]\sin\theta\right\}}{2R\sin\theta} =$$

$$= \frac{mg\left(2\cos\theta_0 - 3\cos\theta\right)}{2R},$$

în care am utilizat relaţiile (3.3') şi (3.7). Aşadar, pentru mărimea forţei de legătură rezultă valoarea

$$L = 2\lambda R = mg\left(2\cos\theta_0 - 3\cos\theta\right), \qquad (3.27)$$

expresie care, până la o diferenţă de semn (care va fi explicată mult mai uşor şi cu un grad sporit de evidenţă în cadrul formalismului următor, cel

al ecuațiilor Lagrange de speța a II-a) coincide cu cea a lui $|\bar{T}| = T$ dată de relația (3.20). Rezultatul este corect, deoarece nu putem spune că am obținut pentru o aceeași mărime (modulul forței de legătură) două valori diferite, prin două procedee diferite, întrucât $|L| = |T|$. Acest lucru reiese imediat, având în vedere că, în mod riguros matematic, relația (3.26) se scrie astfel:

$$|\bar{L}| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \equiv L = \sqrt{4\lambda^2 R^2 \cos^2\theta + 4\lambda^2 R^2 \sin^2\theta} =$$
$$= |2\lambda R|,$$

ceea ce conduce la relația evidentă,

$$|L| = mg|2\cos\theta_0 - 3\cos\theta| = mg|3\cos\theta - 2\cos\theta_0| = |T|,$$

adică, exprimată în N (newtoni) forța de legătură are o *aceeași valoare numerică*. Diferența de semn apare datorită faptului că vectorii $\bar{T}$ și $\bar{L}$ au sensuri opuse (gradientul, având direcția și sensul normalei exterioare la curba ce reprezintă legătura (traiectoria), este opus ca sens vectorului $\bar{T}$ așa cum a fost el considerat, adică având sensul normalei interioare la traiectorie (înspre centrul de curbură) – vezi Fig. III.1).

III.3. Formalismul ecuațiilor Lagrange de speța a II-a

În cadrul acestui formalism, problema se enunță la fel ca în cazul precedent, diferențe apărând doar în ceea ce privește modul concret de rezolvare a problemei. O diferență notabilă, chiar și față de formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I, este faptul că, în acest caz (ca și pentru formalismele care vor urma) nu este nevoie să cunoaștem în mod concret nici forțele de legătură (ce nu era nevoie să fie cunoscute nici în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I), dar nici măcar expresiile analitice ale legăturilor (lucru esențial totuși pentru formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I), ci doar *numărul* acestor legături. Astfel, în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a (formalism bazat – așa după cum îi spune și numele – pe ecuațiile Lagrange de speța a II-a), algoritmul de rezolvare a unei probleme oarecare este următorul:

BCU "CAROL I" UNIVERSITY LIBRARY

i) identificarea forțelor aplicate $\vec{F}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$, unde N reprezintă numărul de corpuri (puncte materiale) din sistem;

ii) stabilirea condițiilor inițiale (compatibile cu legăturile) în spațiul real, $\vec{r}_{i0}=\vec{r}_i(t_0)$ și $\dot{\vec{r}}_{i0}=\dot{\vec{r}}_i(t_0)$;

iii) identificarea legăturilor (aici este esențial numărul s al acestora și mai puțin expresiile lor analitice), a numărului gradelor de libertate efective ale sistemului, $n=3N-s$ și alegerea convenabilă a coordonatelor generalizate, $q_j=q_j(t)$, $j=\overline{1,n}$;

iv) stabilirea „relațiilor de legătură" între spațiul real și spațiul configurațiilor, $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n; t)\equiv\vec{r}_i(q; t)$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$, inversarea lor, $q_j=q_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; t)\equiv q_j(\vec{r}; t)$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$ și determinarea condițiilor inițiale în spațiul configurațiilor, $q_{j0}=q_j(t_0)$, $\dot{q}_{j0}=\dot{q}_j(t_0)$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$;

v) determinarea, după caz, a energiei cinetice $T=T\left(q, \dot{q}, t\right)$ și a forțelor generalizate $Q_j=Q_j\left(q, \dot{q}, t\right)$ – în cazul sistemelor pentru care nu poate fi definit un potențial, sau a funcției Lagrange $L\left(q, \dot{q}, t\right)=T\left(q, \dot{q}, t\right)-V\left(q, \dot{q}, t\right)$ – pentru sistemele naturale[7];

vi) scrierea și rezolvarea ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$, determinând astfel, cu ajutorul condițiilor inițiale din spațiul configurațiilor, legea de mișcare în acest spațiu, $q_j=q_j(t)$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$, care reprezintă totodată ecuațiile parametrice ale traiectoriei generalizate a mișcării în spațiul configurațiilor;

vii) determinarea legii de mișcare în spațiul real, $\vec{r}_i=\vec{r}_i\left(q_j(t); t\right)\equiv\vec{r}_i(t)$, $\left(i=\overline{1,N};\ j=\overline{1,n}\right)$;

[7] Un sistem mecanic se numește *natural* dacă pentru el poate fi definit un potențial (simplu sau generalizat).

BUMC CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

viii) aflarea forțelor de legătură din expresia matematică a principiului fundamental al dinamicii pentru sistemele cu legături,

$$\vec{L}_i = m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \quad \left(i = \overline{1,N}\right).$$

În continuare, vom utiliza acest algoritm pentru a rezolva problema pendulului matematic în regim de oscilații armonice libere, neamortizate, pentru o valoare arbitrară a amplitudinii de oscilație.

Singura forță aplicată sistemului este forța de greutate, $\vec{G} = (mg,\ 0,\ 0)$, ale cărei componente au fost exprimate în raport cu sistemul de referință xOy din Fig. III.4.

Condițiile inițiale în spațiul real al mișcării sunt, evident, aceleași cu cele din cazul formalismelor anterioare (clasic-newtonian și cel al ecuațiilor Lagrange de speța I),

$$\vec{r}_0 = (x_0,\ y_0,\ 0) = (R\cos\theta_0,\ R\sin\theta_0,\ 0)$$

și

$$\dot{\vec{r}}_0 = 0,$$

unde, fără a restrânge generalitatea problemei cu nimic, am considerat că mișcarea are loc în planul $z = 0$.

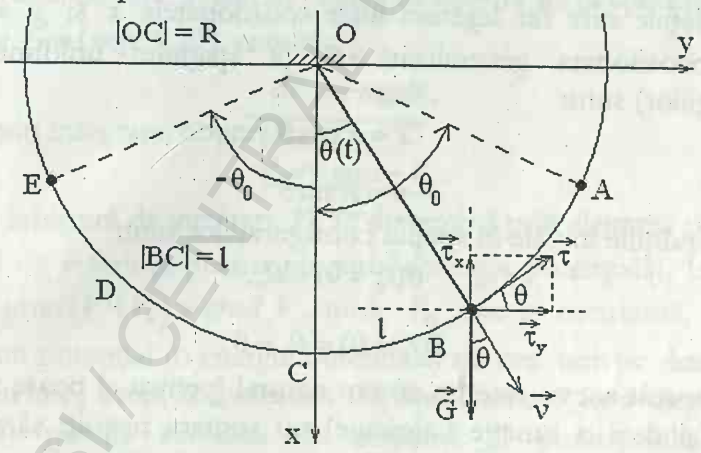


Fig. III.4

Mișcarea este afectată de două legături (cele deja precizate în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I), astfel că sistemul are doar un singur grad de libertate, $n = 3N - s = 3\cdot 1 - 2 = 1$. Acestui grad de

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

libertate i se asociază o coordonată generalizată a cărei alegere nu este unică. De exemplu, ca şi coordonată generalizată putem considera coordonata x a corpului, sau coordonata y, sau lungimea de arc l (măsurată de-a lungul traiectoriei în raport cu un punct de referinţă arbitrar (dar convenabil) ales, de exemplu în raport cu punctul C), sau, în fine, unghiul θ dintre axa Ox şi tijă. În cazul general, alegerea coordonatelor generalizate depinde de experienţa (celui care studiază problema) în rezolvarea problemelor de mecanică analitică, de „fler", de intuiţie şi, în principiu, trebuie să ţină seama de simetria şi particularităţile sistemului, astfel încât coordonatele generalizate alese să conducă la ecuaţii Lagrange de speţa a II-a cât mai uşor de rezolvat. Oricum, totdeauna este posibilă o transformare „punctuală" în spaţiul configuraţiilor, care permite alegerea unui alt set de coordonate generalizate în locul celui iniţial, $q_j \to q_j' = q_j'(q_1, q_2, ..., q_n; t)$, $\left(j = \overline{1,n}\right)$, dacă în primele coordonate rezolvarea ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a se dovedeşte a fi dificilă sau chiar imposibilă (din punct de vedere analitic).

Aşadar, ca şi coordonată generalizată asociată unicului grad de libertate al corpului, vom alege coordonata unghiulară θ.

Relaţiile care fac legătura între coordonatele x şi y ale spaţiului real şi coordonata generalizată θ (a spaţiului unidimensional al configuraţiilor) sunt:

$$x = R\cos\theta,$$

$$y = R\sin\theta.$$

Condiţiile iniţiale în spaţiul configuraţiilor sunt:

$$\theta(t_0 = 0) = \theta_0,$$

$$\dot{\theta}(t_0 = 0) = \dot{\theta}_0 = 0.$$

Întrucât acesta este un sistem natural (pentru el poate fi definit un potenţial şi deci o funcţie Lagrange) nu suntem nevoiţi să recurgem la varianta mai complicată a ecuaţiilor Lagrange în formularea cu energia cinetică $T = T(q, \dot{q}, t)$ şi forţele generalizate $Q_j = Q_j(q, \dot{q}, t)$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{3.28}$$

BCU IAŞI CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

unde $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ sunt forțele generalizate, ci vom face uz de ecuațiile Lagrange de speța a II-a în formularea cu funcția Lagrange $L = T - V$, unde potențialul V (care, de la caz la caz, poate fi un potențial simplu, $V = V(\vec{r}_i, t)$, unul generalizat (sau depinzând de viteze), $V = V(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$, sau chiar o energie potențială, $V = V(\vec{r}_i)$), în această situație este chiar energia potențială a corpului. Totuși, pentru a indica metoda generală de calcul, nu vom scrie direct expresia lui V, ci o vom deduce conform „rețetei standard": după cum știm, sistemele naturale sunt acelea pentru care poate fi definit un potențial, adică acele sisteme pentru care forțele aplicate sunt forțe potențiale (forțe care derivă dintr-un potențial),

$$\vec{F}_i = -grad_i\, V(\vec{r}_i, t) \overset{formal}{=} -\frac{dV}{d\vec{r}_i}.$$

Atunci, diferențiala potențialului este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor aplicate sistemului, luat cu semn schimbat,

$$dV = -\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i.$$

În cazul de față, având în vedere că singura forță aplicată este forța de greutate $\vec{G} = (mg,\ 0,\ 0)$, rezultă:

$$dV = -mgdx,$$

de unde, prin integrare, obținem:

$$V = -mgx + V_0.$$

Constanta arbitrară de integrare V_0 se determină prin alegerea convenabilă a nivelului de referință pentru potențial (energia potențială). Într-adevăr, deoarece $grad(V + V_0) = grad\, V$, unde V_0 este o constantă, rezultă că niciodată un potențial (o energie potențială) nu este univoc determinat(ă). Cu alte cuvinte, avem întotdeauna deplina libertate în a alege (în mod convenabil) poziția nivelului de referință al potențialului (energiei potențiale). De obicei, constanta V_0 (și implicit poziția nivelului de referință pentru energia potențială) se alege astfel încât expresia matematică a funcției care exprimă acest potențial (energie potențială) să fie cea mai simplă cu putință. În cazul de față, dacă luăm:

$$V(x = 0) = 0,$$

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică dacă vom considera nivelul de referinţă pentru energia potenţială în planul yOz, sau, echivalent, $x=0$, atunci $V_0=0$ şi energia potenţială se va scrie

$$V=V(x)=-mgx. \tag{3.29}$$

Cum $x=R\cos\theta$, rezultă că expresia potenţialului V în coordonata generalizată θ este

$$V(\theta)=-mgR\cos\theta.$$

Energia cinetică a corpului va fi (conform definiţiei generale, $T=\frac{1}{2}m_i\left|\dot{\vec{r}}_i\right|^2=\frac{1}{2}m\,\dot{x}_i\dot{x}_i=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)$):

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2, \tag{3.30}$$

iar pentru funcţia Lagrange a sistemului obţinem expresia:

$$L=\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2+mgR\cos\theta. \tag{3.31}$$

Ecuaţia Lagrange de speţa a II-a pentru sistemul analizat este

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0. \tag{3.32}$$

Din relaţia (3.31) rezultă că $\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mR^2\dot{\theta}$ şi atunci $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\theta}\right)=$

$=mR^2\ddot{\theta}$, iar $\frac{\partial L}{\partial\theta}=-mgR\sin\theta$. Aşadar, ecuaţia Lagrange devine

$$mR^2\ddot{\theta}+mgR\sin\theta=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ddot{\theta}+\frac{g}{R}\sin\theta=0, \tag{3.33}$$

adică aceeaşi ecuaţie diferenţială pentru variabila unghiulară θ ca şi cea obţinută prin metodele specifice celorlalte două formalisme analizate anterior.

De aici încolo rezolvarea problemei se face în mod identic ca şi prin formalismul clasic sau cel al ecuaţiilor Lagrange de speţa I, singura deosebire apărând în ceea ce priveşte determinarea forţei de legătură, care, în cadrul acestui formalism rezultă din expresia matematică a principiului fundamental al dinamicii sistemelor cu legături,

$$\vec{L}_i=m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i,\quad \left(i=\overline{1,N}\right). \tag{3.34}$$

BCU IAŞI CONTRACT UNIVERSITY LIBRARY

Înainte de a determina forţa de legătură, facem observaţia că, pentru a-l determina pe $\dot{\theta}$ în acest caz[8] nu mai suntem nevoiţi să apelăm la artificiul matematic utilizat în cadrul formalismului clasic-newtonian pentru exprimarea lui $\ddot{\theta}$ ca derivata totală în raport cu θ a lui $\dot{\theta}^2/2$, $\dot{\theta}$ putând fi obţinut prin intermediul unui element specific formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a, anume, cu ajutorul unei integrale prime a ecuaţiei Lagrange (3.32). Într-adevăr, deoarece timpul nu apare explicit în expresia funcţiei Lagrange (3.31), rezultă că ecuaţia (3.32) admite integrala primă

$$\dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = const.,$$

care este forma particulară (pentru cazul sistemului fizic analizat) a integralei prime

$$\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = const., \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

a ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, $\left(j = \overline{1,n}\right)$, în cazul în care lagrangeanul sistemului nu depinde explicit de timp, şi care, după cum ştim, în cazul legăturilor scleronome, exprimă energia totală a sistemului (care se conservă).

Cum $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$, integrala primă $\dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = const.$ se va scrie astfel:

$$\dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta =$$

$$= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta = const. = E,$$

unde E reprezintă energia totală a sistemului. Constanta din relaţia de mai sus (care este chiar energia totală E) se poate determina utilizând condiţiile iniţiale, $\theta(t_0 = 0) = \theta_0$ şi $\dot{\theta}(t_0 = 0) = \dot{\theta}_0 = 0$. Rezultă:

$$const. = E = -mgR\cos\theta_0$$

şi atunci integrala primă devine

[8] În cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta = -mgR\cos\theta_0,$$

de unde,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

ceea ce conduce la expresia lui $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad (q.e.d).$$

În cazul general, pentru rezolvarea unei probleme oarecare[9], se poate apela și la cel de-al doilea tip de integrale prime a ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, anume, acela corespunzător variabilelor ciclice: dacă funcția lui Lagrange nu depinde explicit de o anume coordonată generalizată (coordonată care, în această situație, se numește *ciclică*), atunci impulsul generalizat corespunzător acelei variabile ciclice se conservă. Într-adevăr, să presupunem că q_α este o coordonată generalizată care satisface această condiție (este variabilă ciclică). Atunci, evident

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

și, utilizând ecuația Lagrange pentru q_α, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$, rezultă că $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = 0$, ceea ce implică

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha = const.,$$

unde, prin definiție, $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ este impulsul generalizat corespunzător coordonatei generalizate q_α.

Revenind la determinarea forței de legătură, să observăm că, întrucât în acest caz $N = 1$, indicele i din relația (3.34) nu-și mai are rostul, și, de aceea, pentru problema de față avem

$$\vec{L} = m\ddot{\vec{r}} - \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} - \vec{G}. \qquad (3.35)$$

[9] Nu este cazul problemei de față.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Spre deosebire de formalismul ecuațiilor Lagrange de speța I, unde am determinat mai întâi proiecțiile forței de legătură pe axele de coordonate, acum ne vom raporta la un sistem de axe ortogonale strâns legat de traiectoria corpului, având una din axe tangentă la traiectorie și cu sensul dat de creșterea variabilei unghiulare θ (axă al cărei versor l-am notat cu $\vec{\tau}$ – vezi Fig. III.4) iar cea de-a doua axă, normală la traiectorie în punctul curent, având sensul dat de normala exterioară la curba ce reprezintă traiectoria (axă al cărei versor este notat în Fig. III.4 cu $\vec{\nu}$).

Componentele forței de legătură $\vec{L}$ pe cele două direcții (de versori $\vec{\tau}$ și $\vec{\nu}$) sunt

$$L_\tau = \vec{L}\cdot\vec{\tau} \tag{3.36}$$

și

$$L_\nu = \vec{L}\cdot\vec{\nu}\,. \tag{3.37}$$

Pentru a determina proiecțiile L_τ și L_ν ale lui $\vec{L}$ pe cele două direcții, vom scrie mai întâi expresiile versorilor $\vec{\tau}$ și $\vec{\nu}$ față de sistemul de referință xOy. Pentru aceasta vom utiliza Fig. III.4, din care rezultă că

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_x + \vec{\tau}_y = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$$

și

$$\vec{\nu} = \vec{\nu}_x + \vec{\nu}_y = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta\,.$$

Din relația (3.35) avem:

$$\vec{L} = \left(m\ddot{x} - mg,\ m\ddot{y},\ 0\right)$$

iar L_τ și L_ν devin

$$L_\tau = \vec{L}\cdot\vec{\tau} = \left[\left(m\ddot{x} - mg\right)\vec{i} + m\ddot{y}\,\vec{j}\right]\cdot\left(-\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta\right) =$$
$$= m\left(g - \ddot{x}\right)\sin\theta + m\ddot{y}\cos\theta,$$

și

$$L_\nu = \vec{L}\cdot\vec{\nu} = \left[\left(m\ddot{x} - mg\right)\vec{i} + m\ddot{y}\,\vec{j}\right]\cdot\left(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta\right) =$$
$$= m\left(\ddot{x} - g\right)\cos\theta + m\ddot{y}\sin\theta.$$

Având în vedere că

$$\ddot{x} = -R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta$$

și

$$\ddot{y} = R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta\,,$$

în care

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

şi

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta,$$

pentru L_τ avem

$$L_\tau = m\left(g + R\ddot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\sin\theta + mR\ddot{\theta}\cos^2\theta -$$

$$-mR\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = mg\sin\theta + mR\ddot{\theta}\sin^2\theta + mR\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta +$$

$$+mR\ddot{\theta}\cos^2\theta - mR\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = mg\sin\theta + mR\ddot{\theta} = mR\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta\right) = 0, \tag{3.38}$$

ceea ce era de aşteptat, ţinând cont de faptul că legătura este ideală (forţa de frecare, dată de componenta tangenţială a forţei de legătură, trebuie să fie nulă).

Pentru proiecţia pe direcţia normalei la traiectorie a forţei de legătură, L_ν, avem

$$L_\nu = -m\left(R\ddot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta + g\right)\cos\theta + mR\ddot{\theta}\sin\theta\cos\theta - mR\dot{\theta}^2\sin^2\theta =$$

$$= -mg\cos\theta - mR\ddot{\theta}\left(\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta\right) - mR\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) =$$

$$= -mg\cos\theta - 2mg\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) = mg\left(2\cos\theta_0 - 3\cos\theta\right), \tag{3.39}$$

de unde, pentru modulul forţei de legătură, $L = \left|\vec{L}\right|$, obţinem:

$$L \equiv \left|L_\nu\right| = mg\left|2\cos\theta_0 - 3\cos\theta\right|. \tag{3.40}$$

Se observă că în cadrul acestui formalism am obţinut exact aceeaşi valoare pentru forţa de legătură ca şi în cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa I, adică o valoare opusă ca semn celeia determinată prin formalismul clasic-newtonian. Diferenţa de semn apare acum foarte evidentă, ea datorându-se faptului că vectorii $\vec{T}$ (tensiunea din tijă – vezi Fig. III.1) şi $\vec{\nu}$ (normala exterioară la traiectorie – vezi Fig. III.4) au sensuri opuse.

Cu aceasta problema este complet rezolvată şi în continuare o vom aborda în cadrul unui nou formalism, cel hamiltonian.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

III.4. Formalismul ecuațiilor canonice ale lui Hamilton

În cadrul acestui formalism enunțul problemei este același cu cel din cazul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I (sau de speța a II-a). Pentru a rezolva o problemă oarecare prin formalismul hamiltonian (formalism care are la bază sistemul de ecuații canonice ale lui Hamilton), se poate utiliza următorul algoritm:

i) identificarea forțelor aplicate $\vec{F}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$, unde N reprezintă numărul de corpuri (puncte materiale) din sistem și exprimarea lor pe componente în raport cu un referențial (sau mai multe) ales(e) în mod convenabil;

ii) stabilirea condițiilor inițiale (compatibile cu legăturile) în spațiul real, $\vec{r}_{i0}=\vec{r}_i(t_0)$ și $\dot{\vec{r}}_{i0}=\dot{\vec{r}}_i(t_0)$;

iii) identificarea numărului gradelor de libertate ale sistemului fizic studiat, $n=3N-s$ și alegerea convenabilă a coordonatelor generalizate, $q_j=q_j(t)$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$;

iv) stabilirea „relațiilor de legătură" între spațiul real și spațiul configurațiilor, $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1,\ q_2,\ ...,\ q_n;\ t)\equiv\vec{r}_i(q;\ t)$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$;

v) determinarea funcției lui Lagrange $L=L\left(q,\ \dot{q},\ t\right)$ a sistemului și a impulsurilor generalizate, canonic conjugate cu coordonatele generalizate, $p_j=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$;

vi) inversarea relațiilor $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1,\ q_2,\ ...,\ q_n;\ t)\equiv\vec{r}_i(q;\ t)$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$ pentru a determina coordonatele generalizate ca funcții de coordonatele spațiului real, $q_j=q_j(\vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ ...,\ \vec{r}_N;\ t)\equiv q_j(\vec{r};\ t)$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$ și stabilirea condițiilor inițiale în spațiul fazelor, $q_{j0}=q_j(t_0)$, $p_{j0}=p_j(t_0)$, $j=\overline{1,n}$;

vii) determinarea funcției lui Hamilton (hamiltonianul sistemului) utilizând relația de definiție: $H=p_j\dot{q}_j-L=H\left(q,\ p,\ t\right)$;

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

viii) scrierea și rezolvarea sistemului de ecuații canonice ale lui Hamilton,

$$\begin{cases} \dot{q}_j = +\dfrac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j}, \end{cases} \tag{3.41}$$

ceea ce conduce la legea de mișcare a sistemului în spațiul fazelor, $q_j = q_j(t)$, $p_j = p_j(t)$, $\left(j = \overline{1,n}\right)$ (care reprezintă totodată și ecuațiile parametrice ale traiectoriei generalizate a sistemului în spațiul fazelor);

ix) determinarea legii de mișcare în spațiul real, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$;

x) determinarea forțelor de legătură, $\vec{L}_i = m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$.

În continuare vom utiliza acest algoritm pentru a rezolva problema pendulului gravitațional în regim de oscilații armonice libere, neamortizate, pentru o valoare arbitrară a amplitudinii de oscilație θ_0.

Singura forță aplicată sistemului este forța de greutate, $\vec{G} = (mg,\ 0,\ 0)$, ale cărei componente au fost exprimate în raport cu sistemul de referință xOy din Fig. III.4.

Condițiile inițiale sunt, evident, aceleași cu cele din cazul formalismelor anterioare (clasic-newtonian, cel al ecuațiilor Lagrange de speța I și speța a II-a),

$$\vec{r}_0 = (x_0,\ y_0,\ 0) = (R\cos\theta_0,\ R\sin\theta_0,\ 0)$$

și

$$\dot{\vec{r}}_0 = 0,$$

unde, fără a restrânge în vreun fel generalitatea problemei, am considerat că mișcarea are loc în planul $z = 0$.

Mișcarea este afectată de două legături (cele deja precizate în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța I), astfel că sistemul are doar un singur grad de libertate, $n = 3N - s = 3\cdot 1 - 2 = 1$. Ca și coordonată generalizată asociată unicului grad de libertate al corpului, vom alege coordonata unghiulară θ (la fel ca în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a).

BCU "ALEXANDRU IOAN CUZA" IAȘI LIBRARY

Relațiile care fac legătura între coordonatele x și y ale spațiului real și coordonata generalizată θ (a spațiului unidimensional al configurațiilor) sunt

$$x = R\cos\theta,$$

$$y = R\sin\theta.$$

Determinarea funcției Lagrange (a lagrangeanului sistemului) se face la fel ca în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, obținându-se următoarea expresie:

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta.$$

Impulsul generalizat canonic conjugat coordonatei generalizate θ va fi

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}. \tag{3.42}$$

În acest caz, spațiul fazelor este unul bidimensional, un punct oarecare al acestui spațiu având două coordonate, (θ, p_θ). Condițiile inițiale în spațiul fazelor vor fi

$$\theta(t_0 = 0) = \theta_0,$$

$$p_\theta(t_0 = 0) = (p_\theta)_0 = mR^2\dot{\theta}(t_0 = 0) = 0,$$

iar hamiltonianul sistemului este

$$H = p_\theta\dot{\theta} - L = p_\theta\frac{p_\theta}{mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\frac{p_\theta^2}{m^2R^4} - mgR\cos\theta = \\ = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2} - mgR\cos\theta = H(\theta, p_\theta). \tag{3.43}$$

Sistemul de ecuații canonice ale lui Hamilton pentru pendulul matematic în regim de oscilații armonice libere, neamortizate, de amplitudine oarecare se scrie astfel:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = +\dfrac{\partial H}{\partial p_\theta}, \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta}. \end{cases} \tag{3.44}$$

Ținând cont de expresia (3.43) a hamiltonianului, sistemul de ecuații (3.44) devine:

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{p_\theta}{mR^2}, \\ \dot{p}_\theta = -mgR\sin\theta. \end{cases} \tag{3.45}$$

Acesta este un sistem de două ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cuplate. Pentru a-l rezolva vom urmări să decuplăm cele două ecuaţii. Derivând total în raport cu timpul prima ecuaţie a sistemului (3.45) obţinem:

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}_\theta}{mR^2},$$

care – introducând $\dot{p}_\theta$ din a doua ecuaţie a sistemului – devine:

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgR\sin\theta}{mR^2} = -\frac{g}{R}\sin\theta,$$

sau,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0, \tag{3.46}$$

adică ecuaţia diferenţială satisfăcută de coordonata generalizată θ. După cum se poate observa cu uşurinţă, aceasta coincide cu ecuaţia corespunzătoare (cea pentru variabila θ) obţinută în cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a.

De aici încolo rezolvarea problemei decurge la fel ca în cazul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a, atât în ceea ce priveşte analiza şi determinarea elementelor mişcării[10], cât şi a forţei de legătură, $\vec{L} = m\ddot{\vec{r}} - \vec{G}$.

III.5. Formalismul Hamilton-Jacobi

Problema se enunţă la fel ca în cazul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa I. În ceea ce priveşte rezolvarea unei probleme oarecare

[10] Cu observaţia că determinarea lui $\dot{\theta}$ urmează metoda din cadrul formalismului clasic-newtonian (bazată pe acel artificiu matematic simplu) şi nu cea a formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a, deoarece, chiar dacă sistemul de ecuaţii canonice ale lui Hamilton este echivalent cu ecuaţiile de speţa a II-a ale lui Lagrange, totuşi, în cazul de faţă avem de rezolvat acest sistem şi nu ecuaţiile lui Lagrange, deci nu mai putem utiliza cele două tipuri de integrale prime amintite în cadrul formalismului anterior.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

prin intermediul formalismului Hamilton-Jacobi (formalism care are ca nucleu ecuația Hamilton-Jacobi) trebuie să urmăm etapele algoritmului de mai jos:

i) identificarea forțelor aplicate $\vec{F}_i$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$, unde N reprezintă numărul de corpuri (puncte materiale) din sistem;

ii) stabilirea condițiilor inițiale (compatibile cu legăturile) în spațiul real, $\vec{r}_{i0}=\vec{r}_i(t_0)$ și $\dot{\vec{r}}_{i0}=\dot{\vec{r}}_i(t_0)$;

iii) identificarea numărului gradelor de libertate ale sistemului fizic studiat, $n=3N-s$ și alegerea convenabilă a coordonatelor generalizate, $q_j=q_j(t)$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$;

iv) stabilirea „relațiilor de legătură" între spațiul real și spațiul configurațiilor, $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n; t)\equiv\vec{r}_i(q; t)$, $\left(i=\overline{1,N}\right)$, inversarea lor, $q_j=q_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; t)\equiv q_j(\vec{r}; t)$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$ și determinarea condițiilor inițiale în spațiul configurațiilor, $q_{j0}=q_j(t_0)$, $\dot{q}_{j0}=\dot{q}_j(t_0)$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$;

v) determinarea funcției lui Lagrange a sistemului, $L=L\left(q, \dot{q}, t\right)$, a impulsurilor generalizate (canonic conjugate coordonatelor generalizate), $p_j=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$ și stabilirea celor $2n$ condiții inițiale în spațiul fazelor, $q_{j0}=q_j(t_0)$, $p_{j0}=p_j(t_0)$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$;

vi) determinarea funcției lui Hamilton (a hamiltonianului sistemului), $H=p_j\dot{q}_j-L=H\left(q, p, t\right)$;

vii) scrierea și rezolvarea ecuației Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1, q_2, ..., q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right)=0, \qquad (3.47)$$

unde $S=S(q, t)$ este *funcția principală a lui Hamilton*, soluție a ecuației Hamilton-Jacobi;

viii) determinarea legii de mișcare în spațiul configurațiilor, $q_j=q_j(t)$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$, utilizând teorema Jacobi;

BCU "ȘTIINȚĂ" UNIVERSITY LIBRARY

ix) determinarea legii de mişcare în spaţiul real, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$, utilizând relaţiile stabilite la punctul iv) al algoritmului;

x) aflarea forţelor de legătură utilizând expresia matematică a principiului fundamental al dinamicii pentru sistemele cu legături,

$$\vec{L}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \quad \left(i = \overline{1,N}\right).$$

Vom aplica acum acest algoritm pentru a rezolva aceeaşi problemă a pendulului matematic în regim de oscilaţii armonice libere, neamortizate şi de amplitudine oarecare.

Pentru aceasta, să observăm mai întâi (conform primului punct al algoritmului) că singura forţă aplicată sistemului este forţa de greutate,

$$\vec{G} = (mg,\ 0,\ 0),$$

ale cărei componente au fost exprimate în raport cu sistemul de referinţă xOy din Fig. III.4.

Condiţiile iniţiale în spaţiul real sunt, evident, aceleaşi cu cele din cazul formalismelor anterioare,

$$\vec{r}_0 = (x_0,\ y_0,\ 0) = (R\cos\theta_0,\ R\sin\theta_0,\ 0)$$

şi

$$\dot{\vec{r}}_0 = 0,$$

unde, fără a restrânge generalitatea problemei cu nimic, am considerat că mişcarea are loc în planul $z = 0$.

Mişcarea este afectată de două legături (cele deja precizate în cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa I), astfel că sistemul are doar un singur grad de libertate, $n = 3N - s = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Acestui grad de libertate îi vom asocia ca şi coordonată generalizată – din motive lesne de înţeles – aceeaşi variabilă unghiulară θ, ca şi în cazul ultimelor două formalisme (Lagrange şi Hamilton).

Relaţiile de legătură între coordonatele x şi y ale spaţiului real şi coordonata generalizată θ sunt

$$x = R\cos\theta,$$

$$y = R\sin\theta,$$

iar condiţiile iniţiale în spaţiul configuraţiilor se scriu astfel:

$$\theta(t_0 = 0) = \theta_0,$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\dot{\theta}(t_0 = 0) = \dot{\theta}_0 = 0 .$$

Următoarele două etape ale algoritmului presupun determinarea lagrangeanului şi a hamiltonianului sistemului. Nu vom face aici încă o dată acest lucru (modul concret de obţinere a celor două funcţii se găseşte în cadrul formalismelor corespunzătoare), ci vom da direct expresiile matematice pentru $L = L(q, \dot{q}, t)$ şi $H = H(q, p, t)$. După cum am văzut,

$$L = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta$$

şi

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2} - mgR\cos\theta . \tag{3.48}$$

Pentru a scrie ecuaţia Hamilton-Jacobi vom ţine cont de teorema Jacobi, conform căreia

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1,n} .$$

În cazul nostru, având un singur grad de libertate, $p_\theta = \dfrac{\partial S}{\partial \theta}$, astfel că funcţia lui Hamilton devine

$$H = \frac{1}{2mR^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 - mgR\cos\theta ,$$

iar ecuaţia Hamilton-Jacobi este

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2mR^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 - mgR\cos\theta = 0 . \tag{3.49}$$

Pentru rezolvarea ecuaţiei Hamilton-Jacobi (3.47) nu există o metodă generală, infailibilă, ci, de la caz la caz se urmăreşte ca, utilizând diferite procedee (în funcţie şi de forma particulară pe care o are această ecuaţie) să se determine soluţia ei. Totuşi, în multe situaţii concrete se poate utiliza metoda separării variabilelor (a timpului, t, a variabilelor ciclice, q_α, sau a unor perechi de variabile, $\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right)$).

Oricare ar fi situaţia, soluţia problemei în cadrul acestui formalism este dată de

BCU "ASACHI" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Teorema Jacobi: Dacă $S(q_1, q_2, ..., q_n, a_1, a_2, ..., a_n; t)$ este o soluţie (integrală) completă[11] a ecuaţiei Hamilton-Jacobi, atunci soluţia generală a sistemului de ecuaţii canonice ale lui Hamilton[12] este dată de

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad b_j = \frac{\partial S}{\partial a_j}, \tag{3.50}$$

unde b_j, $\left(j = \overline{1,n}\right)$ sunt noi constante.

Nu vom demonstra aici această teoremă, ci, precizăm că, odată cunoscută o integrală completă a ecuaţiei Hamilton-Jacobi, $S(q_1, q_2, ..., q_n, a_1, a_2, ..., a_n; t)$, soluţia problemei rezultă imediat prin înlocuirea acestei integrale complete în relaţiile (3.50–2), ceea ce furnizează legea de mişcare în spaţiul configuraţiilor,

$$q_j = q_j(a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n; t), \quad \left(j = \overline{1,n}\right),$$

cele $2n$ constante arbitrare de integrare, $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, determinându-se din cele $2n$ condiţiile iniţiale.

Legea de mişcare în spaţiul real, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$, se poate determina apoi cu ajutorul relaţiilor stabilite la punctul iv) al algoritmului, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q(t); t)$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$.

---

[11] O *soluţie (integrală) completă* a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi este o soluţie (integrală) care conţine atâtea constante arbitrare independente câte variabile independente are acea ecuaţie. Ecuaţia Hamilton-Jacobi are $(n+1)$ variabile independente (cele n coordonate generalizate q_j, $\left(j = \overline{1,n}\right)$ şi timpul t). Totuşi, deoarece variabila dependentă $S(q, a, t)$ intră în ecuaţia Hamilton-Jacobi doar sub formă de derivate parţiale, una din cele $(n+1)$ constante arbitrare trebuie să fie pur aditivă, adică

$$S(q_1, q_2, ..., q_n, a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}; t) = S(q_1, q_2, ..., q_n, a_1, a_2, ..., a_n; t) + const.,$$

unde, fără a restrânge generalitatea problemei cu nimic, am considerat ca fiind aditivă cea de-a $(n+1)$-a constantă, a_{n+1}. Deoarece la derivare această constantă „dispare", ea poate fi omisă, astfel încât soluţia completă a ecuaţiei Hamilton-Jacobi se va scrie $S(q_1, q_2, ..., q_n, a_1, a_2, ..., a_n; t)$, cele n constante arbitrare independente, a_j, $\left(j = \overline{1,n}\right)$, numindu-se *esenţiale.*

[12] Observăm astfel, că, între cele două formalisme (cel al ecuaţiilor canonice ale lui Hamilton şi cel al ecuaţiei Hamilton-Jacobi) există o foarte strânsă legătură (ca, de altfel, şi între formalismul ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a şi cel al ecuaţiilor canonice ale lui Hamilton).

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Revenind la situația concretă a problemei pe care o analizăm, trebuie să determinăm o integrală completă, $S = S(\theta, E, t)$, a ecuației (3.49). Această integrală completă depinde de o singură constantă (arbitrară) esențială (pe care am notat-o – nu întâmplător[13] – cu E), deoarece există două variabile independente (θ și t).

Deoarece funcția lui Hamilton (3.48) nu depinde explicit de timp, acesta se separă (ca variabilă independentă) și putem căuta o soluție a ecuației Hamilton-Jacobi de forma:

$$S(\theta, a, t) = W(\theta, a) + S_1(a, t), \tag{3.51}$$

unde a este constanta (arbitrară) esențială a problemei, iar W și S_1 sunt două funcții deocamdată necunoscute. Introducând (3.51) în ecuația Hamilton-Jacobi a problemei noastre,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\theta, \frac{\partial S}{\partial \theta}\right) = 0,$$

obținem:

$$\frac{\partial S_1(a, t)}{\partial t} + H\left(\theta, \frac{\partial W(\theta, a)}{\partial \theta}\right) = 0. \tag{3.52}$$

Întrucât primul termen depinde doar de variabilă independentă t, iar termenul al doilea depinde numai de variabila independentă θ, ecuația (3.52) poate fi satisfăcută doar dacă fiecare din cei doi termeni sunt egali cu o aceeași constantă (dar cu semne diferite), pe care o vom nota cu E:

$$H\left(\theta, \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) = E \tag{3.53}$$

și

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -E. \tag{3.54}$$

Deoarece soluția completă a ecuației (3.52) nu poate depinde decât de o singură constantă esențială, rezultă că a trebuie să fie chiar E. Din ecuația (3.53) apare acum evident de ce am preferat să notăm constanta din ecuațiile (3.53) și (3.54) cu E: legătura fiind scleronomă și funcția lui Hamilton nedepinzând explicit de timp, înseamnă că aceasta din urmă are semnificația energiei totale a sistemului, care se conservă, $E = const.$

[13] Această constantă nu este altceva – după cum vom vedea – decât energia totală a sistemului, care se conservă (deci este o constantă).

BUCUREȘTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ecuația (3.53) se numește *ecuația Hamilton-Jacobi redusă*, iar din ecuația (3.54) rezultă că:

$$S_1(a,\ t) \equiv S_1(E,\ t) = -E\,t\,,$$

astfel încât, relația (3.51) devine:

$$S = S(\theta,\ a,\ t) \equiv S(\theta,\ E,\ t) = -Et + W(\theta,\ E)\,. \tag{3.55}$$

Aceasta este integrala completă a ecuației Hamilton-Jacobi a problemei noastre, $\dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(\theta,\ \dfrac{\partial S}{\partial \theta}\right) = 0$. Pentru a determina funcția $W(\theta,\ E)$ trebuie să rezolvăm ecuația Hamilton-Jacobi redusă (3.53). Vom vedea însă că nu este nevoie să cunoaștem în mod explicit această funcție (în cazul de față). Cu

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

în expresia funcției lui Hamilton, aceasta devine:

$$H = \frac{1}{2mR^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 - mgR\cos\theta\,,$$

iar ecuația Hamilton-Jacobi redusă (3.53) se va scrie:

$$\frac{1}{2mR^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 - mgR\cos\theta = E$$

De aici obținem:

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \pm\sqrt{2mR^2\left(E + mgR\cos\theta\right)}\,,$$

de unde,

$$W(\theta,\ E) = \pm\int\sqrt{2mR^2\left(E + mgR\cos\theta\right)}\;d\theta\,.$$

Din teorema lui Jacobi (relația 3.50–2) – care, în cazul nostru, se scrie $\dfrac{\partial S}{\partial E} = b$ – rezultă:

$$-t + \frac{\partial W}{\partial E} = b\,. \tag{3.56}$$

Din motive de omogenitate dimensională constanta b trebuie să fie una temporală (trebuie să se măsoare în secunde); de aceea o vom nota cu t_1. Atunci, relația (3.56) devine:

$$\frac{\partial W}{\partial E} = t + t_1,$$

adică,

$$\pm \frac{\partial}{\partial E}\left[\int \sqrt{2mR^2\left(E + mgR\cos\theta\right)}\, d\theta\right] = t + t_1,$$

sau, ținând cont că E este o constantă esențială, iar θ este o variabilă independentă,

$$\pm \int \frac{\partial}{\partial E}\left[\sqrt{2mR^2\left(E + mgR\cos\theta\right)}\right] d\theta = t + t_1,$$

sau încă,

$$\pm \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R}\cos\theta}} = t + t_1.$$

De aici rezultă că „funcția" $t + t_1$ este primitiva funcției $\pm \dfrac{1}{\sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R}\cos\theta}}$ în raport cu variabila independentă θ. Atunci, prin derivarea totală în raport cu θ a „funcției" $t + t_1$, obținem:

$$\frac{d}{d\theta}\left(t + t_1\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R}\cos\theta}},$$

sau,

$$\frac{dt}{d\theta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R}\cos\theta}},$$

sau, încă,

$$\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R}\cos\theta}},$$

ceea ce conduce la

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{mR^2} + \frac{2g}{R}\cos\theta}.$$

Introducând o nouă constantă prin

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$const. = \cos\theta_0 = -\frac{E}{mgR}, \tag{3.57}$$

obţinem pentru $\dot{\theta}$ expresia

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0)}, \tag{3.58}$$

relaţie identică aceleia obţinute anterior prin alte două metode (utilizând un artificiu matematic simplu – în cadrul formalismului clasic-newtonian – şi integrala primă a energiei – în cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a).

De aici încolo rezolvarea problemei se face la fel ca în cazul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a.

Observaţie: modul în care am introdus noua constantă, $\cos\theta_0$ – dată de relaţia (3.57) – este în concordanţă cu expresia energiei totale a sistemului, dedusă în cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a, $E = -mgR\cos\theta_0$.

III.6. Formalismul variabilelor unghi-acţiune

Acest formalism poate fi utilizat cu succes în rezolvarea problemelor referitoare la sistemele care realizează o mişcare periodică. El derivă din formalismul Hamilton-Jacobi şi constă, în esenţă, în utilizarea unor variabile canonice noi, anume: *variabilele acţiune*, J_α şi *variabilele unghi*, w_α, în locul „parametrilor canonici" constanţi $Q_\alpha = b_\alpha$ şi $P_\alpha = a_\alpha$, $\left(\alpha = \overline{1,n}\right)$, unde n reprezintă numărul gradelor de libertate ale sistemului.

Să prezentăm pe scurt esenţa acestui nou formalism. Pentru aceasta să considerăm un sistem conservativ cu un singur grad de libertate. În aceste condiţii putem scrie

$$H(q,p) = E, \tag{3.59}$$

unde E reprezintă energia totală a sistemului, care se conservă. Relaţia (3.59) este ecuaţia implicită a unei curbe în planul fazelor şi reprezintă traiectoria generalizată corespunzătoare evoluţiei sistemului considerat.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Proprietățile mișcării periodice sunt date de tipul traiectoriei generalizate. Putem vorbi de două tipuri de mișcări periodice:

1. Dacă traiectoria generalizată este o curbă închisă, mișcarea este numită *vibrație*. În acest caz coordonata generalizată q oscilează între două valori constante, atât q cât și p fiind funcții periodice de timp, cu aceeași perioadă (vezi Fig. III.5);

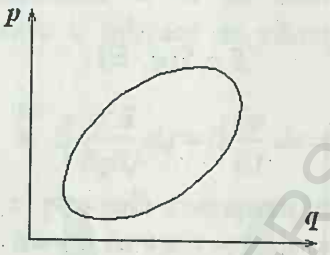


Fig. III.5

2. Dacă, rezolvând ecuația (3.59) obținem $p = p(q, E)$ ca o funcție periodică de variabila q, cu perioada q_0, adică $p(q + kq_0, E) = p(q, E)$, $k \in \mathbb{Z}$, mișcarea periodică este numită *rotație*, sau, uneori, mișcare de *revoluție*. În acest caz[14] coordonata q poate lua orice valoare (vezi Fig. III.6).

Menționăm că există sisteme care sunt caracterizate simultan atât de o mișcare de vibrație, cât și de una de rotație. Un astfel de sistem este, după cum vom vedea, chiar cel analizat în cadrul problemei de față, anume, pendulul simplu.

Definim *variabila acțiune* prin

$$J = \oint p \, dq, \tag{3.60}$$

unde integrala se ia pe un ciclu complet de variație a coordonatei q. Ea reprezintă atât aria suprafeței închise de curba din Fig. III.5, cât și aria haşurată din Fig. III.6, corespunzătoare unei perioade a mișcării de rotație.

[14] Un exemplu simplu de astfel de sistem este un corp solid-rigid care se rotește în jurul unei axe fixe.

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din modul în care este definită, mărimea J are aceleași dimensiuni cu integrala acțiunii $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$. Ținând cont de relațiile $p = p(q,E)$ și (3.60), rezultă că $J = J(E)$, de unde, inversând dependența funcțională, rezultă că $E = E(J)$. Integrala completă corespunzătoare hamiltonianului (3.59) este[15] $S(q, E)$, sau, dacă ținem cont de faptul că $E = E(J)$, obținem

$$S = S(q, E). \tag{3.61}$$

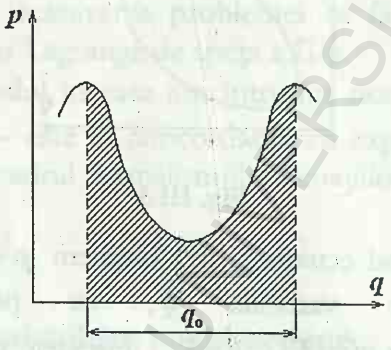


Fig. III.6

Variabila canonică w asociată lui J este numită *variabilă unghi* și se definește prin

$$w = \frac{\partial S}{\partial J}, \tag{3.62}$$

iar noul hamiltonian – ținând cont de relațiile (3.59) și $E = E(J)$ – va fi

$$H = \mathcal{H}(J). \tag{3.63}$$

Deoarece coordonata w este asociată cu un moment cinetic, ea are dimensiunea unui unghi. Cu această alegere, ecuațiile canonice conduc la

$$\begin{cases} \dot{J} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} = 0, \\ \dot{w} = +\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \nu(J), \end{cases} \tag{3.64}$$

[15] Și depinde de o singură constantă esențială, E.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ceea ce înseamnă că $J = const.$ (lucru deja cunoscut, căci am văzut că $J = J(E)$, cu $E = const.$). În consecință și ν este o constantă (ce depinde de J). Integrând (3.64 – 2) obținem:

$$w = \nu t + \varphi, \tag{3.65}$$

unde φ este o constantă (arbitrară) de integrare.

Pentru a găsi semnificația variabilei ν vom determina modul de variație al variabilei unghiulare w la un ciclu complet de variație al coordonatei q (atât pentru o mișcare de vibrație, cât și pentru una de rotație). Avem,

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq \overset{(62)}{=} \oint \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial J} dq = \oint \frac{\partial p}{\partial J} dq = \frac{d}{dJ} \oint p\, dq = 1.$$

Dacă notăm cu τ perioada corespunzătoare unui ciclu complet, ultimele două relații dau $\Delta w = \nu\, \Delta t \equiv \nu\, \tau = 1$, de unde,

$$\nu = \frac{1}{\tau}. \tag{3.66}$$

Acest rezultat arată faptul că ν este frecvența mișcării periodice de variație a lui q. De aici rezultă o concluzie foarte importantă: perioada unei mișcări poate fi determinată fără a fi necesar să rezolvăm ecuațiile de mișcare, dacă se cunoaște dependența de variabila J a hamiltonianului. De asemenea, inversând relația (3.61) și utilizând (3.65) poate fi determinată dependența temporală a coordonatei q.

Să aplicăm formalismul prezentat mai sus la mișcarea de „vibrație" a pendulului simplu.

După cum am văzut în cadrul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, lagrangeanul sistemului este

$$L = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta.$$

Deci, în acest caz $q \equiv \theta$, iar impulsul generalizat corespunzător este

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta},$$

ceea ce conduce la următoarea formă a hamiltonianului,

$$H = p\dot{\theta} - L = mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta =$$

$$= \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta = \frac{p^2}{2mR^2} - mgR\cos\theta = E.$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Atunci, ecuația traiectoriei generalizate în planul fazelor, (θ, p), este

$$p = \pm\sqrt{2mR^2(E + mgR\cos\theta)}, \tag{3.67}$$

iar variabila acțiune J, conform definiției, va fi:

$$J = -2\int_{\theta_0}^{-\theta_0}\left[2mR^2\left(E + mgR\cos\theta\right)\right]^{1/2} d\theta = 4\int_{0}^{\theta_0}\left[2mR^2\left(E + mgR\cos\theta\right)\right]^{1/2} d\theta .$$

Ecuația a doua a sistemului (3.64) se va scrie:

$$\nu = \nu(J) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \frac{1}{\dfrac{\partial J}{\partial \mathcal{H}}} = \frac{1}{\dfrac{\partial J}{\partial E}} = \left(\frac{\partial J}{\partial E}\right)^{-1},$$

și atunci, conform lui (3.66),

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{dJ}{dE}, \tag{3.68}$$

sau, efectuând derivata,

$$\tau = 4\frac{d}{dE}\left(\int_0^{\theta_0}\sqrt{2mR^2\left(E + mgR\cos\theta\right)}\, d\theta\right) = 4\int_0^{\theta_0}\frac{2mR^2 d\theta}{2\sqrt{2gm^2R^3\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}} =$$

$$= 4\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\dfrac{2g}{R}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}} = 4\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

rezultat obținut deja în cadrul primului formalism, prin intermediul căruia am rezolvat problema (formalismul clasic-newtonian). De aici încolo, rezolvarea urmează aceeași cale ca în cadrul formalismului newtonian. În ceea ce privește determinarea forțelor de legătură (în acest caz, tensiunea din tijă), remarcăm faptul că formalismul variabilelor canonice unghi-acțiune nu pune la dispoziție nici o modalitate concretă în acest sens. De altfel, formalismul de față este utilizabil doar pentru sisteme care efectuează o mișcare periodică, caz în care problema centrală este determinarea perioadei mișcării.

În cazul micilor oscilații $(\theta_0 < 5^o)$, ținând cont de aproximația

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \mathcal{O}\left(\theta^4\right) \cong 1 - \frac{\theta^2}{2},$$

obținem hamiltonianul

BCU IAȘI CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

$$H=\frac{p^2}{2mR^2}-mgR\cos\theta\cong\frac{p^2}{2mR^2}-mgR\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)=\frac{p^2}{2mR^2}-mgR+\frac{mgR\theta^2}{2},$$

sau, omițând termenul constant $(-mgR)$,

$$H=\frac{p^2}{2mR^2}+\frac{mgR\theta^2}{2}=E,$$

de unde,

$$p=\pm\sqrt{2mR^2\left(E-\frac{mgR\theta^2}{2}\right)},$$

ceea ce conduce la

$$J=-2\int_{\theta_0}^{-\theta_0}\left[2mR^2\left(E-\frac{mgR\theta^2}{2}\right)\right]^{1/2}d\theta=\sqrt{2}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\left[2mR^2\left(2E-mgR\theta^2\right)\right]^{1/2}d\theta=$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\left(4mER^2-2m^2gR^3\theta^2\right)^{1/2}d\theta=4E\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{-\varphi_1}^{\varphi_1}\left(1-\varphi^2\right)^{1/2}d\varphi=$$

$$=4E\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\psi_1}^{\psi_1+\pi}\cos^2\psi\,d\psi=4E\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\psi_1}^{\psi_1+\pi}\frac{1+\cos2\psi}{2}d\psi=4E\sqrt{\frac{R}{g}}\left[\int_{\psi_1}^{\psi_1+\pi}\frac{d\psi}{2}+\right.$$

$$\left.+\int_{\psi_1}^{\psi_1+\pi}\frac{\cos2\psi}{2}d\psi\right]=4E\sqrt{\frac{R}{g}}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\sin2\psi}{4}\right)_{\psi_1}^{\psi_1+\pi}\right]=2\pi E\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

În relația de mai sus am folosit schimbările de variabilă

$$\theta\sqrt{\frac{mgR}{2E}}=\varphi=\sin\psi,$$

$\varphi_1=\theta_0\sqrt{\frac{mgR}{2E}}$, iar $\psi_1=\arcsin(-\varphi_1)$. Aşadar,

$$J=2\pi E\sqrt{\frac{R}{g}},\tag{3.69}$$

ceea ce conduce la binecunoscuta formulă a perioadei micilor oscilații (izocrone) ale unui pendul simplu,

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\tau = \frac{dJ}{dE} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{3.70}$$

După cum am văzut, ecuaţia traiectoriei generalizate în planul fazelor pentru pendulul simplu este

$$p = \pm\sqrt{2mR^2(E + mgR\cos\theta)}.$$

Valoarea $p = 0$ a impulsului generalizat corespunde valorii particulare a unghiului θ dată de

$$\cos\theta_0 = -\frac{E}{mgR}. \tag{3.71}$$

Dacă $E < mgR$ atunci pendulul efectuează o mişcare periodică, unghiul θ variind între valorile limită $(-\theta_0)$ şi θ_0, cu θ_0 dat de relaţia (3.71). În acest caz avem o mişcare „de vibraţie", iar traiectoriile generalizate în planul fazelor (θ, p) sunt curbele închise notate cu (1) în Fig. III.7.

Dacă $E > mgR$, atunci nu există nici o limitare pentru unghiul θ, atât unghiul θ, cât şi unghiurile $\theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ conducând la aceeaşi stare de mişcare a sistemului. Traiectoriile generalizate din planul fazelor sunt în acest caz curbele notate cu (3) în Fig. III.7.

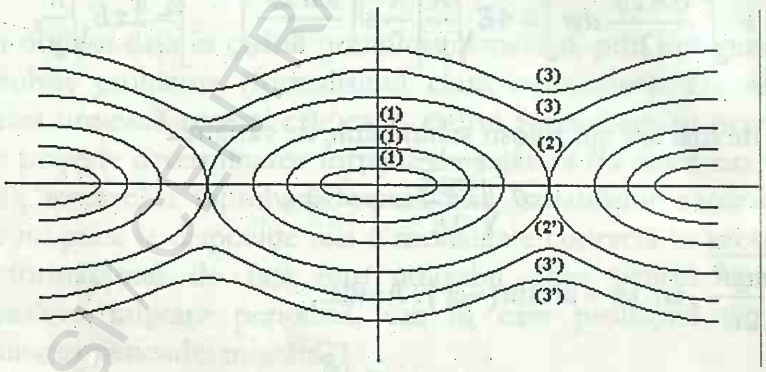


Fig. III.7

O situaţie specială apare în cazul limită $E = mgR$, pentru care se obţin curbele notate cu (2) şi (2') în Fig. III.7. Aceste curbe corespund

valorilor $\theta = \pm\pi$ (în cazul general, $\theta = (2k+1)\pi$) şi $p = 0$ care desemnează poziţiile de echilibru instabil ale sistemului[16].

*
* *

În încheiere ne propunem să evaluăm abaterea de la timpul real/exact pe care o face un *pendul astronomic* (pentru care amplitudinea de oscilaţie este $\theta_0 = 1°30'$) în timp de un an, în ipoteza că el efectuează oscilaţii izocrone cu perioada

$$T_{izo} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

luând în considerare doar abaterea de la „condiţia de izocronicitate"[17].

Perioada „exactă" (cea care ţine cont de dependenţa acesteia de amplitudinea θ_0 a oscilaţiilor) este dată de relaţia (3.9):

$$T_{non-izo} = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

unde $k = \sin\dfrac{\theta_0}{2}$. Diferenţa de timp înregistrată în decurs de o perioadă, în cele două situaţii, este

$$\Delta T = T_{non-izo} - T_{izo} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \pi\right] > 0.$$

Cu alte cuvinte, ceasornicul care efectuează oscilaţii izocrone (ceasornicul „ideal") „va merge înainte" cu ΔT secunde pentru fiecare perioadă. În unitatea de timp pendulul care măsoară timpul „exact" efectuează

$$\nu_{non-izo} = \frac{1}{T_{non-izo}}$$

[16] În acest caz, o mică perturbaţie poate scoate pendulul dintr-o astfel de poziţie, iar punctul reprezentativ din spaţiul fazelor parcurge curba (2) sau (2').

[17] Nu vom considera efectul asupra acestei erori datorat variaţiei acceleraţiei gravitaţionale sau altor factori, cum ar fi: abaterea de la caracterul armonic al oscilaţiilor, amortizarea nenulă a oscilaţiilor etc.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

oscilații complete, ceea ce înseamnă că în timp de un an (365 de zile) el va realiza un număr de

$$N_{exact} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot \nu_{non-izo} = \frac{365 \cdot 24 \cdot 3600}{T_{non-izo}}$$

oscilații complete. Rezultă că diferența de timp înregistrată de cele două ceasornice în timp de un an este

$$\Delta t_{(1\,an)} = N_{exact} \Delta T = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot \frac{T_{non-izo} - T_{izo}}{T_{non-izo}} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot \left(1 - \frac{T_{izo}}{T_{non-izo}}\right) =$$

$$= 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{2K(k)}\right) = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot \left[1 - \pi \left(2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}}\right)^{-1}\right].$$

Efectuând calculele numerice, pentru $\Delta t_{(1\,an)}$ se obține următoarea valoare:

$$\Delta t_{(1\,an)} = 1350{,}897\ s \simeq 22{,}515\ \text{min},$$

iar pentru o zi se obține valoarea:

$$\Delta t_{(1\,zi)} = 3{,}701\ \text{s},$$

adică o diferență destul de mare pentru a considera „bună" funcționarea unui ceasornic în ipoteza oscilațiilor izocrone. Aceasta se datorează diferenței destul de mari dintre perioadele de oscilație corespunzătoare celor două cazuri, care, pentru un pendul care „bate secunda" (adică pentru care $R = \frac{g}{4\pi^2}$) este de

$$\Delta T_{(1\,s)} = T_{non-izo} - T_{izo} = T_{non-izo} - 1 = 1.000042838 - 1 = 42{,}838\ \mu s.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul IV

Probleme rezolvate cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual

Problema 1

Utilizând principiul lucrului mecanic virtual, să se determine poziția de echilibru a sistemului din Fig. IV.1. Se cunosc: masele celor două corpuri, m_1 şi m_2, unghiul α al planului înclinat şi distanța a de la vârful planului înclinat până la axa scripetelui. Se neglijează frecările şi raza discului scripetelui, iar firul se presupune inextensibil. De asemenea, se presupune că în tot timpul mişcării corpul de masă m_1 nu părăseşte suprafața planului înclinat, iar corpul de masă m_2 se deplasează doar pe verticală.

Rezolvare

Să identificăm mai întâi legăturile care „afectează" mişcarea corpurilor.

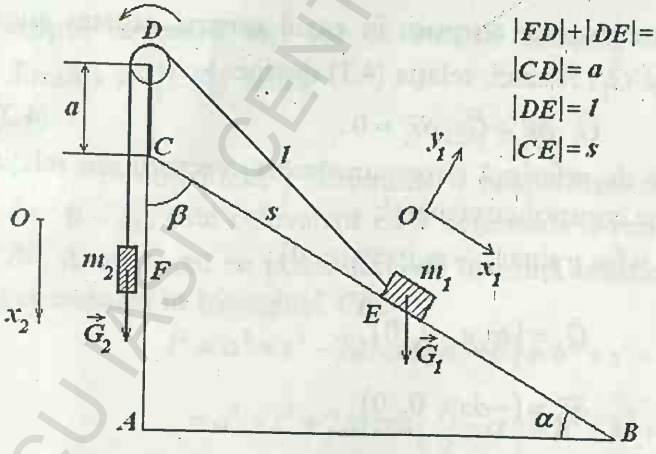


Fig. IV.1

$|FD|+|DE|=L$
$|CD|=a$
$|DE|=l$
$|CE|=s$

Ataşăm fiecărui corp în parte câte un sistem de referință, ca în figură. După cum se poate constata cu uşurință din Fig. IV.1, ecuațiile legăturilor sunt:

- $f_1(z_1)=z_1=C_1$, unde constanta C_1 poate fi considerată nulă, fără a restrânge

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu nimic generalitatea problemei;

- $f_2(y_1) = y_1 = 0$, (corpul de masă m_1 nu părăseşte suprafaţa planului înclinat);
- $f_3(y_2) = y_2 = C_2$;
- $f_4(z_2) = z_2 = C_3$ şi
- $f_5(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 2ax_1 \sin\alpha + a^2} + x_2 + a - L = 0$.

Facem observaţia că şi constantele C_2 şi C_3 pot fi considerate nule, fără să fie afectat cu nimic gradul de generalitate al problemei. Cu L am notat lungimea (constantă) a firului care leagă cele două corpuri, iar în scrierea legăturii f_5 am utilizat teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul oarecare CED şi am presupus că originile celor două sisteme de referinţă (faţă de care raportăm mişcarea corpurilor) coincid cu punctul C (vârful planului înclinat). Rezultă deci că sistemul are $3 \cdot 2 - 5 = 1$ grad de libertate.

Principiul lucrului mecanic virtual se scrie astfel:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \tag{4.1}$$

unde N reprezintă numărul de corpuri din sistem, iar $\vec{F}_i$, $\left(i = \overline{1,N}\right)$ reprezintă forţele aplicate acestor corpuri; în cazul nostru, acestea sunt forţele de greutate, $\vec{G}_1$ şi $\vec{G}_2$. Atunci, relaţia (4.1) devine:

$$\vec{G}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{G}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 = 0. \tag{4.2}$$

Faţă de sistemele de referinţă corespunzătoare, vectorii din relaţia de mai sus se vor scrie pe componente astfel:

$$\vec{G}_1 = \left(m_1 g \sin\alpha,\ -m_1 g \cos\alpha,\ 0\right),$$

$$\vec{G}_2 = \left(m_2 g,\ 0,\ 0\right),$$

$$\delta\vec{r}_1 = \left(-\delta x_1,\ 0,\ 0\right)$$

şi

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$$\delta\vec{r}_2 = (\delta x_2,\ 0,\ 0),$$

unde am ţinut cont de sensul (convenţional ales) de mişcare a ansamblului celor două corpuri (corpul de masă m_1 urcă pe planul înclinat, deci se mişcă în sens contrar sensului pozitiv al axei Ox_1). Ţinând cont de aceste relaţii, expresia (4.2) a principiului lucrului mecanic virtual devine:

$$-m_1 g\delta x_1 \sin\alpha + m_2 g\delta x_2 = 0. \tag{4.3}$$

Expresia (4.3) este o combinaţie liniară nulă a mărimilor δx_1 şi δx_2, cu coeficienţii constanţi $m_1 g\sin\alpha$ şi $m_2 g$. Evident, cele două variaţii virtuale ale coordonatelor celor două corpuri, δx_1 şi δx_2 nu pot fi liniar independente. În caz contrar ar trebui ca $m_1 g\sin\alpha = 0$ şi $m_2 g = 0$, ceea ce este absurd. De altfel, acest lucru noi deja l-am găsit, întrucât am arătat că sistemul are un singur grad de libertate, deci, doar o singură variaţie virtuală a coordonatelor celor două corpuri este liniar independentă. În consecinţă, cele două variaţii, δx_1 şi δx_2 sunt liniar dependente şi va trebui să eliminăm una din ele. Pentru aceasta să observăm că (vezi Fig. IV.1) o variaţie a coordonatei x_1 a corpului de masă m_1 este identică unei variaţii a mărimii $s = |CE|$, adică,

$$\delta x_1 \equiv \delta s, \tag{4.4}$$

şi o variaţie a coordonatei x_2 a corpului de masă m_2 este egală cu o variaţie a mărimii $l = |DE|$ (firul fiind inextensibil, cu cât urcă sau coboară corpul de masă m_2, tot cu atât se măreşte, respectiv se micşorează, distanţa $l = |DE|$), adică,

$$\delta x_2 \equiv \delta l. \tag{4.5}$$

În concluzie, a determina o relaţie între cele două variaţii virtuale δx_1 şi δx_2, este echivalent cu a determina o relaţie între mărimile δs şi δl. Acest lucru se poate face cu uşurinţă utilizând teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul CED:

$$l^2 = a^2 + s^2 - 2as\cos(\pi - \beta) = a^2 + s^2 + 2as\cos\beta =$$

$$= a^2 + s^2 + 2as\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = a^2 + s^2 + 2as\sin\alpha.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

De aici, prin diferenţiere, avem:

$$2l\,dl = 2s\,ds + 2a\,ds\sin\alpha,$$

sau,

$$l\,dl = (s + a\sin\alpha)\,ds.$$

Trecând acum de la diferenţiale la variaţii virtuale infinitezimale, rezultă relaţia căutată

$$l\,\delta l = (s + a\sin\alpha)\,\delta s,$$

care, ţinând cont de relaţiile (4.4) şi (4.5), devine:

$$l\,\delta x_2 = (s + a\sin\alpha)\,\delta x_1,$$

de unde,

$$\delta x_2 = \frac{s + a\sin\alpha}{l}\,\delta x_1.$$

Înlocuind δx_2 din această relaţie în (4.3) obţinem:

$$-m_1 g\,\delta x_1 \sin\alpha + m_2 g\,\frac{s + a\sin\alpha}{l}\,\delta x_1 = 0,$$

sau, aducând la acelaşi numitor şi dând în factor δx_1,

$$\left[-m_1 gl\sin\alpha + m_2 g(s + a\sin\alpha)\right]\delta x_1 = 0, \qquad (4.6)$$

relaţie valabilă pentru orice variaţie virtuală infinitezimală δx_1. Cu alte cuvinte, δx_1 fiind arbitrară, paranteza pătrată trebuie să se anuleze; ceea ce rezultă reprezintă tocmai condiţia căutată de echilibru:

$$-m_1 gl\sin\alpha + m_2 g(s + a\sin\alpha) = 0,$$

sau,

$$-m_1 g\sqrt{a^2 + s^2 + 2as\sin\alpha}\,\sin\alpha + m_2 g(s + a\sin\alpha) = 0,$$

sau încă,

$$m_1 g\sqrt{a^2 + s^2 + 2as\sin\alpha}\,\sin\alpha = m_2 g(s + a\sin\alpha),$$

care, prin simplificare cu $g \neq 0$ şi ridicare la pătrat, conduce la următoarea ecuaţie de gradul doi în s:

$$m_1^2(a^2 + s^2 + 2as\sin\alpha)\sin^2\alpha = m_2^2(s + a\sin\alpha)^2.$$

Aceasta se mai scrie astfel:

$$s^2(m_2^2 - m_1^2\sin^2\alpha) - 2sa\sin\alpha(m_1^2\sin^2\alpha - m_2^2) + a^2\sin^2\alpha(m_2^2 - m_1^2) = 0$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

şi are soluţiile:

$$s_{1,2}=\frac{a\sin\alpha\left(m_1^2\sin^2\alpha-m_2^2\right)}{m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha}\pm$$

$$\pm\frac{\sqrt{a^2\sin^2\alpha\left(m_1^2\sin^2\alpha-m_2^2\right)^2-a^2\sin^2\alpha\left(m_2^2-m_1^2\right)\left(m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha\right)}}{m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha},$$

sau,

$$s_{1,2}=a\sin\alpha\left[-1\pm\frac{\sqrt{\left(m_1^2\sin^2\alpha-m_2^2\right)^2-\left(m_2^2-m_1^2\right)\left(m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha\right)}}{m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha}\right].$$

Soluţia acceptabilă din punct de vedere fizic este

$$s\equiv s_1=a\sin\alpha\left[\frac{\sqrt{\left(m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha\right)^2-\left(m_2^2-m_1^2\right)\left(m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha\right)}}{m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha}-1\right],$$

care se mai scrie

$$s\equiv s_1=a\sin\alpha\left[\frac{m_1\cos\alpha\sqrt{m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha}}{m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha}-1\right]=$$

$$=a\sin\alpha\left[\frac{m_1\cos\alpha}{\sqrt{m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha}}-1\right]. \tag{4.7}$$

Se observă faptul că, pentru ca sistemul să aibă o poziţie de echilibru, trebuie să fie îndeplinite simultan condiţiile

$$m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha>0$$

şi

$$\frac{m_1\cos\alpha}{\sqrt{m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha}}\geq 1.$$

Cu alte cuvinte, trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha>0, \\ m_1\cos\alpha\geq\sqrt{m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha} \end{cases} \tag{4.8}$$

să fie compatibil.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Sistemul (4.8) mai poate fi scris şi astfel:

$$\begin{cases} |\sin\alpha| < \dfrac{m_2}{m_1}, \\ m_1 \geq m_2. \end{cases}$$

Putem sesiza cu uşurinţă că sistemul este compatibil, rezultând şi o condiţie necesară asupra unghiului α al planului înclinat; având în vedere că $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, această condiţie este

$$\alpha < \arcsin\frac{m_2}{m_1}, \text{ cu } m_1 > m_2.$$

În aceste condiţii, sistemul este în echilibru pentru

$$s = a\sin\alpha\left[\frac{m_1\cos\alpha}{\sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2\alpha}} - 1\right]. \qquad (4.9)$$

Problema 2

Să se rezolve problema precedentă utilizând principiul lui Torricelli.

Rezolvare

Întrucât sistemul este supus doar forţelor de greutate proprie a punctelor materiale, problema poate fi rezolvată şi utilizând principiul lui Torricelli. De altfel, principiul lui Torricelli nu este altceva decât o formă particulară a principiului lucrului mecanic virtual, şi anume atunci când singurele forţe aplicate sistemului de puncte materiale sunt forţele de greutate proprie a punctelor materiale.

Principiul lui Torricelli „spune" simplu că:

$$\delta z_G = 0, \qquad (4.10)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde z_G reprezintă cota centrului de greutate al sistemului de puncte materiale.

Urmând algoritmul de rezolvare a unei probleme cu ajutorul principiului lui Torricelli, descris în paragraful dedicat lucrului mecanic virtual, trebuie să ataşăm sistemului de puncte materiale un sistem de referinţă unic (unul şi acelaşi pentru toate corpurile sistemului), de preferinţă un reper triortogonal cartezian, având axa Oz verticală (vezi Fig. IV.2). Vom alege apoi ca nivel de referinţă pentru energia potenţială a sistemului planul $z = 0$ (altfel spus, planul xOy), caz în care coordonata z a centrului de greutate al sistemului (cota centrului de greutate) va fi dată de relaţia[1]:

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} z_i m_i , \tag{4.11}$$

unde N reprezintă numărul total de puncte materiale ale sistemului, iar

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

este masa întregului sistem discret de puncte materiale.

În cazul nostru $N = 2$, astfel că relaţia (4.11) devine

$$z_G = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} . \tag{4.12}$$

În acest fel, problema devine (cel puţin pentru moment) o problemă de geometrie plană. Pentru a uşura raţionamentele vom simplifica figura, păstrând în ea doar elementele strict necesare determinării coordonatelor verticale z_1 şi z_2 ale celor două corpuri (vezi Fig. IV.3).

Astfel, se observă că avem

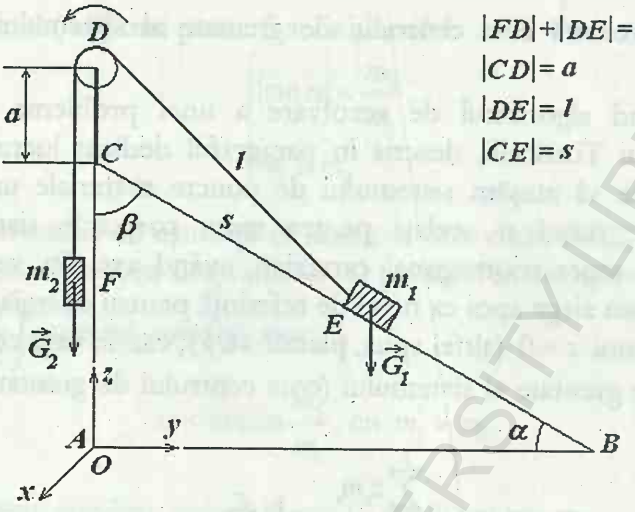
$$a = |CD|,\ l = |DE|,\ s = |CE|,\ z_1 = |EN| = |AH|,\ z_2 = |AF| .$$

De asemenea,

$$|FC| + a + l = L ,$$

[1] În ipoteza că extinderea spaţială a sistemului nu este într-atât de mare, încât câmpul gravitaţional să varieze sensibil între cele mai îndepărtate extremităţi ale domeniului ocupat de corpuri.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



$|FD|+|DE|=L$
$|CD|=a$
$|DE|=l$
$|CE|=s$

Fig. IV.2

$$|AC|-z_1=s\ \sin\alpha$$

şi

$$|AC|=z_2+|FC|.$$

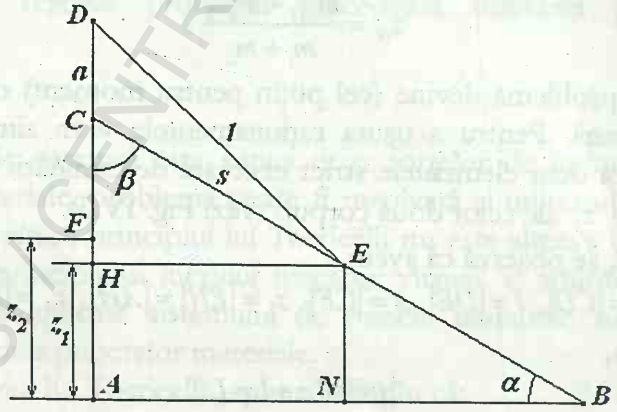


Fig. IV.3

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din aceste relații rezultă:

$$|FC| = L - a - l,$$

$$z_1 = |AC| - s \sin\alpha$$

și

$$z_2 = |AC| - |FC| = |AC| - L + a + l.$$

Cu aceste rezultate în relația (4.12) avem

$$z_G = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[m_1\left(|AC| - s\sin\alpha\right) + m_2\left(|AC| - L + a + l\right)\right] =$$

$$= \frac{|AC|\left(m_1 + m_2\right) - m_2\left(L - a\right)}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 l - m_1 s\sin\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Având în vedere faptul că $|AC| = const.$, rezultă că putem scrie:

$$z_G = C_0 + \frac{m_2 l - m_1 s\sin\alpha}{m_1 + m_2}, \tag{4.13}$$

unde, prin C_0 am notat mărimea constantă

$$C_0 \overset{not.}{=} \frac{|AC|\left(m_1 + m_2\right) - m_2\left(L - a\right)}{m_1 + m_2}.$$

Diferențiind relația (4.13) și trecând apoi de la diferențiale la variații virtuale infinitezimale, obținem:

$$\delta z_G = \frac{m_2 \delta l - m_1\ \delta s\ \sin\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Utilizând aici relația dintre δl și δs obținută în rezolvarea problemei precedente,

$$l\ \delta l = \left(s + a\sin\alpha\right)\delta s,$$

găsim,

$$\delta z_G = \frac{m_2 \dfrac{\left(s + a\sin\alpha\right)}{l}\delta s - m_1\ \delta s\ \sin\alpha}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{1}{l\left(m_1 + m_2\right)}\left[m_2\left(s + a\sin\alpha\right) - m_1 l\sin\alpha\right]\delta s.$$

Cum δs este arbitrară, din relația de mai sus rezultă:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$m_2\left(s+a\sin\alpha\right)-m_1 l\sin\alpha=0,$$

sau,

$$m_2\left(s+a\sin\alpha\right)=m_1\sqrt{s^2+a^2+2as\sin\alpha}\ \sin\alpha,$$

care, prin ridicare la pătrat conduce la următoarea ecuaţie de gradul doi în s:

$$m_2^2\left(s+a\sin\alpha\right)^2=m_1^2\left(s^2+a^2+2as\sin\alpha\right)\sin^2\alpha,$$

ce se mai poate scrie şi astfel:

$$s^2\left(m_2^2-m_1^2\sin^2\alpha\right)-2sa\sin\alpha\left(m_1^2\sin^2\alpha-m_2^2\right)+a^2\sin^2\alpha\left(m_2^2-m_1^2\right)=0,$$

adică aceeaşi ecuaţie de gradul doi în s obţinută în rezolvarea problemei precedente. De aici încolo rezolvarea se face exact la fel ca în problema precedentă.

Problema 3

Utilizând principiul lui Torricelli să se determine poziţia de echilibru a tijei omogene şi rigide de lungime $2l$ din Fig. IV.4. Se cunoaşte raza semicilindrului fix (încastrat) R, iar frecările se neglijează.

Rezolvare

După cum simplu se poate observa din Fig. IV.4, poziţia de echilibru a tijei este determinată univoc doar de unghiul $\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, care este astfel necunoscuta problemei.

Încă de la bun început putem anticipa (ceea ce va trebui să reiese şi din calcule) că tija omogenă şi rigidă AB nu va putea rămâne în echilibru în interiorul semicilindrului, decât dacă centrul ei de greutate C „cade" în interiorul semicilindrului. Evident, dacă centrul de greutate este în afara semicilindrului, forţa de greutate, prin momentul pe care îl creează în raport cu polul N, va „răsturna" tija, care astfel va cădea în afara semicilindrului.

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

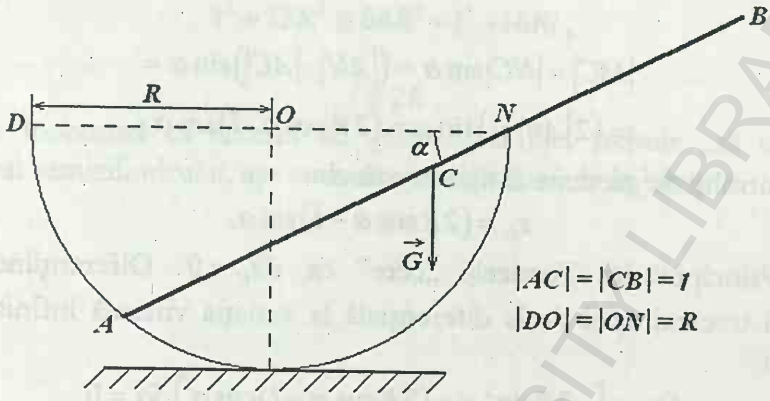


Fig. IV.4

Problema poate fi rezolvată cu ajutorul principiului lui Torricelli, deoarece singura forță aplicată tijei este forța de greutate proprie $\vec{G} = m\vec{g}$, unde m este masa tijei omogene. Alegând un sistem de referință cartezian cu axele ca în Fig. IV.5 și nivelul de referință pentru energia potențială ca fiind planul orizontal care trece prin diametrul DN al semicilindrului (planul xOy), problema devine (cel puțin pentru moment) o problemă de geometrie plană. Mai exact, trebuie să determinăm segmentul $|MC| = z_G$ din Fig. IV.5.

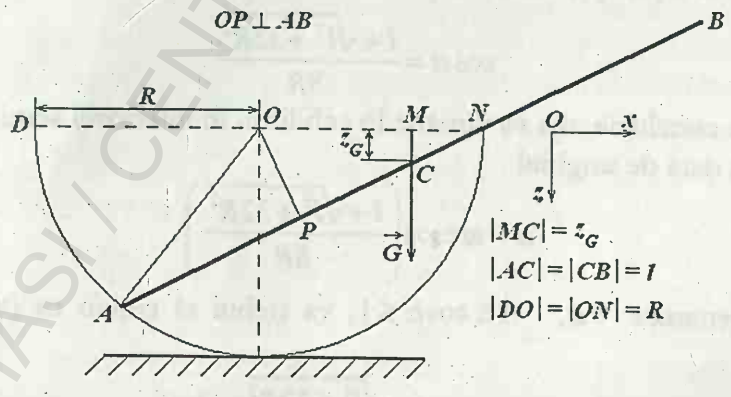


Fig. IV.5

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Avem,

$$|MC| = |NC|\sin\alpha = \left(|AN| - |AC|\right)\sin\alpha =$$
$$= \left(2|AP| - l\right)\sin\alpha = \left(2R\cos\alpha - l\right)\sin\alpha.$$

Cota centrului de greutate al tijei este deci

$$z_G = \left(2R\cos\alpha - l\right)\sin\alpha. \tag{4.14}$$

Principiul lui Torricelli „cere" ca $\delta z_G = 0$. Diferențiind relația (4.14) și trecând apoi de la diferențială la variația virtuală infinitezimală, obținem

$$\delta z_G = \left[-2R\sin^2\alpha + \left(2R\cos\alpha - l\right)\cos\alpha\right]\delta\alpha = 0.$$

Cum $\delta\alpha$ este arbitrar, relația anterioară implică anularea parantezei pătrate:

$$-2R\sin^2\alpha + \left(2R\cos\alpha - l\right)\cos\alpha = 0,$$

adică,

$$-2R\sin^2\alpha + 2R\cos^2\alpha - l\cos\alpha = -2R\left(1-\cos^2\alpha\right) + 2R\cos^2\alpha - l\cos\alpha =$$
$$= 4R\cos^2\alpha - l\cos\alpha - 2R = 0,$$

care este o ecuație de gradul doi în $\cos\alpha$. Soluțiile acestei ecuații sunt

$$\left(\cos\alpha\right)_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R}.$$

Deoarece $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, doar soluția cu semnul plus are sens fizic, deci

$$\cos\alpha = \frac{l + \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R}. \tag{4.15}$$

În concluzie, tija va rămâne în echilibru în interiorul semicilindrului în poziția dată de unghiul

$$\alpha = \arccos\left(\frac{l + \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R}\right). \tag{4.16}$$

Deoarece $\forall\alpha$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$, va trebui să cerem ca (vezi relația (4.15)):

$$\cos\alpha = \frac{l + \sqrt{l^2 + 32R^2}}{8R} \le 1.$$

Aceasta este echivalent cu

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$l^2 + 32R^2 \le 64R^2 + l^2 - 16Rl,$$

adică,

$$l \le 2R, \tag{4.17}$$

ceea ce înseamnă că centrul de greutate al tijei trebuie „să cadă" în interiorul semicilindrului, aşa cum am precizat încă de la început.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul V

Probleme de calcul variațional

V.1 Elemente de calcul variațional

V.1.1. Funcționale. Diferențialele unei funcționale

Definiție: Se numește *funcțională* o aplicație definită pe un spațiu liniar X, sau pe o parte a lui X, cu valori în corpul scalarilor peste care este definit spațiul liniar X.

Deci, la modul cel mai simplu, putem privi o funcțională ca pe o „funcție" al cărei domeniu de definiție este o mulțime de funcții și al cărei codomeniu este o mulțime de „numere" (scalari[1]).

Din modul în care este definită rezultă că, de fapt, o funcțională este un operator.

Fie $J(y)$ o funcțională definită pe un domeniu $\mathcal{D}$ al unui spațiu Banach $\mathcal{B}$, cu valori pe dreapta reală $\mathcal{R}$.

Definiție: Se numește *spațiu Banach* un spațiu liniar normat și metric complet (completitudinea este deci asigurată în raport cu metrica).

Definiție: Se numește *spațiu complet* un spațiu liniar în care orice șir Cauchy este convergent către un element al spațiului.

Definiție: Se numește *șir Cauchy* în spațiul metric (X, d) un șir $\{x_n\}_{n\in N}$ de elemente ale lui X care satisface proprietatea: $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_\varepsilon \in N$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon,\ \ \forall\ n, m \geq n_\varepsilon$.

Definiție: Se numește *distanță* pe mulțimea X orice aplicație d definită pe $X \times X$ cu valori reale pozitive, $d: X \times X \to R_+$, care satisface proprietățile:

---

[1] Trebuie să avem în vedere aici că, în funcție de natura spațiului liniar X, scalarii acestuia nu sunt întotdeauna numere/cifre (fie ele reale sau complexe). Cu alte cuvinte, trebuie să avem grijă să înțelegem noțiunea de scalar în sensul cel mai larg (în general, scalar ≠ număr, cu toate că, în mod obișnuit, prin scalar înțelegem un număr – cel mai adesea – real).

BUJACK CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

D_1: $d(x, y)=0$ dacă şi numai dacă $x=y$, $(x, y \in X)$;

D_2: $d(x, y)=d(y, x)$, $\forall\, x, y \in X$;

D_3: $d(x, y) \le d(x, z)+d(z, y)$, $\forall\, x, y, z \in X$.

Definiție: Se numeşte *spațiu metric* orice pereche (X, d), unde X este o mulțime, iar d este o distanță definită pe X.

Definiție: Se numeşte *spațiu normat*, un spațiu liniar pe care s-a dat (s-a definit) o normă, p.

Definiție: Se numeşte *normă* orice seminormă care satisface proprietatea: $p(x)=0 \Rightarrow x=0$.

Definiție: Se numeşte *seminormă* o funcție cu valori reale, $p: X \to R$, care satisface proprietățile:

SN_1: $p(x+y) \le p(x)+p(y)$, $\forall\, x, y \in X$;

SN_2: $p(\lambda x)=|\lambda|\, p(x)$, $\forall\, x, y \in X$ şi λ un scalar nenul.

O normă se notează de obicei astfel: $p(x) \overset{not.}{=} \|x\|$.

Fie deci $J(y)$ o funcțională în condițiile precizate anterior. Fie şi $y \in \mathcal{D}$, $h \in \mathcal{B}$ astfel încât $y+h \in \mathcal{D}$.

Definiție (diferențiabilitate 1): Spunem că funcționala $J(y)$ este *diferențiabilă în „punctul"* [2] y dacă diferența $J(y+h)-J(y)$ se poate scrie astfel:

$$J(y+h)-J(y)=\delta(y, h, J)+r(y, h, J),$$

unde $\delta(y, h, J)$ este o funcțională liniară în h,

$$\delta(y, \alpha h_1+\beta h_2, J)=\alpha\, \delta(y, h_1, J)+\beta\, \delta(y, h_2, J),$$

cu α şi β doi scalari, iar $r(y, h, J)$ este o funcțională care satisface condiția

[2] Am folosit ghilimele pentru cuvântul „punct", deoarece în acest context cuvântul punct este utilizat oarecum forțat, pentru a păstra limbajul utilizat în cadrul analizei matematice a funcțiilor obişnuite. De fapt, aici acest „punct" este o funcție. Din această cauză, metaforic vorbind, am putea spune că o funcțională este „o funcție de funcții".

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{|r(y,\,h,\,J)|}{\|h\|}=0.$$

Definiţie (diferenţiabilitate 2): Spunem că funcţionala $J(y)$ este *diferenţiabilă în „punctul" y* dacă există $\delta(y,\,h,\,J)$ o funcţională liniară în h, astfel încât

$$\lim_{\|h\|\to 0}\left[J(y+h)-J(y)-\delta(y,\,h,\,J)\right]=0.$$

Definiţie: În condiţiile din definiţia de mai sus (a diferenţiabilităţii unei funcţionale într-un „punct"), funcţionala $\delta(y,\,h,\,J)$ se numeşte *diferenţiala* funcţionalei $J(y)$.

Teoremă: Dacă $\delta(y,\,h,\,J)$ există, atunci ea este unică.

Nu dăm aici demonstraţia acestei teoreme (demonstraţie care se bazează pe metoda reducerii la absurd).

Definiţie: Dacă funcţionala $r(y,\,h,\,J)$ se poate reprezenta sub forma

$$r(y,\,h,\,J)=\frac{1}{2}\delta_2(y,\,h,\,J)+r_2(y,\,h,\,J),$$

unde,

$$\delta_2(y,\,t\,h,\,J)=t^2\;\delta_2(y,\,h,\,J)$$

şi

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{|r_2(y,\,h,\,J)|}{\|h\|^2}=0,$$

atunci funcţionala $\delta_2(y,\,h,\,J)$ se numeşte *diferenţiala secundă* a funcţionalei $J(y)$.

Pentru a înţelege mai uşor aceste noţiuni vom prezenta în continuare analogia remarcabilă care există între acestea şi cele referitoare la o funcţie obişnuită.

Fie aşadar o funcţie $f: I\subset R\to R$ definită pe un interval I al axei reale şi cu valori în mulţimea numerelor reale, derivabilă în punctul $x_0\in I$. Atunci, pentru $x\neq x_0$ putem scrie:

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0). \qquad (*)$$

Deoarece funcţia $f(x)$ este derivabilă în punctul $x_0\in I$, avem:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=f'(x_0),$$

de unde, rezultă cu necesitate că

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

Dacă notăm diferența $x-x_0$ cu h, atunci $x=x_0+h$ și putem scrie:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+h\,\alpha(x_0+h)\overset{\lim_{h\to 0}\alpha(x_0+h)=0}{\simeq}hf'(x_0).$$

Funcția $g=hf'(x_0)$ (care este în mod evident liniară în h) se numește diferențiala funcției $f(x)$ în punctul x_0 și, de obicei, se notează $g\overset{not.}{=}df(x_0)$. Cu această notație, liniaritatea în h se scrie astfel:

$$(\alpha h_1+\beta h_2)f'(x_0)\equiv df\left(x_0,\ \alpha h_1+\beta h_2\right)=\left(\alpha h_1+\beta h_2\right)f'(x_0)=$$
$$=\alpha\ h_1f'(x_0)+\beta\ h_2f'(x_0)=\alpha\ df\left(x_0,h_1\right)+\beta\ df\left(x_0,h_2\right)\equiv$$
$$\equiv\alpha\ h_1f'(x_0)+\beta\ h_2f'(x_0).$$

Analogia cere următoarele corespondențe mai mult decât evidente:

$$\begin{aligned} J &\to f\\ y &\to x_0\\ h &\to h\\ \delta(y,\ h,\ J) &\to d(x_0,\ h,f)\\ r(y,\ h,\ J) &\to r(x_0,\ h,f)\end{aligned}$$

unde am folosit notațiile:

$$f'(x_0)(x-x_0)=hf'(x_0)=df\left(x_0,\ h\right)\equiv d\left(x_0,\ h,\ f\right)$$

și

$$\alpha(x)(x-x_0)=h\ \alpha\left(x_0+h\right)\equiv r\left(x_0,\ h,\ f\right).$$

Condiției de limită asupra funcționalei $r(y,\ h,\ J)$, $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\dfrac{\left|r(y,\ h,\ J)\right|}{\|h\|}=0$, îi va corespunde în cadrul acestei analogii următoarea condiție asupra funcției $\alpha(x)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{h\ \alpha\left(x_0+h\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\alpha(x)\equiv\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Amintim şi faptul că de obicei se preferă notaţia $h \overset{not.}{=} dx$, astfel că diferenţiala funcţiei f în punctul x_0 se scrie astfel: $df(x_0) = f'(x_0)dx$.

Pentru a sesiza analogia şi în ceea ce priveşte diferenţiala secundă a unei funcţionale, vom utiliza dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei $f(x)$ în jurul punctului x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + O(x-x_0)^3 = \tag{**}$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \beta(x)(x-x_0)^2,$$

unde am utilizat notaţia:

$$\beta(x)(x-x_0)^2 = \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \frac{1}{4!}f^{(iv)}(x_0)(x-x_0)^4 + \ldots$$

cu condiţia evidentă

$$\lim_{x\to x_0}\beta(x) = 0.$$

Având în vedere relaţia (*), şi dezvoltarea în serie Taylor (**) rezultă:

$$\alpha(x)(x-x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \beta(x)(x-x_0)^2.$$

Utilizând notaţia cu $h = x - x_0$, putem scrie:

$$\alpha(x)(x-x_0) = h\ \alpha(x_0+h) \equiv r(x_0,\ h,\ f) = \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + h^2\beta(x_0+h),$$

sau, dacă definim variaţia secundă (de ordinul doi[3]) a funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 prin

$$\delta_2 f = f''(x_0)(x-x_0)^2 = h^2 f''(x_0) \equiv \delta_2(x_0,\ h,\ f),$$

avem

$$r(x_0,\ h,\ f) = \frac{1}{2}\delta_2(x_0,\ h,\ f) + r_2(x_0,\ h,\ f),$$

unde am introdus notaţia evidentă

$$r_2(x_0,\ h,\ f) = h^2\beta(x_0+h).$$

Evident,

---

[3] Aceasta ar mai putea fi numită (ca să păstrăm limbajul din teoria funcţionalelor) „diferenţiala secundă" (sau de ordinul doi) a funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 şi ar putea fi notată prin $d_2 f(x_0)$.

BUJASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\delta_2(x_0,\ th,\ f)=(th)^2 f''(x_0)=t^2h^2 f''(x_0)=t^2\delta_2(x_0,\ h,\ f)$$

şi

$$\lim_{h\to 0}\frac{r_2(x_0,\ h,\ f)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\beta(x_0+h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left[\beta(x_0+h)\right]=\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0,$$

ceea ce duce analogia până la capăt, dacă, în plus, la lista de corespondențe de mai sus le adăugăm şi pe următoarele două:

$$\delta_2(y,\ h,\ J)\to\delta_2(x_0,\ h,\ f),$$

$$r_2(y,\ h,\ J)\to r_2(x_0,\ h,\ f).$$

Un exemplu de funcțională foarte des întâlnit în cadrul mecanicii analitice este $J(y)=\int_a^b f(x,\ y,\ y')\,dx$, în care, funcției $f(x,\ y,\ y')$ i se cere să satisfacă anumitor condiții de continuitate.

Fie deci funcția $f(x,\ y,\ z)$ de clasă C^2 pe domeniul $\mathcal{D}$: $a\le x\le b$, $-\infty<y,\ z<+\infty$, cu derivate parțiale în raport cu y şi z uniform continue.

Definiție (continuitatea într-un punct în limbaj $(\varepsilon,\ \eta(\varepsilon))$): Fie funcția $f:I\subset R\to R$ şi $x_0\in I$ un punct din domeniul ei de definiție. Spunem că funcția $f(x)$ este *continuă în punctul* x_0 dacă $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \eta(\varepsilon)>0$ astfel încât $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, $\forall\ x\in I$, de îndată ce $|x-x_0|<\eta(\varepsilon)$.

Observație: η depinde doar de ε dacă ne referim la continuitatea într-un singur punct. Acesta va depinde însă (în general) şi de punctul x_0 dacă ne referim la continuitatea pe întreg intervalul $I\subset R$.

Definiție (continuitatea într-un punct în limbajul vecinătăților): Fie $f:I\subset R\to R$ şi $x_0\in I$. Se spune că funcția $f(x)$ este *continuă în punctul* x_0 dacă $\forall\ U(f(x_0))$, $\exists\ V(x_0)$, astfel încât $\forall\ x\in I\bigcap V(x_0)$, $f(x)\in U(f(x_0))$.

Definiție (continuitatea într-un punct în limbajul şirurilor): Fie $f:I\subset R\to R$ şi $x_0\in I$. Se spune că funcția $f(x)$ este *continuă în punctul*

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

x_0 dacă $\forall \{x_n\}_{n\in N}$ un şir convergent la x_0, şirul $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ este convergent la $f(x_0)$.

Definiţie: Fie funcţia $f: I \subset R \to R$. Se spune că $f(x)$ este *uniform continuă pe* $I \subset R$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta(\varepsilon) > 0$, astfel încât $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, $\forall\, x', x'' \in I$ de îndată ce $|x' - x''| < \eta(\varepsilon)$.

Observaţie: η depinde doar de ε şi este independent de x' şi x'' ce satisfac $|x' - x''| < \eta(\varepsilon)$. Fie $f(x)$ doar continuă pe $I \subset R$ şi $x' \in I$. Dacă păstrăm x' fix, la un ε dat corespunde un η care se schimbă dacă ε se schimbă, dar care depinde şi de x' ales, adică $\eta = \eta(\varepsilon, x')$. Dacă x' parcurge mulţimea I, ε fiind fix, mulţimea valorilor lui $\eta(\varepsilon, x')$ are o margine inferioară, $\eta_0(\varepsilon) = \inf\limits_{\substack{\forall\, x' \in I \\ \varepsilon \text{ fix}}} \{\eta(\varepsilon, x')\}$. Dacă $\eta_0(\varepsilon) > 0$, spunem că funcţia $f(x)$ este uniform continuă pe I.

Teoremă: O funcţie continuă pe un interval compact[4] este uniform continuă pe acel interval (de exemplu: $f(x) = x^3$, $x \in [1, 3]$).

Teorema creşterilor finite (Lagrange): Fie funcţia $f: I \subset R \to R$ şi $a, b \in I$ două puncte din intervalul I. Dacă

L_1: funcţia f este continuă pe $[a, b]$ şi

L_2: funcţia f este derivabilă pe (a, b),

atunci[5] $\exists^*\, c \in (a, b)$, astfel încât

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Observaţie: Adesea se consideră următoarele formulări echivalente pentru relaţia $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$:

1. $f(x) - f(a) = (x - a) f'(\xi)$, $a < \xi < x$;
2. $f(a + h) - f(a) = h f'(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$.

Definiţii: Spunem că funcţia $f: I \subset R \to R$ este *derivabilă* în punctul $x_0 \in I$, dacă raportul $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ are limită finită în punctul x_0. Limita

---

[4] Un interval compact este un interval închis şi mărginit.

[5] Simbolul $\exists^*$ înseamnă „există cel puţin".

însăşi se numeşte *derivata* funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 şi se notează cu $f'(x_0)$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

Revenind, să considerăm funcţionala:

$$J(y)=\int_a^b f(x, y, y')dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor $y=y(x)\in C^2[a, b]$, care satisfac în plus condiţiilor $y(a)=0$, $y(b)=0$. Dacă definim drept normă pe spaţiul acestor funcţii mărimea

$$\|y\|=\max\left\{\sup_{x\in[a, b]}|y(x)|,\ \sup_{x\in[a, b]}|y'(x)|\right\},$$

atunci mulţimea acestor funcţii formează un spaţiu Banach[6] $\mathcal{B}$.

Fie acum $h(x)$ o funcţie din acest spaţiu Banach. Evident, $y(x)+h(x)\in\mathcal{B}$ şi atunci este bine definită funcţionala

$$J(y+h)=\int_a^b f(x, y+h, y'+h')\,dx,$$

deci putem calcula diferenţa:

$$J(y+h)-J(y)=\int_a^b f(x, y+h, y'+h')\,dx-\int_a^b f(x, y, y')dx=$$

$$=\int_a^b\left[f(x, y+h, y'+h')-f(x, y, y')\right]dx.$$

Aplicând teorema creşterilor finite sub integrală, rezultă:

$$J(y+h)-J(y)=\int_a^b\left[f(x, y+h, y'+h')-f(x, y, y')\right]dx=$$

$$=\int_a^b\left[h\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta h, y'+\theta h')+h'\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y+\theta h, y'+\theta h')\right]dx, \tag{5.1}$$

[6] Am considerat ca şi spaţiu liniar de definiţie a unei funcţionale un spaţiu de tip Banach, deoarece pe o astfel de structură matematică avem definite toate noţiunile matematice utile în cadrul mecanicii analitice şi anume: noţiunea de convergenţă, cea de continuitate, cea de derivabilitate şi cea de integrabilitate.

BUCHAREST POLYTECHNICAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $0<\theta<1$.
Utilizând notațiile:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{*} \overset{not.}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y+\theta h,\, y'+\theta h'),\ 0<\theta<1 \tag{5.2}$$

și

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^{*} \overset{not.}{=} \frac{\partial f}{\partial y'}(x,\, y+\theta h,\, y'+\theta h'),\ 0<\theta<1, \tag{5.3}$$

relația (5.1) se poate scrie mai simplu astfel:

$$J(y+h)-J(y)=\int_a^b\left[h\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{*}+h'\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^{*}\right]dx,\ 0<\theta<1.$$

Introducând acum noi notații:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y+\theta h,\, y'+\theta h')-\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y,\, y') \overset{not.}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{*}-\frac{\partial f}{\partial y}=f_0$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(x,\, y+\theta h,\, y'+\theta h')-\frac{\partial f}{\partial y'}(x,\, y,\, y') \overset{not.}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^{*}-\frac{\partial f}{\partial y'}=f_1$$

și ținând cont de faptul că $\frac{\partial f}{\partial y}$ și $\frac{\partial f}{\partial y'}$ sunt uniform continue, rezultă că $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \eta(\varepsilon)>0$, astfel încât:

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{*}-\frac{\partial f}{\partial y}\right|=|f_0|<\varepsilon$$

și

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^{*}-\frac{\partial f}{\partial y'}\right|=|f_1|<\varepsilon,$$

de îndată ce

$$|(y+\theta h)-y|=|\theta h|<|h|<\eta(\varepsilon)$$

și, respectiv,

$$|(y'+\theta h')-y'|=|\theta h'|<|h'|<\eta(\varepsilon),$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică – ținând cont de definiția normei – de îndată ce $\|h\| < \eta(\varepsilon)$. Cu notațiile (5.2) şi (5.3) avem,

$$J(y+h)-J(y)=\int_a^b\left(h\,\frac{\partial f}{\partial y}+h'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx+\int_a^b\left(hf_0+h'f_1\right)dx. \qquad (5.4)$$

Utilizând proprietățile integralelor, se poate cu uşurință verifica faptul că integrala

$$L(h)=\int_a^b\left(h\,\frac{\partial f}{\partial y}+h'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

este liniară în funcția h. Într-adevăr,

$$L(\alpha h_1+\beta h_2)=\int_a^b\left[(\alpha h_1+\beta h_2)\frac{\partial f}{\partial y}+(\alpha h_1'+\beta h_2')\frac{\partial f}{\partial y'}\right]dx=$$

$$=\alpha\int_a^b\left(h_1\frac{\partial f}{\partial y}+h_1'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx+\beta\int_a^b\left(h_2\frac{\partial f}{\partial y}+h_2'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx=$$

$$=\alpha L(h_1)+\beta L(h_2).$$

Apoi,

$$\left|\int_a^b\left(hf_0+h'f_1\right)dx\right|\le\max\left(|h|,|h'|\right)\int_a^b\left(|f_0|+|f_1|\right)dx,$$

adică,

$$\frac{1}{\|h\|}\left|\int_a^b\left(hf_0+h'f_1\right)dx\right|\le\int_a^b\left(|f_0|+|f_1|\right)dx\le 2\varepsilon(b-a). \qquad (5.5)$$

Deci (5.4) dă o descompunere a lui $J(y+h)-J(y)$ într-o funcțională liniară în $h(x)$ şi o a doua ce satisface condiția (5.5). Cu alte cuvinte, condițiile de diferențiabilitate sunt satisfăcute, iar diferențiala lui $J(y)$ este

$$\delta(y,\,h,\,J)=\int_a^b\left(h\,\frac{\partial f}{\partial y}+h'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx. \qquad (5.6)$$

Având în vedere faptul că funcția $f(x,y,y')$ este de clasă C^2 pe domeniul ei de definiție, $f\in C^2(\mathfrak{D})$, unde $\mathfrak{D}$: $a\le x\le b$, $-\infty<y,\,y'<+\infty$, putem integra prin părți termenul al doilea din (5.6) şi obținem:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int_a^b h' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \left(h \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_a^b - \int_a^b h \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx .$$

Dar

$$\left(h \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_a^b = h(b) \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) - h(a) \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(a), y'(a))$$

și cum $h(x) \in \mathcal{B}$, avem $h(a) = 0$ și $h(b) = 0$, ceea ce conduce la

$$\delta(y, h, J) = \int_a^b h(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx . \tag{5.7}$$

Generalizarea acestui rezultat la cazul unei funcționale de tipul:

$$\int_a^b f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) dx ,$$

în care funcția de $(n+2)$ variabile, $f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)$ este o funcție de clasă C^n pe domeniul ei de definiție, $\mathcal{D}$: $a \le x \le b$, $-\infty < y, y', ..., y^{(n)} < +\infty$, se poate face cu ușurință. Astfel, printr-un raționament analog se poate deduce expresia diferențialei acestei funcționale,

$$\delta(y, h, J) = \int_a^b h(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right) \right] dx . \tag{5.8}$$

Alte exemple de funcționale mai des întâlnite (împreună cu diferențialele lor) sunt:

i) $J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt$, unde funcția x, care depinde de variabila (parametrul) t este o funcție vectorială (cu n componente), $x(t) \equiv \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)$ și $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$.

Prin calcule analoage celor efectuate în cazul funcționalei $J(y)$, pentru diferențiala funcționalei $J(x)$ rezultă expresia:

$$\delta(x, h, J) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} h_i(t) \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] dt ; \tag{5.9}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ii) $J(z)=\int_{\Omega} f\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\right) dx\, dy$, pentru care se obține:

$$\delta(z, h, J)=\int_{\Omega} h\left[\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right] dx\, dy, \tag{5.10}$$

în care $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ și $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

V.1.2. Extremele funcționalelor

A) Condiții necesare de extremum

Fie $J(y)$ o funcțională diferențiabilă definită pe un spațiu Banach $\mathcal{B}$.

Definiție: y_0 se numește „punct" de maxim relativ al funcționalei $J(y)$ dacă $\exists\, V(y_0)$ o vecinătate a lui y_0, astfel încât, $\forall\, y \in V(y_0)$,

$$J(y) \le J(y_0).$$

Definiție: y_0 se numește „punct" de minim relativ al funcționalei $J(y)$ dacă $\exists\, V(y_0)$ o vecinătate a lui y_0, astfel încât, $\forall\, y \in V(y_0)$,

$$J(y) \ge J(y_0).$$

Teoremă: Dacă $J(y)$ este o funcțională diferențiabilă și y_0 este un „punct" în care $J(y)$ este extremă, atunci, $\forall\, h \in \mathcal{B}$,

$$\delta(y_0, h, J)=0. \tag{5.11}$$

Deci, o condiție necesară pentru ca y_0 să fie un punct de extremum pentru funcționala $J(y)$ este ca diferențiala funcționalei, $\delta(y, h, J)$, să se anuleze în acest punct.

Definiție: „Punctele" y_0 în care este satisfăcută condiția (5.11) se numesc *extremale.*

Cu alte cuvinte, extremalele unei funcționale sunt acele funcții $y_0(x)$ care anulează prima diferențială a funcționalei.

BCU MAS / CLUJ-NAPOCA UNIVERSITY LIBRARY

B) Condiții suficiente de extremum

Teoremă: Dacă funcționala $J(y)$ admite diferențiala primă $\delta(y, h, J)$ și diferențiala secundă $\delta_2(y, h, J)$, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca „punctul" y_0 să facă pe $J(y)$ maximă este ca $\forall\, h \in \mathcal{B}$, să avem

$$\delta(y_0, h, J) = 0,\ r(y_0, h, J) \le 0,$$

iar pentru ca „punctul" y_0 să facă pe $J(y)$ minimă este ca $\forall\, h \in \mathcal{B}$, să avem

$$\delta(y_0, h, J) = 0,\ r(y_0, h, J) \ge 0.$$

Într-adevăr, pentru că $J(y)$ admite diferențială primă, avem:

$$J(y_0 + h) - J(y_0) = \delta(y_0, h, J) + r(y_0, h, J).$$

Dar $\delta(y_0, h, J) = 0$ este condiția necesară ca y_0 să fie extremală. Rămâne

$$J(y_0 + h) - J(y_0) = r(y_0, h, J).$$

Deci, pentru ca y_0 să fie punct de

- maxim relativ, adică pentru ca $J(y_0 + h) - J(y_0) \le 0$ este necesar și suficient ca $r(y_0, h, J) \le 0$;
- minim relativ, adică pentru ca $J(y_0 + h) - J(y_0) \ge 0$ este necesar și suficient ca $r(y_0, h, J) \ge 0$;

Se poate arăta că, pentru a fi îndeplinite aceste condiții, trebuie să avem:

1) Pentru ca $r(y_0, h, J) \le 0$, $\begin{cases} - \text{ condiția necesară : } \delta_2(y_0, h, J) \le 0, \\ - \text{ condiția suficientă : } \delta_2(y_0, h, J) \le -C\|h\|^2 \end{cases}$

2) Pentru ca $r(y_0, h, J) \ge 0$, $\begin{cases} - \text{ condiția necesară : } \delta_2(y_0, h, J) \ge 0, \\ - \text{ condiția suficientă : } \delta_2(y_0, h, J) \ge C\|h\|^2, \end{cases}$

unde $C > 0$ este o constantă.

Teoremă: Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu din spațiul n-dimensional abstract $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ un punct din acest domeniu și $\mathcal{H}$ mulțimea funcțiilor $h(x) = h(x_1, x_2, ..., x_n)$ continue pe domeniul Ω și care, în plus,

BCU "I. CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

se anulează pe frontiera $\partial\Omega$ a lui Ω. În aceste condiții, dacă $A(x)$ este o funcție continuă pe Ω și

$$\int_{\Omega} h(x)A(x)\,dx = 0,\ \forall\, h(x) \in \mathcal{H},$$

atunci $A(x) = 0,\ \forall\, x \in \Omega$.

Fie funcționala $J(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$. Condiția necesară de extremum pentru această funcțională este ca diferențiala ei, (5.7), să se anuleze:

$$\delta(y, h, J) = \int_a^b h(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx \equiv G(y) = 0,\ \forall\, h(x).$$

Întrucât:

- $h \in C^2[a, b]$;
- $h(a) = 0,\ h(b) = 0$;
- $f \in C^2\left(a \le x \le b,\ -\infty < y, y' < \infty\right)$, (deci $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$ este continuă),

ne situăm exact în condițiile teoremei anterioare, care ne asigură că, pentru ca $\int_a^b h(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx = 0,\ \forall\, h(x)$, este necesar și suficient ca

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{5.12}$$

care este numită *ecuația Euler a extremalelor.* Aceasta se mai poate scrie astfel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{5.13}$$

Pentru funcționala

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt,$$

unde $x(t) \equiv \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)$, ecuațiile extremalelor sunt:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}\right)=0,\quad \left(i=\overline{1,n}\right).$$

Aceste ecuaţii au fost deduse pentru prima dată de către Euler în anul 1744 şi ulterior au fost utilizate de către Lagrange în mecanică. În prezent ele sunt cunoscute sub denumirea de *ecuaţiile Euler-Lagrange.*

Pentru funcţionala

$$\int_a^b f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)\,dx,$$

condiţia necesară de extremum (ecuaţia Euler a extremalelor) este

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)+...+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)=0.$$

Fie o ecuaţie diferenţială de ordinul n, dată sub formă implicită,

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)=0.$$

Definiţie: Se numeşte *integrală intermediară* (sau *de ordin* k) a ecuaţiei date, o ecuaţie diferenţială de ordin $n-k$, ce conţine $k\geq 1$ constante arbitrare,

$$\psi\left(x, y, y', ..., y^{(n-k)}, C_1, C_2, ..., C_k\right)=0$$

şi care este verificată de integrala generală:

$$\varphi\left(x, y, C_1, C_2, ..., C_n\right)=0$$

a ecuaţiei diferenţiale date.

Pentru $k=1$, ecuaţia diferenţială de ordinul $n-1$,

$$\chi\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, C\right)=0,$$

care depinde de o singură constantă de integrare, C, se numeşte *integrală primă* a ecuaţiei diferenţiale $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)=0$.

Integrale prime ale ecuaţiilor Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right)=0,\quad \left(i=\overline{1,n}\right):$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1. Să presupunem că funcția f nu depinde explicit de y_i. Atunci $\frac{\partial f}{\partial y_i}=0$, iar din ecuațiile Euler-Lagrange rezultă că $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right)=0$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}=const. \tag{5.14}$$

2. În cazul în care funcția f nu depinde explicit de variabila independentă x, o integrală primă a ecuațiilor Euler-Lagrange este

$$\dot{y}_i\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}-f=const. \tag{5.15}$$

Într-adevăr, să derivăm total în raport cu x relația (5.15). Avem:

$\frac{d}{dx}\left(\dot{y}_i\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right)-\frac{d}{dx}f=0$, sau, $\ddot{y}_i\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}+\dot{y}_i\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right)-\frac{\partial f}{\partial y_i}\dot{y}_i-\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\ddot{y}_i=0$,

sau încă, $-\dot{y}_i\left[\frac{\partial f}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right)\right]=0$ *q.e.d.*

Observație: Pentru a determina diferențiala funcționalei:

$$J(y)=\int_a^b f(x, y, y')dx$$

definită pe mulțimea funcțiilor $y=y(x)\in C^2[a, b]$, am considerat că aceste funcții satisfac în plus condițiilor $y(a)=0$, $y(b)=0$. Toate considerațiile pe care le-am făcut pentru a deduce ecuația Euler a extremalelor acestei funcționale rămân valabile și dacă vom considera condițiile mai puțin restrictive $y(a)=a_1\neq 0$ și $y(b)=b_1\neq 0$. Esențiale sunt însă condițiile $h(a)=0$, $h(b)=0$, care cer ca, dacă funcția $y_0=\varphi(x)$ trece prin punctele $P(a, a_1)$ și $Q(b, b_1)$, atunci și curba $y(x)=\varphi(x)+h(x)=$ $=y_0(x)+h(x)$ să treacă prin aceleași puncte (vezi Fig. V.1).

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

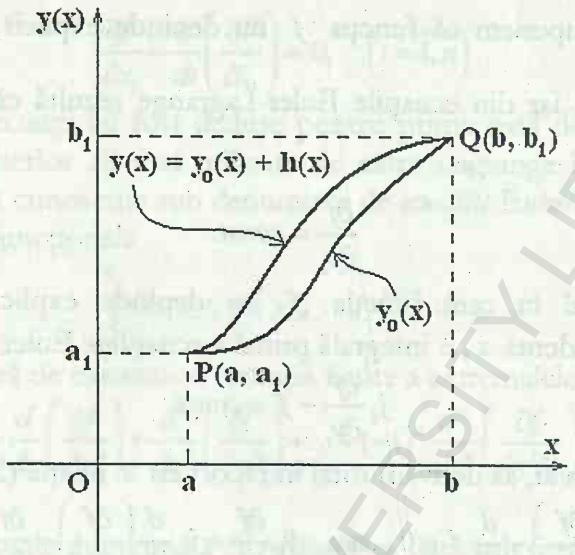


Fig. V.1

C) Extremele condiționate ale funcționalelor

Fie funcționala $J(y)=\int_a^b f(x, y, y')dx$, în care funcția $y=y(x)$ este supusă unei constrângeri, care se exprimă prin intermediul unei alte funcționale de același tip (definită pe același domeniu) ca $J(y)$, anume,

$$G(y)=\int_a^b g(x, y, y')dx = const. \equiv C.$$

Pentru a determina extremele condiționate ale acestei funcționale vom apela la următoarea

Teoremă: Pentru ca y_0 să fie un „punct" de extremum a funcționalei $J(y)$, unde $y(x)$ satisface condiției suplimentare $G(y)=C$, este necesar ca y_0 să anuleze diferențiala funcționalei $W(y)=J(y)-\lambda G(y)$, unde $\lambda \neq 0$ este un scalar oarecare nenul.

Deci, pentru determinarea extremelor condiționate ale unei funcționale, $J(y)$, se caută extremele libere ale unei noi funcționale,

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$W(y)$, construită cu ajutorul funcționalei inițiale și a funcționalei care exprimă condiția (constrângerea), $G(y)$, astfel:

$$W(y)=J(y)-\lambda G(y)=\int_a^b\left[f(x,y,y')-\lambda g(x,y,y')\right]dx=\int_a^b w(x,y,y')dx,$$

unde prin w am notat funcția $w=f-\lambda g$, cu λ scalar oarecare diferit de zero. Soluția unei astfel de probleme implică determinarea atât a extremalelor condiționate ale funcționalei $J(y)$, cât și a scalarului $\lambda\neq 0$. Acest lucru se poate face utilizând teorema de mai sus, care furnizează sistemul de două „ecuații":

$$\begin{cases}\delta(y,h,W)=0,\\ G(y)=0,\end{cases}$$

cu două necunoscute: y_0 (extremala) și λ.

V.2. Probleme a căror rezolvare necesită elemente de calcul variațional

1. Problema brahistocronei

Cronologic vorbind, această problemă – care a fost formulată pentru prima dată de către Jean Bernoulli în anul 1696 – este prima problemă de calcul variațional. Ea se enunță astfel:

Dintre toate curbele situate într-un plan vertical și care trec prin două puncte date (fixate) să se determine aceea de-a lungul căreia o particulă grea se deplasează fără frecare în timpul cel mai scurt.

De altfel, cuvântul brahistocronă provine din alipirea a două cuvinte grecești, anume: „brachistos" (care înseamnă „cel mai scurt") și „chronos" (care înseamnă „timp").

BCU „Al. I. Cuza" IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

Alegând un sistem de referinţă ca în Fig. V.2, unde cele două puncte fixe sunt (fără a restrânge cu nimic generalitatea problemei) $P_0(0,\ 0)$ şi $P_1(x_1,\ y_1)$, putem scrie:

$$ds = v\,dt \tag{5.16}$$

unde v este viteza particulei de-a lungul curbei, iar dt este intervalul infinitezimal de timp în care particula a parcurs distanţa infinitezimală de-a lungul curbei, ds.

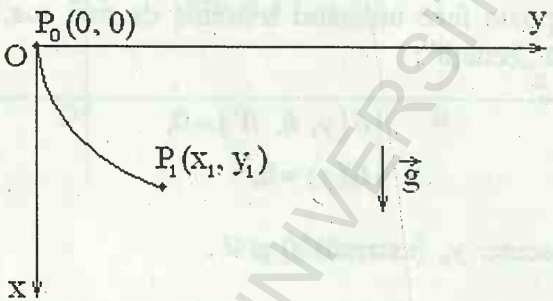


Fig. V.2

De aici, pentru întreg intervalul temporal necesar particulei să se deplaseze din $P_0(0,\ 0)$ în $P_1(x_1,\ y_1)$ obţinem:

$$t = \int_0^t dt = \int_{P_0}^{P_1} \frac{ds}{v}. \tag{5.17}$$

Viteza v poate fi obţinută din teorema variaţiei energiei cinetice sau din legea conservării energiei. Ţinând cont că particula pleacă din repaus, în ambele cazuri se obţine:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx, \tag{5.18}$$

de unde,

$$v = \sqrt{2gx}. \tag{5.19}$$

Pe de altă parte,

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2\left(1 + y'^2\right),$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $y' = \frac{dy}{dx}$. De aici rezultă că:

$$ds = dx\sqrt{1+y'^2}\,. \tag{5.20}$$

Introducând acum (5.19) şi (5.20) în relația (5.17), pentru timpul căutat, t, se obține relația

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}\,dx = \int_0^{x_1} f(x, y')\,dx\,. \tag{5.21}$$

După cum se poate observa, timpul t a fost obținut sub forma unei funcționale a cărei funcție „caracteristică" $f(x, y')$ nu depinde de variabila dependentă $y = y(x)$. Aceasta înseamnă că pentru ecuația Euler a extremalelor,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

avem următoarea integrală primă:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = const.\,, \tag{5.22}$$

unde

$$f(x, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}\,. \tag{5.23}$$

Considerând pentru constanta din relația (5.22) valoarea $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, unde a este o nouă constantă şi ținând seama de (5.23), relația (5.22) devine

$$\frac{y'}{\sqrt{x\left(1+y'^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}\,,$$

de unde, prin separarea variabilelor obținem:

$$y = \int_0^x \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx\,. \tag{5.24}$$

Pentru rezolvarea acestei integrale vom face schimbarea de variabilă

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=u. \tag{5.25}$$

Avem,

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{2a-x}+\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{2a-x}}}{2a-x}dx=du,$$

sau,

$$\frac{a}{\sqrt{x}(2a-x)^{3/2}}dx=du,$$

de unde,

$$dx=\frac{du}{a}(2a-x)^{3/2}\sqrt{x}. \tag{5.26}$$

Din (5.25) rezultă că

$$x=\frac{2au^2}{1+u^2}, \tag{5.27}$$

care, introdusă în (5.26) conduce la

$$dx=\frac{du}{a}\frac{2a}{1+u^2}\sqrt{\frac{2a}{1+u^2}}\frac{u\sqrt{2a}}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{4au}{(1+u^2)^2}du. \tag{5.28}$$

Cu (5.25) și (5.28) în (5.24) obținem:

$$y=\int_0^u\frac{4au^2}{(1+u^2)^2}du=-2a\int_0^u ud\left(\frac{1}{1+u^2}\right)=-2a\left[\left(\frac{u}{1+u^2}\right)\Big|_0^u-\int_0^u\frac{du}{1+u^2}\right]=$$

$$=-2a\left[\frac{u}{1+u^2}-(arctg\ u)\Big|_0^u\right]=-2a\left(\frac{u}{1+u^2}-arctg\ u\right).$$

Făcând acum o nouă schimbare de variabilă prin

$$u=tg\frac{\theta}{2},$$

din relația anterioară rezultă:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$y=-2a\left(\frac{tg\frac{\theta}{2}}{1+tg^2\frac{\theta}{2}}-\frac{\theta}{2}\right)=-2a\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=$$

$$=-2a\left(\frac{\sin\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=a(\theta-\sin\theta).$$

iar din relația (5.27) pentru x rezultă

$$x=\frac{2au^2}{1+u^2}=2a\frac{tg^2\frac{\theta}{2}}{1+tg^2\frac{\theta}{2}}=2a\sin^2\frac{\theta}{2}=a(1-\cos\theta).$$

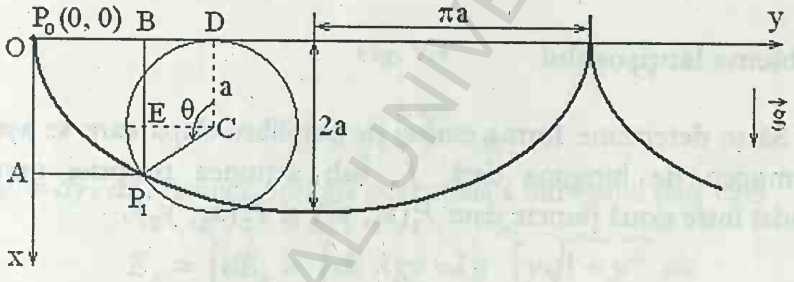


Fig. V.3

Aşadar, am obținut

$$\begin{cases} x=a(1-\cos\theta), \\ y=a(\theta-\sin\theta), \end{cases} \tag{5.29}$$

care reprezintă ecuațiile parametrice ale unei cicloide având ca bază axa Oy şi concavitatea în sus (vezi Fig. V.3). Constanta până aici arbitrară a este chiar raza cercului care, prin rostogolire fără alunecare pe axa Oy generează cicloida. Într-adevăr, după cum rezultă din Fig. V.3, cicloida va fi generată de punctul P_1 (fix față de cercul de rază a, care se rostogolește fără frecare pe axa Oy). În plus,

BCU "Al. I. Cuza" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$x = \|OA\| = \|DC\| + \|EP_1\| = a + \|CP_1\| \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= a - a\cos\theta = a(1 - \cos\theta),$$

iar pentru y avem

$$y = \|OB\| = \|OD\| - \|BD\| = \widehat{DP_1} - \|BD\| = \widehat{DP_1} - \|EC\| =$$

$$= a\theta - a\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = a(\theta - \sin\theta).$$

Aşadar, curba de-a lungul căreia o particulă se deplasează fără frecare, între două puncte situate la cote diferite în câmp gravitaţional, în timpul cel mai scurt, este cicloida (un arc de cicloidă).

2. Problema lănţişorului

Să se determine forma curbei de echilibru după care se aşează un lanţ omogen de lungime dată, l, sub acţiunea propriei greutăţi şi suspendat între două puncte date $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$.

Rezolvare

Condiţia de echilibru a lănţişorului este ca energia lui potenţială gravitaţională să fie extremă (în acest caz, minimă). Să evaluăm această energie potenţială. Pentru aceasta vom împărţi lănţişorul în elemente infinitezimale de lungime, astfel încât, de-a lungul fiecărui element de lungime, să poată fi neglijată variaţia coordonatei verticale y (vezi Fig. V.4).

Atunci, considerând planul xOz ca nivel de referinţă pentru energia potenţială, elementul de lungime dl reprezentat în Fig. V.4 va avea energia potenţială gravitaţională

$$dE_p = dm\, g\, y = dl\, \lambda\, g\, y, \qquad (5.30)$$

unde $\lambda = l/m$ este masa unităţii de lungime a lănţişorului, m fiind masa lui. Deoarece

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

considerând numai soluția pozitivă, putem scrie:

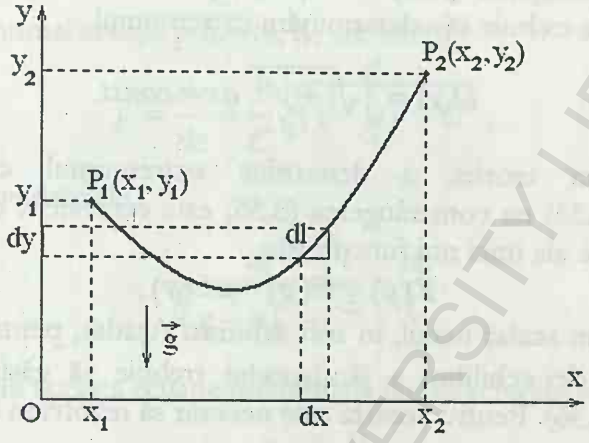


Fig. V.4

$$dl = \sqrt{1+y'^2}\, dx, \tag{5.31}$$

unde $y' = dy/dx$. Atunci, energia potențială a întregului lanț va fi

$$E_p = \int_{P_1}^{P_2} dE_p = \int_{P_1}^{P_2} dl\ \lambda g y = \lambda g \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx \tag{5.32}$$

și se observă că aceasta este dată (lăsând la o parte constanta multiplicativă λg, care nu influențează în nici un fel extremele funcționalei energiei potențiale) de funcționala:

$$E(y) = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx. \tag{5.33}$$

Așadar, pentru a rezolva problema trebuie să impunem condiția ca funcționala (5.33) să fie extremă. Dar, condiția care exprimă faptul că lănțișorul are o lungime dată (constantă),

$$l = \int_{P_1}^{P_2} dl = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx \tag{5.34}$$

reprezintă o constrângere pentru funcțiile $y = y(x)$ care realizează extremumul funcționalei energiei potențiale. Deci, avem de a face cu o

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

problemă de extremum condiționat. După cum se poate observa cu ușurință, constrângerea (5.34) se exprimă printr-o funcțională de același tip cu cea căreia trebuie să-i determinăm extremumul,

$$L(y)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=const. \tag{5.35}$$

Conform teoriei, a determina extremumul condiționat al funcționalei (5.33) cu constrângerea (5.35) este echivalent cu a determina extremele libere ale unei noi funcționale,

$$F(y)=E(y)-\mu L(y), \tag{5.36}$$

unde μ este un scalar nenul, în rest arbitrar. Așadar, pentru a determina forma curbei de echilibru a lănțișorului trebuie să găsim extremalele funcționalei (5.36). Pentru aceasta este necesar să rezolvăm ecuația Euler a extremalelor:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0, \tag{5.37}$$

pentru această funcțională:

$$F(y)=\int_{x_1}^{x_2}\left[(y-\mu)\sqrt{1+y'^2}\right]dx=\int_{x_1}^{x_2}f(y,y')\,dx,$$

unde

$$f(y,y')=(y-\mu)\sqrt{1+y'^2}.$$

Întrucât $f(y,y')$ nu depinde explicit de variabila independentă x, înseamnă că avem următoarea integrală primă:

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=const.\equiv C, \tag{5.38}$$

care se mai scrie:

$$y'\frac{(y-\mu)\not{2}y'}{\not{2}\sqrt{1+y'^2}}-(y-\mu)\sqrt{1+y'^2}=C,$$

sau, aducând la același numitor,

$$y-\mu=-C\sqrt{1+y'^2},$$

de unde, prin ridicare la pătrat, pentru y'^2 obținem:

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$y'^2 = \frac{1}{C^2}\left[(y-\mu)^2 - C^2\right].$$

Considerând numai soluția pozitivă, de aici avem:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C}\sqrt{(y-\mu)^2 - C^2},$$

sau, separând variabilele,

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-\mu)^2 - C^2}} = \frac{dx}{C}.$$

Pentru a integra această ecuație diferențială facem schimbarea de variabilă

$$y - \mu = C\ ch\ u. \tag{5.39}$$

Deci, $dy = C\ sh\ u\ du$ și obținem:

$$\int \frac{C\ sh\ u\ du}{C\ sh\ u} = \frac{x}{C} + C_1,$$

sau,

$$u = \frac{x}{C} + C_1,$$

de unde,

$$ch\ u = ch\left(\frac{x}{C} + C_1\right).$$

Introducând acest rezultat în relația (5.39) obținem extremalele căutate,

$$y = \mu + C\ ch\left(\frac{x}{C} + C_1\right). \tag{5.40}$$

Evident, doar una dintre curbele acestei familii infinite (ca număr de funcții) va fi aceea care ne interesează pe noi, anume, aceea care trece prin punctele $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ și care, în plus, satisface constrângerii

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(5.34). Impunând aceste condiții, rezultă următorul sistem de trei ecuații algebrice pentru cele trei constante necunoscute (μ, C și C_1) din (5.40):

$$\begin{cases} y_1 = \mu + C\ ch\left(\dfrac{x_1}{C} + C_1\right), \\ y_2 = \mu + C\ ch\left(\dfrac{x_2}{C} + C_1\right), \\ l = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + sh^2\left(\frac{x}{C} + C_1\right)}\, dx, \end{cases}$$

care se mai scrie astfel:

$$\begin{cases} y_1 = \mu + C\ ch\left(\dfrac{x_1}{C} + C_1\right), \\ y_2 = \mu + C\ ch\left(\dfrac{x_2}{C} + C_1\right), \\ l = C\ sh\left(\dfrac{x_2}{C} + C_1\right) - C\ sh\left(\dfrac{x_1}{C} + C_1\right). \end{cases}$$

Lăsăm în seama cititorului rezolvarea acestui sistem. Prin înlocuirea expresiilor constantelor μ, C și C_1 (soluții ale sistemului de mai sus) se obține rezultatul final al problemei. Se observă că forma curbei de echilibru a lănțișorului este dată de funcția cosinus hiperbolic. Din această cauză curbei cosinus hiperbolic i se mai spune și „curba lănțișor".

3. Problema izoperimetriei cercului

Să se determine forma curbei plane, de lungime dată, l, care închide suprafața de arie maximă.

Rezolvare

Conform Fig. V.5, aria suprafeței delimitată de curba închisă (Γ) este dată de relația

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

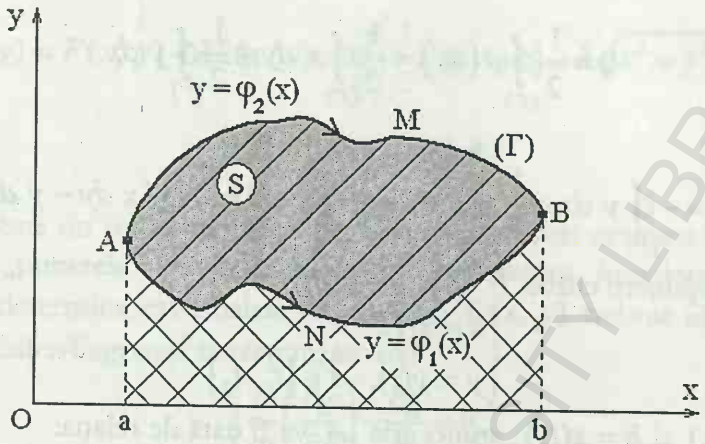


Fig. V.5

$$\mathcal{A}=\int_a^b \varphi_2(x)dx-\int_a^b \varphi_1(x)dx=-\int_b^a \varphi_2(x)dx-\int_a^b \varphi_1(x)dx=$$

$$=-\left[\int_a^b \varphi_1(x)dx+\int_b^a \varphi_2(x)dx\right]=-\left[\int_{\widehat{ANB}} \varphi_1(x)dx+\int_{\widehat{BMA}} \varphi_2(x)dx\right]=$$

$$=-\oint_{(\Gamma)} y\,dx,$$

unde am scris aria căutată ca diferența a două arii: una[7], a suprafeței mărginite de graficul funcției $y=\varphi_2(x)$ (partea superioară, situată între punctele A și B, a curbei închise Γ), axa absciselor și cele două drepte din planul xOy de ecuații $x=a$ și $x=b$, și cealaltă[8], a suprafeței mărginite de graficul funcției $y=\varphi_1(x)$ (partea inferioară, situată între punctele A și B, a curbei închise Γ), axa absciselor și aceleași două drepte din planul xOy de ecuații $x=a$ și $x=b$.

Pentru a scrie într-o formă mai simetrică relația de mai sus, îi vom aduna „zero" scris astfel

[7] Este vorba despre aria suprafeței haşurate o singură dată, cu linii paralele cu prima bisectoare.
[8] Este vorba despre aria suprafeței dublu haşurate (în carouri).

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$0=\frac{1}{2}\oint_{(\Gamma)} d(xy)=\frac{1}{2}\oint_{(\Gamma)} x\,dy+\frac{1}{2}\oint_{(\Gamma)} y\,dx$$

și obținem:

$$\mathcal{A}=-\oint_{(\Gamma)} y\,dx+\frac{1}{2}\oint_{(\Gamma)} x\,dy+\frac{1}{2}\oint_{(\Gamma)} y\,dx=\frac{1}{2}\oint_{(\Gamma)}(x\,dy-y\,dx). \quad (5.41)$$

Dacă presupunem curba Γ dată parametric,

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in[t_1,\ t_2] \end{cases}$$

cu $a=x(t_1)$ și $b=x(t_2)$, atunci aria $\mathcal{A}$ va fi dată de relația:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\oint_{(\Gamma)}(x\,\dot{y}-y\,\dot{x})\,dt. \quad (5.42)$$

Problema revine deci la a determina extremalele funcționalei:

$$F(x,\ y)=\frac{1}{2}\oint_{(\Gamma)}(x\dot{y}-y\dot{x})dt, \quad (5.43)$$

cu condiția ca perimetrul curbei Γ să aibă o lungime dată:

$$l=\oint_{(\Gamma)} dl=\oint_{(\Gamma)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\oint_{(\Gamma)}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt,$$

unde $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ și $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$.

Așadar, avem din nou o problemă de extremum condiționat pentru o funcțională. Modul de rezolvare a problemei este identic cu cel din problema precedentă. Funcționala care exprimă constrângerea este

$$L(x,\ y)=\oint_{(\Gamma)}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=const.\equiv l \quad (5.44)$$

și se observă că este de același tip cu funcționala căreia trebuie să-i determinăm extremalele. Conform teoriei generale trebuie să construim o nouă funcțională,

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$G(x, y) = F(x, y) - \lambda L(x, y) = \oint_{(\Gamma)} \left[\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right] dt =$$

$$= \oint_{(\Gamma)} g\big(x(t), y(t)\big)\, dt,$$

(unde λ este un scalar nenul, în rest arbitrar) ale cărei extreme libere sunt totodată „punctele" de extrem condiționat pentru funcționala (5.43). Pentru a determina extremalele funcționalei $G(x, y)$ trebuie să rezolvăm ecuațiile Euler-Lagrange corespunzătoare:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \dot{y}}\right) - \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{5.45}$$

unde

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,.$$

Efectuând derivatele necesare, (5.45) devine:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{2}y - \lambda \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) - \dfrac{1}{2}\dot{y} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left(+\dfrac{1}{2}x - \lambda \dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) + \dfrac{1}{2}\dot{x} = 0, \end{cases}$$

sau,

$$\begin{cases} \ddot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \dot{x}\dfrac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ -\dot{y} - \lambda \dfrac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 0, \\ \ddot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \dot{y}\dfrac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ +\dot{x} - \lambda \dfrac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 0, \end{cases}$$

sau încă,

BCU IAȘI / CENTRALA UNIVERSITARĂ

$$\begin{cases} \dot{y}\left[-1-\lambda\dfrac{\ddot{x}\dot{y}-\ddot{y}\dot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}\right]=0, \\ \dot{x}\left[+1+\lambda\dfrac{\ddot{x}\dot{y}-\ddot{y}\dot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}\right]=0. \end{cases} \tag{5.46}$$

Soluțiile care derivă din $\dot{x}=0$ și $\dot{y}=0$ nu sunt acceptabile, astfel că rămâne o singură posibilitate, anume, anularea parantezei pătrate, care, până la o diferență de semn este aceeași în ambele ecuații:

$$1+\lambda\frac{\ddot{x}\dot{y}-\ddot{y}\dot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}=0,$$

sau,

$$\frac{\ddot{x}\dot{y}-\ddot{y}\dot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}=-\frac{1}{\lambda}. \tag{5.47}$$

Până aici nu am spus nimic despre parametrul t. Alegând acum în mod convenabil acest parametru, mai precis, considerând că parametrul t este chiar lungimea arcului de curbă, l (măsurată în raport cu un punct fixat de pe curba Γ), avem:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2=\frac{(dx)^2+(dy)^2}{(dl)^2}=\frac{(dl)^2}{(dl)^2}=1 \tag{5.48}$$

și atunci, din (5.47) rămâne:

$$\dot{y}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{y}=-\frac{1}{\lambda}.$$

Această ecuație diferențială de ordinul doi cu două necunoscute, $x=x(t)$ și $y=y(t)$ se completează cu o a doua ecuație care rezultă prin derivarea în raport cu parametrul t a relației (5.48), anume,

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=1 \quad\Rightarrow\quad \dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=0.$$

În acest fel obținem un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul al doilea pentru $x=x(t)$ și $y=y(t)$:

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} \dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y} = -\dfrac{1}{\lambda}, \\ \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0. \end{cases} \tag{5.49}$$

Pentru a-l simplifica procedăm astfel: din a doua ecuație scoatem pe $\ddot{x}$ și îl introducem în prima. Rezultă:

$$\ddot{y} = \frac{1}{\lambda}\dot{x}. \tag{5.50}$$

Repetăm operația, scoțând acum din a doua ecuație din (5.49) pe $\ddot{y}$ și introducându-l în prima ecuație a aceluiași sistem. Se găsește:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{\lambda}\dot{y}. \tag{5.51}$$

În acest fel am obținut un sistem de două ecuații diferențiale, tot de ordinul doi, dar mai simplu:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\lambda^{-1}\dot{y}, \\ \ddot{y} = +\lambda^{-1}\dot{x}. \end{cases} \tag{5.52}$$

Integrând o dată, rezultă:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda^{-1}y + C_1, \\ \dot{y} = +\lambda^{-1}x + C_2. \end{cases}$$

Prin înlocuirea lui $\dot{x}$ și $\dot{y}$ astfel obținute în (5.48) găsim că:

$$1 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(C_1 - \frac{y}{\lambda}\right)^2 + \left(C_2 + \frac{x}{\lambda}\right)^2,$$

sau,

$$(\lambda C_1 - y)^2 + (\lambda C_2 + x)^2 = \lambda^2,$$

sau încă,

$$(x + \lambda C_2)^2 + (y - \lambda C_1)^2 = \lambda^2, \tag{5.53}$$

care este ecuația unui cerc situat în planul xOy, cu centrul în punctul de coordonate $C(x_C, y_C) = C(-\lambda C_2, \lambda C_1)$ și de rază $R = \lambda$. Evident, cele trei constante nedeterminate (dintre care λ trebuie în mod obligatoriu să fie nenulă) rămân în continuare astfel, problema nefurnizând date suplimentare care să le determine. De altfel, problema este rezolvată

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

complet, căci am aflat răspunsul căutat: curba plană de lungime dată (fixată) care închide suprafața de arie maximă este cercul (orice rază ar avea – deci, oricare[9] ar fi constanta $\lambda \neq 0$ și oriunde s-ar afla în planul xOy – deci oricare[10] ar fi constantele C_1 și C_2). Evident, dându-se aria suprafeței închisă de curbă poate fi determinată constanta λ, C_1 și C_2 rămânând în continuare nedeterminate.

4. Problema suprafeței de revoluție de arie minimă

Fie două puncte date (fixate), $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ în planul xOy al unui triedru ortogonal. Să se determine forma curbei $y = y(x)$ care, trecând prin cele două puncte, generează printr-o mișcare de revoluție în jurul unei axe (de exemplu, axa Ox) suprafața de arie minimă.

Rezolvare

Suprafața corpului care rezultă prin mișcarea de revoluție a unei curbe plane în jurul axei Ox (vezi Fig. V.6) este compusă din trei părți: două suprafețe circulare (bazele „trunchiului de con") și suprafața laterală a „trunchiului de con". Cum ariile suprafețelor circulare sunt fixe, fiind determinate de coordonatele y_1 și y_2 (segmentele de lungime y_1 și y_2 joacă rol de raze ale cercurilor respective), problema revine la a determina forma curbei plane, $y = y(x)$, care, prin mișcare de revoluție în jurul axei Ox generează suprafața laterală a „trunchiului de con" de arie minimă.

După cum se poate observa din Fig. V.6, ariile celor două suprafețe ale „bazelor" circulare sunt $S_1 = \pi y_1^2 = const.$ și $S_2 = \pi y_2^2 = const.$, iar aria suprafeței elementare a „benzii" de lățime[11] ds și lungime $2\pi y$ (vezi Fig. V.7 în care este prezentată secțiunea din planul xOy a „corpului" din Fig. V.6) este

---

[9] Care rămâne astfel nedeterminată.

[10] Care rămân, și ele, nedeterminate.

[11] Această lățime este suficient de mică, astfel încât putem aproxima că toate punctele de pe arcul ds au aceeași ordonată y.

$$dS = 2\pi y\, ds, \tag{5.54}$$

unde

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

în care $y' = dy/dx$.

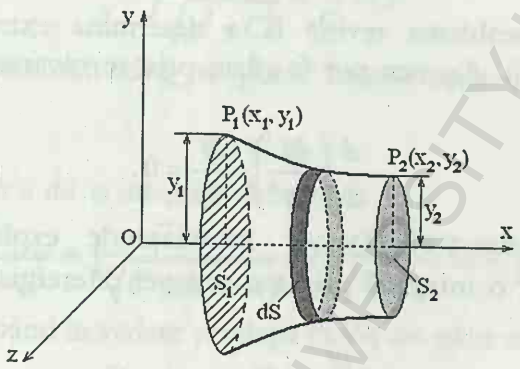


Fig. V.6

Atunci,

$$dS = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

iar aria laterală a „trunchiului de con" este

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{5.55}$$

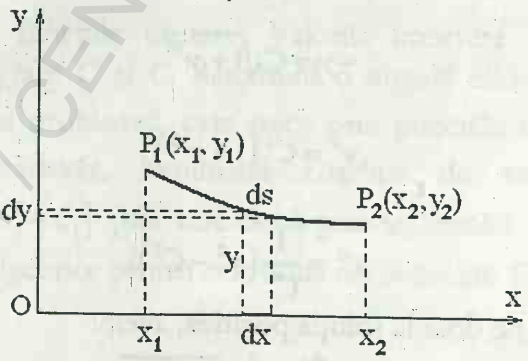


Fig. V.7

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

După cum se poate observa, această arie (lăsând la o parte constanta multiplicativă 2π, care nu afectează extremele pe care le căutăm) este determinată de funcționala:

$$S(y)=\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{x_1}^{x_2} f(y,y')\,dx. \tag{5.56}$$

Aşadar, problema revine la a determina extremele libere ale funcţionalei (5.56). Acestea pot fi aflate prin rezolvarea ecuației Euler a extremalelor,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{5.57}$$

Întrucât funcția $f(y,y')$ nu depinde explicit de variabila independentă x, o integrală primă a ecuației diferențiale de ordinul doi (5.57) este

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=const.\equiv C. \tag{5.58}$$

Avem,

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

care introdusă în (5.58) conduce la

$$\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}-y\sqrt{1+y'^2}=C,$$

sau,

$$-y=C\sqrt{1+y'^2},$$

sau încă,

$$y^2=C^2\left(1+y'^2\right),$$

de unde,

$$y'^2=\frac{1}{C^2}\left(y^2-C^2\right).$$

Oprindu-ne doar la soluția pozitivă, avem:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{C}\sqrt{y^2-C^2},$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau, separând variabilele,

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-C^2}}=\frac{dx}{C}.$$

Integrând nedefinit, obținem:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-C^2}}=\frac{x}{C}+C_1. \tag{5.59}$$

Integrala din membrul stâng se poate calcula ușor cu schimbarea de variabilă:

$$y=C\,ch\,u. \tag{5.60}$$

Atunci, $dy=C\,sh\,u\,du$ și integrala devine:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-C^2}}=\int\frac{C\,sh\,u}{\sqrt{C^2(ch^2u-1)}}du=\int\frac{C\,shu}{C\,shu}du=\int du=u.$$

Așadar, având în vedere și relația (5.59) am găsit că:

$$u=\frac{x}{C}+C_1,$$

de unde, aplicând ambilor membri funcția cosinus hiperbolic și utilizând relația (5.60), rezultă:

$$ch\,u=ch\left(\frac{x}{C}+C_1\right)=\frac{y}{C},$$

adică,

$$y=C\,ch\left(\frac{x}{C}+C_1\right),$$

care reprezintă funcțiile căutate. Valorile concrete ale constantelor arbitrare de integrare C și C_1 determină o singură curbă cu proprietatea cerută în enunțul problemei, care trece prin punctele date, $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$. Într-adevăr, impunând condiția de trecere a curbei $y(x)=C\,ch\left[(x/C)+C_1\right]$ prin cele două puncte, rezultă următorul sistem de două ecuații algebrice pentru cele două necunoscute $C\neq 0$ și C_1:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} y_1 = C\ ch\left(\dfrac{x_1}{C} + C_1\right), \\ y_2 = C\ ch\left(\dfrac{x_2}{C} + C_1\right). \end{cases}$$

Deci, curba care, trecând prin două puncte date, generează printr-o mișcare de revoluție în jurul axei Ox o suprafață de arie minimă este „curba lănțișor", adică un cosinus hiperbolic.

5. Problema geodezicelor unei varietăți riemanniene

Să se determine geodezicele unei varietăți riemanniene n-dimensionale, $\mathcal{R}_n$.

Rezolvare

Cu toate că aceasta este o problemă specifică mai degrabă teoriei relativității generale decât mecanicii teoretice, am preferat să o includem în lucrarea de față, deoarece este un exemplu concludent și important de problemă de calcul variațional.

Înainte de a rezolva problema propriu-zis, să definim noțiunile care intervin în enunțul ei, anume, noțiunea de *geodezică* și cea de *varietate riemannieană.*

În termeni geometrici, *geodezica* este curba care unește două puncte dintr-un anumit spațiu pe drumul cel mai scurt. În termeni dinamici, după cum vom vedea, *geodezica* reprezintă traiectoria pe care se deplasează liber un punct material într-un anumit spațiu. Evident, forma curbei care reprezintă o geodezică depinde de structura spațiului pe care este definită. De exemplu, în spațiul euclidian tridimensional, E_3, după cum bine știm, distanța cea mai scurtă dintre oricare două puncte este cea măsurată de-a lungul liniei drepte care trece prin cele două puncte. Totodată, privind problema din punct de vedere dinamic, în acest spațiu un corp liber se va deplasa rectiliniu și uniform în raport cu un sistem de referință inerțial. Aceste rezultate pot fi obținute și pe cale variațională, astfel:

BCU "LUCIAN BLAGA" UNIVERSITY LIBRARY

În spațiul euclidian tridimensional, distanța dintre două puncte infinitezimal depărtate este dată de elementul de linie:

$$ds \equiv |d\,\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{dx_i dx_i}, \quad (i = \overline{1,3}), \tag{5.61}$$

unde,

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Pătratul elementului de linie,

$$ds^2 \equiv |d\,\vec{r}|^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = dx_i dx_i, \quad (i = \overline{1,3}) \tag{5.62}$$

se numește *metrica* spațiului euclidian tridimensional E_3.

Dacă parametrizăm o curbă oarecare din acest spațiu prin

$$x_i = x_i(t), \quad (i = \overline{1,3}),$$

unde t este parametrul, distanța dintre două puncte, $P'(x', y', z')$ și $P''(x'', y'', z'')$ de pe această curbă, va fi dată de:

$$\Delta s = \int_{P'}^{P''} ds = \int_{P'}^{P''} \sqrt{dx_i(t) dx_i(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i}\, dt, \tag{5.63}$$

unde,

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt},$$

iar

$$x_i' = x_i(t_1) \text{ și } x_i'' = x_i(t_2).$$

Se observă că distanța Δs este dată de o funcțională de tipul:

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\, dt, \text{ cu } \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

în care funcția f este

$$f(\dot{x}) = \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i}.$$

Deoarece aceasta nu depinde explicit de variabila dependentă $x(t)$, rezultă că ecuația Euler a extremalelor,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \quad (j = \overline{1,3}),$$

admite integrala primă

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j} = (const.)_j \equiv C_j, \quad \left(j = \overline{1,3}\right), \tag{5.64}$$

sau,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}\left(\sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i}\right) = \frac{\dot{x}_j}{\sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i}} = C_j, \quad \left(j = \overline{1,3}\right). \tag{5.65}$$

a) Considerând ca parametru t lungimea arcului de curbă s, avem,

$$\sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i} = \sqrt{\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_i}{ds}} = \frac{\sqrt{dx_i dx_i}}{\sqrt{(ds)^2}} = \frac{\sqrt{(ds)^2}}{ds} = 1,$$

care, introdusă în (5.65), conduce la

$$\dot{x}_j = C_j, \quad \left(j = \overline{1,3}\right), \tag{5.66}$$

sau,

$$x_j = C_j s + C_j', \tag{5.67}$$

unde C_j', $\left(j = \overline{1,3}\right)$ sunt trei noi constante arbitrare de integrare. Cele șase constante de integrare C_j și C_j', $\left(j = \overline{1,3}\right)$ pot fi determinate din condiția ca punctele P' și P'' să se afle pe curbă.

Explicit, relațiile (5.67) se scriu, astfel:

$$x = C_1 s + C_1',$$
$$y = C_2 s + C_2',$$
$$z = C_3 s + C_3'.$$

Eliminând parametrul s, obținem:

$$y = C_2 \frac{x - C_1'}{C_1} + C_2' = \frac{C_2}{C_1} x + \left(-\frac{C_2 C_1'}{C_1} + C_2'\right) = k_1 x + k_2 \tag{5.68}$$

și

$$z = C_3 \frac{y - C_2'}{C_2} + C_3' = \frac{C_3}{C_2} x + \left(-\frac{C_3 C_2'}{C_2} + C_3'\right) = k_3 x + k_4, \tag{5.69}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde k_i, $\left(i=\overline{1,4}\right)$ sunt noi constante, care se exprimă în funcție de constantele C_j și C_j', $\left(j=\overline{1,3}\right)$ prin relații ce pot fi identificate din (5.68) și (5.69). Relațiile:

$$\begin{cases} y=k_1x+k_2\,, \\ z=k_3x+k_4\,, \end{cases} \tag{5.70}$$

reprezintă ecuațiile unei drepte în spațiul euclidian tridimensional E_3. Cu alte cuvinte, geodezicele spațiului euclidian tridimensional sunt dreptele.

b) Considerând ca parametru t timpul, relația (5.65) devine:

$$\frac{v_j}{\sqrt{|\vec{v}|^2}}=C_j,\quad \left(j=\overline{1,3}\right),$$

sau, înmulțind numărătorul și numitorul fracției cu masa $m\neq 0$ a corpului,

$$\frac{p_j}{\sqrt{|\vec{p}|^2}}=C_j,\quad \left(j=\overline{1,3}\right). \tag{5.71}$$

Corpul fiind liber, rezultanta forțelor care acționează asupra lui este zero, ceea ce, conform principiului fundamental al dinamicii,

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt},$$

înseamnă că impulsul $\vec{p}$ al corpului este constant, deci $|\vec{p}|^2=const.$, iar din relația (5.71) va rezulta că:

$$p_j=K_j,\ \left(j=\overline{1,3}\right),$$

unde K_j, $\left(j=\overline{1,3}\right)$ sunt trei constante. Deci,

$$m\dot{x}_j=K_j\quad \left(j=\overline{1,3}\right). \tag{5.72}$$

Pe de altă parte, teorema variației energiei cinetice ne asigură faptul că energia cinetică a unui corp liber este constantă. Ținând cont și de faptul că $|\vec{p}|^2=const.$, rezultă că masa corpului este constantă. Într-adevăr, din $m|\vec{v}|^2=C'$ și $|\vec{p}|^2=m^2|\vec{v}|^2=C''$, rezultă că $m=C''/C'=const.$, unde C' și C'' sunt două constante. Atunci, relațiile (5.72) se vor scrie:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\dot{x}_j = K_j' = (const.)_j,$$

sau,

$$x_j = K_j' \, t + x_{0j}, \quad \left(j = \overline{1,3}\right), \tag{5.73}$$

unde x_{0j}, $\left(j = \overline{1,3}\right)$ sunt trei constante arbitrare de integrare ce pot fi determinate din condițiile inițiale. Așadar, în spațiul euclidian tridimensional un corp liber se mișcă rectiliniu și uniform, conform legii (5.73) care, vectorial, se scrie sub forma:

$$\vec{r} = \vec{K}' t + \vec{r}_0$$

și care reprezintă ecuația unei mișcări rectilinii și uniforme, cu viteza $\vec{K}' = \overrightarrow{const.}$

Pentru a defini noțiunea de *varietate riemanniană*, trebuie să introducem mai întâi noțiunea de *metrică*, iar pentru a defini metrica unei varietăți trebuie să introducem noțiunea de *tensor metric fundamental*. După cum vom vedea, există o strânsă legătură între tensorul metric fundamental și noțiunea de *varianță* a tensorilor (componentele covariante ale tensorului metric fundamental nu sunt altceva decât produse scalare corespunzătoare ale versorilor bazei directe (covariante), iar componentele contravariante ale tensorului metric fundamental sunt produse scalare ale versorilor bazei duale (contravariante)). De aceea, în continuare ne vom referi pe scurt la noțiunea de varianță, și, din aproape în aproape vom defini toate noțiunile amintite mai sus. Varianța tensorilor este de două feluri: co-varianță și contra-varianță. Astfel, vorbim despre *tensori covarianți* și *tensori contravarianți*. Strict matematic, mărimile tensoriale covariante se pot defini, de exemplu, făcând apel la legea de transformare a derivatelor parțiale ale unei funcții scalare, iar mărimile tensoriale contravariante pot fi definite, de exemplu, utilizând legea de transformare a diferențialelor coordonatelor unui spațiu n dimensional. Această modalitate de a defini mărimile tensoriale co- și contra-variante nu oferă însă o imagine cât de cât intuitivă asupra necesității de a introduce aceste noțiuni și nici nu surprinde esența acestei necesități, fiind mult prea aridă din acest punct de vedere. De aceea, în continuare vom face apel la o altă modalitate de a introduce noțiunea de varianță a tensorilor.

BCU CLUJ / UNIVERSITY LIBRARY

Ca şi alte noţiuni matematice întâlnite în fizică (de exemplu, distribuţia δ a lui Dirac – care a fost introdusă din necesitatea de ordin fizic de a extinde valabilitatea unor relaţii din mecanica cuantică a sistemelor cu spectru discret la sisteme cu spectru continuu şi mai apoi pentru a defini densitatea de sarcină electrică a unor distribuţii discrete de sarcină – sau funcţia Heaviside (numită şi funcţia treaptă-unitate) – care a fost introdusă în fizică pentru a descrie efectul acţionării unui comutator într-un circuit electric etc.) şi noţiunea de variaţă îşi are o justificare fizică (mai exact, geometrică, după cum vom vedea) concretă şi „palpabilă".

După cum se ştie, gravitaţia este omniprezentă, iar efectul ei geometric este acela de curbare a spaţiului (mai exact, a continuumului spaţio-temporal). Apare astfel necesitatea utilizării – pe astfel de spaţii – a coordonatelor curbilinii (generale). Doar local (şi acest „local" este foarte relativ, depinzând de intensitatea câmpului gravitaţional) putem aproxima spaţiul ca fiind plat şi utiliza în consecinţă sisteme de coordonate corespunzătoare (carteziene).

Pentru a preciza cadrul şi pentru o înţelegere mai uşoară, ne vom referi în continuare la un spaţiu cu doar trei dimensiuni, generalizarea la spaţii cu mai multe dimensiuni putând fi făcută cu uşurinţă. Astfel, între cel mai simplu (şi totodată particular) tip de reper – cel cartezian – şi cel mai general, există două tipuri „intermediare" şi anume: i) reperele care utilizează coordonate curbilinii ortogonale (axele de coordonate sunt curbe, dar în orice punct din spaţiu vectorii tangenţi la axe formează un triedru ortogonal) şi ii) reperele care utilizează coordonate „rectilinii" dar neortogonale (axele de coordonate sunt linii drepte, dar în orice punct din spaţiu versorii axelor formează unghiuri diferite de 90^o – vezi Fig. V.8). Din acest punct de vedere, am putea considera cazul cel mai general (în care axele de coordonate sunt curbilinii, iar versorii lor sunt neortogonali) ca rezultând dintr-o „suprapunere" a celor două cazuri intermediare.

Sistemele de coordonate curbilinii ortogonale sunt tratate în multe lucrări (vezi, de exemplu, [1]), şi se poate arăta că efectul „curbării" axelor de coordonate este apariţia *coeficienţilor Lamé*. De aceea, în continuare nu ne vom opri asupra acestui caz, ci vom analiza cealaltă situaţie (cel de-al doilea caz „intermediar", în care axele rămân rectilinii, dar nu mai sunt

ortogonale). După cum vom vedea, efectul neortogonalității axelor de coordonate este necesitatea de a introduce noțiunea de *variață*.

Pentru a ușura reprezentările grafice vom considera – pentru moment – un spațiu cu doar două dimensiuni (generalizarea la trei dimensiuni este banală). Să considerăm în acest spațiu bidimensional un același vector $\vec{a}$, raportat însă la două sisteme de referință diferite: unul ortogonal și unul neortogonal (vezi Fig. V.9). În prima situație (vezi Fig. V.9 a), putem scrie:

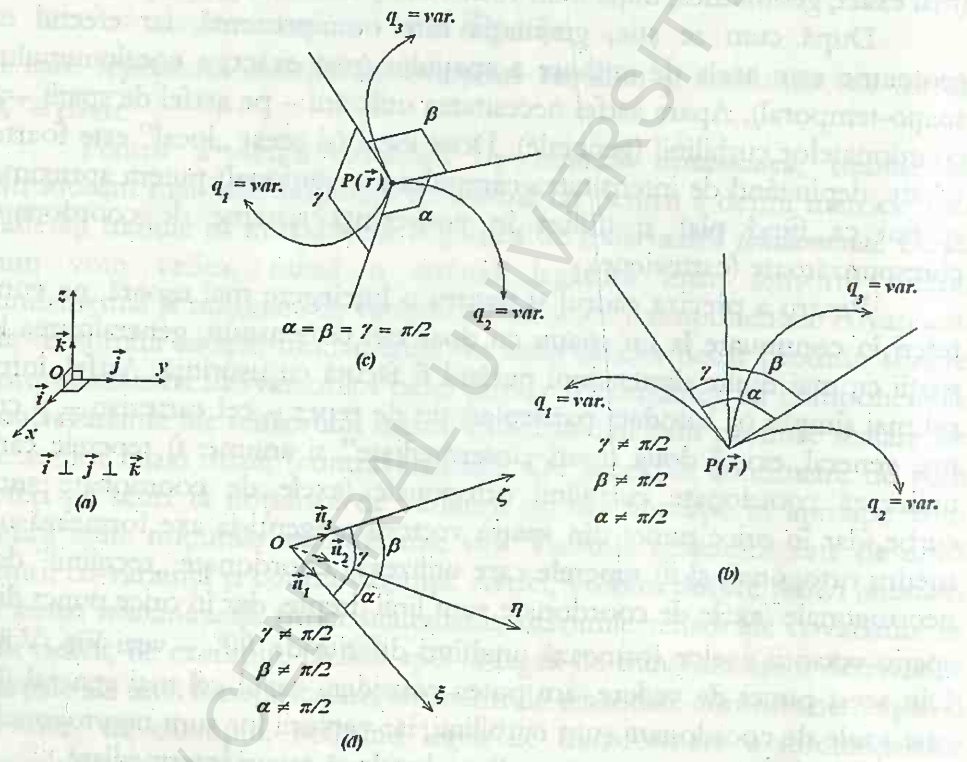


Fig. V.8

$$\begin{cases} a_1 = \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a_2 = \vec{a} \cdot \vec{u}_2 \end{cases} \tag{5.74}$$

și dacă notăm $\vec{a}_1 \overset{not.}{=} a_1\vec{u}_1$ și $\vec{a}_2 \overset{not.}{=} a_2\vec{u}_2$, atunci avem:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \tag{5.75}$$

unde $\vec{u}_1$ şi $\vec{u}_2$ sunt versorii celor două axe, iar a_1 şi a_2 sunt componentele vectorului $\vec{a}$ (proiecțiile ortogonale ale vectorului $\vec{a}$ pe cele două axe de coordonate).

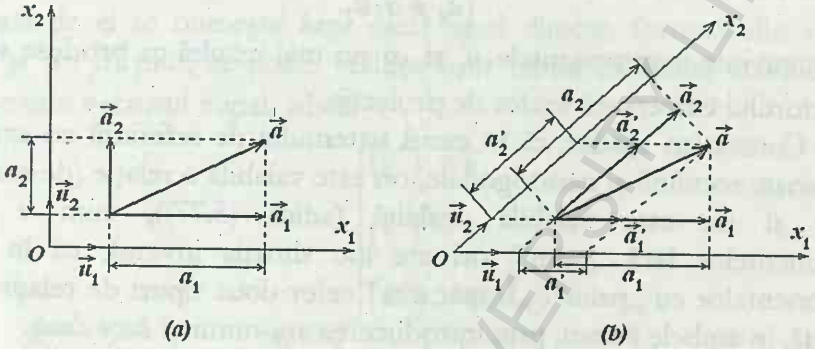


Fig. V.9

În cea de-a doua situație (vezi Fig. V.9 b), se observă că există două posibilități de a considera proiecțiile vectorului $\vec{a}$ pe axele de coordonate şi, în consecință, două moduri de a defini componentele vectorului $\vec{a}$: unul, coborând perpendiculare de la extremitățile vectorului pe cele două axe (ceea ce conduce la componentele notate cu a_1 şi a_2), iar celălalt, ducând paralele la cele două axe din extremitățile vectorului $\vec{a}$ (ceea ce conduce la componentele notate cu a_1' şi a_2').

Constatăm astfel că în prima situație putem scrie:

$$\begin{cases} a_1 = \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a_2 = \vec{a} \cdot \vec{u}_2, \end{cases} \tag{5.76}$$

dar, dacă notăm $\vec{a}_1 \overset{not.}{=} a_1\vec{u}_1$ şi $\vec{a}_2 \overset{not.}{=} a_2\vec{u}_2$, atunci nu mai rămâne valabilă relația (5.75), adică acum:

$$\vec{a} \neq \vec{a}_1 + \vec{a}_2. \tag{5.77}$$

În celălalt caz, al componentelor a_1' şi a_2', dacă notăm:

$$\begin{cases} \vec{a}_1' = a_1'\vec{u}_1, \\ \vec{a}_2' = a_2'\vec{u}_2, \end{cases} \tag{5.78}$$

BCU IAŞI / CENTRA UNIVERSITARĂ LIBRARY

atunci se păstrează valabilitatea relației (5.75), în sensul că:

$$\vec{a} = \vec{a}_1' + \vec{a}_2', \tag{5.79}$$

dar nu mai putem scrie o relație de tipul (5.74) deoarece, în acest caz:

$$\begin{cases} a_1' \neq \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a_2' \neq \vec{a} \cdot \vec{u}_2. \end{cases} \tag{5.80}$$

Cu alte cuvinte, componentele a_1' și a_2' nu mai rezultă ca produse scalare ale vectorului cu versorii axelor de proiecție.

Constatăm așadar, că în cazul sistemului de referință cu axele de coordonate rectilinii și neortogonale, ori este valabilă o relație (de exemplu (5.76)) și nu este valabilă cealaltă (adică (5.77)), cum e cazul componentelor fără „prim", ori are loc situația inversă, ca în cazul componentelor cu „prim". „Împăcarea" celor două tipuri de relații poate fi făcută, în ambele cazuri, prin introducerea așa-numitei *baze duale.*

Fie în acest sens $\vec{u}$, $\vec{v}$ și $\vec{w}$ un triplet de vectori necoplanari (liniar independenți), deci care pot constitui o bază în spațiul euclidian tridimensional E_3. Atunci, orice vector $\vec{a}$ din E_3 poate fi scris sub forma

$$\vec{a} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}, \tag{5.81}$$

unde λ, μ și ν sunt trei scalari (nu toți nuli, dacă vectorul $\vec{a}$ nu este vectorul nul) care se numesc *componentele vectorului* $\vec{a}$ în baza dată $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Să introducem acum alți trei vectori, pe care îi vom nota cu $\vec{u}^*$, $\vec{v}^*$ și $\vec{w}^*$, prin intermediul următoarelor relații (de definiție):

$$\begin{cases} \vec{u}^* \cdot \vec{u} = 1, \\ \vec{u}^* \cdot \vec{v} = 0, \\ \vec{u}^* \cdot \vec{w} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}^* \cdot \vec{u} = 0, \\ \vec{v}^* \cdot \vec{v} = 1, \\ \vec{v}^* \cdot \vec{w} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{w}^* \cdot \vec{u} = 0, \\ \vec{w}^* \cdot \vec{v} = 0, \\ \vec{w}^* \cdot \vec{w} = 1. \end{cases} \tag{5.82}$$

Un exemplu de astfel de triplet de vectori $\vec{u}^*$, $\vec{v}^*$ și $\vec{w}^*$ este următorul:

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}; \quad \vec{v}^* = \frac{\vec{w} \times \vec{u}}{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}; \quad \vec{w}^* = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}, \tag{5.83}$$

unde $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ este produsul mixt al celor trei vectori. Într-adevăr, se poate arăta cu ușurință că vectorii dați de relațiile (5.83)

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

satisfac relațiile de definiție (5.82). Lăsăm acest exercițiu simplu în seama cititorului.

Din modul în care au fost definiți, rezultă că, la rândul lor, vectorii $\vec{u}^*$, $\vec{v}^*$ și $\vec{w}^*$ sunt liniar independenți, deci formează, de asemenea, o bază în E_3. Ei se numesc *vectori duali* vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$ și respectiv $\vec{w}$, iar baza formată de ei se numește *baza dual*ă bazei directe, formată din vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ și $\vec{w}$. În plus, se poate verifica ușor faptul că dualul dualului unui vector este vectorul inițial, adică:

$$\begin{cases} \left(\vec{u}^*\right)^* = \vec{u}, \\ \left(\vec{v}^*\right)^* = \vec{v}, \\ \left(\vec{w}^*\right)^* = \vec{w}. \end{cases} \tag{5.84}$$

Cu ajutorul vectorilor bazei duale se pot exprima componentele oricărui vector în baza directă (adică scalarii λ, μ și ν din relația (5.81)) ca produse scalare ale vectorului respectiv cu vectorii corespunzători ai bazei duale, astfel:

$$\begin{cases} \lambda = \vec{a} \cdot \vec{u}^*, \\ \mu = \vec{a} \cdot \vec{v}^*, \\ \nu = \vec{a} \cdot \vec{w}^*, \end{cases} \tag{5.85}$$

relații ce pot fi cu ușurință verificate folosind (5.81) și (5.82).

Revenind acum la problema noastră, observăm că, utilizând vectorii bazei duale $\left\{\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*\right\}$ (bază dual bazei directe $\left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\right\}$), în cazul reperelor cu axele de coordonate rectilinii, dar neortogonale putem scrie atât o relație de tipul (5.75) pentru componentele fără „prim", adică:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,$$

dar în care,

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = a_1 \vec{u}_1^*, \\ \vec{a}_2 = a_2 \vec{u}_2^*, \end{cases} \tag{5.86}$$

cât și o relație de tipul (5.74) pentru componentele cu „prim", adică

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} a_1' = \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a_2' = \vec{a} \cdot \vec{u}_2, \end{cases}$$

dar în care $\vec{u}_1$ şi $\vec{u}_2$ trebuiesc înlocuiţi cu $\vec{u}_1^*$ şi respectiv $\vec{u}_2^*$, adică:

$$\begin{cases} a_1' = \vec{a} \cdot \vec{u}_1^*, \\ a_2' = \vec{a} \cdot \vec{u}_2^*. \end{cases} \tag{5.87}$$

Într-adevăr, în primul caz aveam $a_1 = \vec{a} \cdot \vec{u}_1$, $a_2 = \vec{a} \cdot \vec{u}_2$ şi $\vec{a} \neq \vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Dar, dacă $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ sunt daţi de (5.86), putem scrie o relaţie de tipul (5.75) şi în acest caz:

$$\vec{a} = a_1 \vec{u}_1^* + a_2 \vec{u}_2^* = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,$$

căci, ţinând cont de (5.85) şi (5.84) avem:

$$\begin{cases} a_1 = \vec{a} \cdot \left(\vec{u}_1^*\right)^* = \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a_2 = \vec{a} \cdot \left(\vec{u}_2^*\right)^* = \vec{a} \cdot \vec{u}_2, \end{cases}$$

adică exact relaţiile (5.76) şi astfel cele două tipuri de relaţii „au fost puse de acord" (în sensul că sunt valabile simultan).

În cazul al doilea aveam $\vec{a} = \vec{a}_1' + \vec{a}_2'$, dar $a_1' \neq \vec{a} \cdot \vec{u}_1$ şi $a_2' \neq \vec{a} \cdot \vec{u}_2$. În schimb, dacă aici punem $\vec{u}_1^*$ şi $\vec{u}_2^*$ în locul versorilor $\vec{u}_1$ şi respectiv $\vec{u}_2$, atunci ultimele două relaţii pot deveni egalităţi, adică $a_1' = \vec{a} \cdot \vec{u}_1^*$ şi $a_2' = \vec{a} \cdot \vec{u}_2^*$, deci, şi în acest caz este valabilă o relaţie de tipul (5.76), deoarece, conform cu (5.81) şi (5.85) avem:

$$\vec{a} = a_1' \vec{u}_1 + a_2' \vec{u}_2 = \vec{a}_1' + \vec{a}_2',$$

în acord cu (5.78) şi (5.79), deci problema este rezolvată.

De obicei se utilizează alte notaţii, anume:

$$\begin{cases} a_1' \overset{not.}{=} a^1, \\ a_2' \overset{not.}{=} a^2 \end{cases} \text{şi} \quad \begin{cases} \vec{u}_1^* \overset{not.}{=} \vec{u}^1, \\ \vec{u}_2^* \overset{not.}{=} \vec{u}^2. \end{cases} \tag{5.88}$$

În acest fel, într-un reper neortogonal orice vector $\vec{a}$ are două seturi de componente: unul cu indicii *jos*,

$$\begin{cases} a_1 = \vec{a} \cdot \vec{u}_1, \\ a_2 = \vec{a} \cdot \vec{u}_2 \end{cases} \tag{5.89}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi altul cu indicii *sus*,

$$\begin{cases} a^1 = \vec{a} \cdot \vec{u}^1, \\ a^2 = \vec{a} \cdot \vec{u}^2. \end{cases} \tag{5.90}$$

Componentele cu indicii jos se numesc *covariante*, iar cele cu indicii sus se numesc *contravariante*. Baza directă este formată din versorii covarianți, iar cea dual㠄 din versorii contravarianți[12]. În plus, din Fig. V.9 b se observă că, dacă unghiul dintre axe devine de 90°, atunci cele două tipuri de componente coincid, căci proiecția perpendiculară pe axe devine totodată şi proiecție paralelă cu axele de coordonate (de exemplu, perpendiculara din A pe axa Ox_1 devine în acelaşi timp paralela la axa Ox_2 şi invers). De aceea, în cazul sistemului de coordonate *ortogonale*, componentele covariante şi contravariante *coincid*.

Aşadar, orice vector are pe un spațiu neortogonal două seturi de componente: unul de componente covariante (dacă vectorul este exprimat în baza dual㠄 sau contravariantă, $\{\vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3\}$) şi unul de componente contravariante (dacă vectorul este exprimat în baza directă sau covariantă, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$). De exemplu, pentru vectorul de poziție $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, într-un spațiu tridimensional neortogonal putem scrie:

$$\vec{r} = x_1\vec{u}^1 + x_2\vec{u}^2 + x_3\vec{u}^3,$$

unde x_1, x_2 şi x_3 sunt componentele covariante ale vectorului de poziție scris în baza dual㠄 (contravariantă) şi, de asemenea,

$$\vec{r} = x^1\vec{u}_1 + x^2\vec{u}_2 + x^3\vec{u}_3,$$

unde x^1, x^2 şi x^3 sunt componentele contravariante ale vectorului de poziție $\vec{r}$, de data aceasta, în baza directă (covariantă).

Atunci, şi diferențiala vectorului de poziție poate fi scrisă în două moduri:

$$d\vec{r} = dx_1\vec{u}^1 + dx_2\vec{u}^2 + dx_3\vec{u}^3$$

şi

[12] De fapt, în virtutea relațiilor (5.84) denumirea de bază directă (respectiv dual㠄) este relativă, cele două baze, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ şi $\{\vec{u}^1, \vec{u}^2\}$, fiind una duala celeilalte.

$$d\vec{r} = dx^1\vec{u}_1 + dx^2\vec{u}_2 + dx^3\vec{u}_3,$$

iar metrica spațiului va fi:

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} =$$

$$\nearrow \quad \left(dx_1\vec{u}^1 + dx_2\vec{u}^2 + dx_3\vec{u}^3\right)\cdot\left(dx_1\vec{u}^1 + dx_2\vec{u}^2 + dx_3\vec{u}^3\right),$$

$$= \quad \rightarrow \quad \left(dx^1\vec{u}_1 + dx^2\vec{u}_2 + dx^3\vec{u}_3\right)\cdot\left(dx^1\vec{u}_1 + dx^2\vec{u}_2 + dx^3\vec{u}_3\right),$$

$$\searrow \quad \left(dx_1\vec{u}^1 + dx_2\vec{u}^2 + dx_3\vec{u}^3\right)\cdot\left(dx^1\vec{u}_1 + dx^2\vec{u}_2 + dx^3\vec{u}_3\right).$$

Cu noile notații, relațiile (5.82) se pot scrie „condensat", astfel:

$$\vec{u}^i\cdot\vec{u}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{5.91}$$

și atunci avem:

$$\nearrow \quad \left(dx_i\vec{u}^i\right)\cdot\left(dx_j\vec{u}^j\right) = \left(\vec{u}^i\cdot\vec{u}^j\right)dx_i dx_j,$$

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = \quad \rightarrow \quad \left(dx^i\vec{u}_i\right)\cdot\left(dx^j\vec{u}_j\right) = \left(\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j\right)dx^i dx^j, \tag{5.92}$$

$$\searrow \quad \left(dx_i\vec{u}^i\right)\cdot\left(dx^j\vec{u}_j\right) = \left(\vec{u}^i\cdot\vec{u}_j\right)dx_i dx^j.$$

Dacă utilizăm pentru produsele scalare dintre versorii contravarianți și respectiv covarianți notațiile:

$$\begin{cases} \left(\vec{u}^i\cdot\vec{u}^j\right) \overset{not}{=} g^{ij}, \\ \left(\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j\right) \overset{not}{=} g_{ij}, \end{cases} \tag{5.93}$$

și dacă ținem cont de (5.91), atunci metrica (relația (5.92)) poate fi scrisă sub următoarele trei forme:

$$ds^2 = g^{ij}dx_i dx_j = g_{ij}dx^i dx^j = dx_i dx^i, \tag{5.94}$$

putând identifica astfel *tensorul metric fundamental contravariant*, g^{ij} și respectiv *covariant*, g_{ij}. Din perspectiva prezentată aici putem da și o interpretare geometrică componentelor tensorului metric fundamental.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Astfel, se observă din (5.93) că acestea nu sunt altceva decât produsele scalare ale vectorilor bazei duale (contravariante) pentru tensorul metric fundamental contravariant şi respectiv produsele scalare ale vectorilor bazei directe (covariante) pentru tensorul metric fundamental covariant.

Din ultima egalitate a relației (5.94) rezultă că:

$$dx_i = g_{ij}dx^j, \tag{5.95}$$

adică *proprietatea de coborâre a indicilor* cu ajutorul tensorului metric fundamental covariant, iar din $g^{ij}dx_i dx_j = dx_i dx^i$ (vezi, de asemenea, relația (5.94)) rezultă:

$$dx^i = g^{ij}dx_j, \tag{5.96}$$

adică *proprietatea de ridicare a indicilor* cu ajutorul tensorului metric fundamental contravariant.

Cu aceste lucruri precizate, fie în continuare un spațiu euclidian m-dimensional, E_m şi $y_1, y_2, ..., y_m$ coordonatele carteziene ale unui punct P din acest spațiu. Pătratul distanței dintre punctul P şi unul vecin P' (cu alte cuvinte, elementul de linie) este:

$$ds^2 = dy_j dy_j, \quad \left(j = \overline{1,m}\right). \tag{5.97}$$

Să considerăm acum în E_m o varietate (subspațiu) n-dimensională, $\mathscr{R}_n$, $(n < m)$ şi fie $x^1, x^2, ..., x^n$ coordonatele unui punct din $\mathscr{R}_n$. Întrucât $y_j = y_j\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$, $\left(j = \overline{1,m}\right)$, avem:

$$ds^2 = \frac{\partial y_j}{\partial x^i}\frac{\partial y_j}{\partial x^k}dx^i dx^k = g_{ik}dx^i dx^k \quad ,\left(j = \overline{1,m}\ ;\ i,\ k = \overline{1,n}\right), \tag{5.98}$$

unde am utilizat notația:

$$g_{ik}\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) = g_{ki} = \frac{\partial y_j}{\partial x^i}\frac{\partial y_j}{\partial x^k}, \quad \left(j = \overline{1,m}\ ;\ i,\ k = \overline{1,n}\right)$$

pentru mărimea care nu este alta decât *tensorul metric fundamental.* Acesta este un tensor covariant, simetric, de ordinul doi. Dacă $g_{ik} = \delta_{ik}$, adică dacă varietatea $\mathscr{R}_n$ este euclidiană, regăsim metrica (5.97).

Dacă metrica (5.98) este invariantă la transformarea generală de coordonate:

$$x'^i = x'^i\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), \quad \left(i = \overline{1,n}\right),$$

atunci *varietatea* $\mathscr{R}_n$ se numește *riemannieană.*

Să determinăm în cele ce urmează ecuațiile diferențiale ale geodezicelor unei varietăți riemanniene $\mathscr{R}_n$. Fie pentru aceasta $x^i \left(i=\overline{1,n}\right)$ coordonatele ce definesc poziția unei particule care se deplasează în $\mathscr{R}_n$ și fie, de asemenea,

$$x^i = x^i(s), \ \left(i=\overline{1,n}\right), \tag{5.99}$$

ecuațiile parametrice ale unei curbe care trece prin două puncte date, P_1 și P_2. Lungimea arcului de curbă dintre cele două puncte este

$$L(x) = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{ik}\,dx^i dx^k} = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\ ds\,, \tag{5.100}$$

unde $\dot{x}^i = \dfrac{dx^i}{ds}$. Curba (5.99) reprezintă o geodezică dacă funcționala $L(x)$ dată de relația (5.100) este extremă (cu alte cuvinte, dacă distanța dintre punctele P_1 și P_2, măsurată de-a lungul curbei, este extremă[13]). Pentru aceasta trebuie ca funcția

$$f\left(x,\ \dot{x},\ s\right) = \sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}, \ \left(i,\ k=\overline{1,n}\right) \tag{5.101}$$

să satisfacă ecuațiile Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^j}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^j} = 0, \quad \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{5.102}$$

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}\left(\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\right) = 2\frac{1}{2\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}\left(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}} g_{ik}\delta^i_j\dot{x}^k = \frac{1}{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}} g_{jk}\dot{x}^k = g_{jk}\dot{x}^k,$$

deoarece

$$\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k} = \sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}} = \frac{1}{ds}\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k} = \frac{ds}{ds} = 1\,. \tag{5.103}$$

[13] În general, acest extremum este un minim.

Apoi,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^j}\right)=\frac{d}{ds}\left(g_{jk}\dot{x}^k\right)=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds}\dot{x}^k+g_{jk}\ddot{x}^k=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^k+g_{jk}\ddot{x}^k$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\right)=\frac{1}{2\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^k=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^k,$$

unde am avut în vedere din nou că $\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}=1$ (vezi (5.103)).

Înlocuind toate aceste rezultate în ecuațiile (5.102) obținem:

$$g_{jk}\ddot{x}^k+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^k-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^k=0,$$

sau,

$$g_{jk}\ddot{x}^k+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^k+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^k\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^k=$$

$$=g_{jk}\ddot{x}^k+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\dot{x}^k\dot{x}^i+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^k\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^k=$$

$$=g_{jk}\ddot{x}^k+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\dot{x}^k\dot{x}^i+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^k-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^k\right)=$$

$$=g_{jk}\ddot{x}^k+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)\dot{x}^i\dot{x}^k=0.$$

Dacă introducem notația:

$$\Gamma_{ik,j}\overset{not}{=}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right), \tag{5.104}$$

ultima ecuație se va scrie:

$$g_{jk}\ddot{x}^k+\Gamma_{ik,j}\dot{x}^i\dot{x}^k=0. \tag{5.105}$$

Cantitățile (5.104) se numesc *simbolurile Christoffel de speța I.* Înmulțind relația (5.105) cu g^{jl} şi sumând după j obținem forma finală a ecuațiilor diferențiale ale geodezicelor,

B.C.U. „N. EMINESCU" IAŞI FIZICĂ

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$g^{jl}g_{jk}\ddot{x}^k + g^{jl}\Gamma_{ik,j}\dot{x}^i\dot{x}^k = \delta^l_k\ddot{x}^k + \Gamma^l_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k = \ddot{x}^l + \Gamma^l_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0, \quad (5.106)$$

unde am utilizat o nouă notaţie:

$$g^{jl}\Gamma_{ik,j} \overset{not}{=} \Gamma^l_{ik},$$

cantităţile Γ^l_{ik} numindu-se *simbolurile Christoffel de speţa a II-a.* Se poate arăta faptul că, în general, simbolurile Christoffel (atât cele de speţa I, cât şi cele de speţa a II-a) nu sunt mărimi tensoriale[14] (la o transformare generală de coordonate aceste mărimi nu se transformă ca şi tensorii). Excepţie face cazul particular al transformărilor liniare de coordonate.

Aşadar, ecuaţiile diferenţiale ale *geodezicelor* unei varietăţi riemanniene n-dimensionale $\mathcal{R}_n$ sunt

$$\ddot{x}^l + \Gamma^l_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0, \quad \left(i,\ k,\ l = \overline{1,n}\right). \quad (5.107)$$

Acestea reprezintă totodată ecuaţiile de mişcare ale unei particule libere în câmpul gravitaţional. De altfel, cantităţile $a^l = \ddot{x}^l + \Gamma^l_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k$ nu reprezintă altceva decât componentele contravariante ale vectorului n-dimensional al *acceleraţiei* particulei în $\mathcal{R}_n$. Spre deosebire de a^l, $\left(l = \overline{1,n}\right)$, cantităţile $\ddot{x}^l$, $\left(l = \overline{1,n}\right)$ nu sunt vectori n-dimensionali (nu se transformă ca şi vectorii n-dimensionali la o transformare generală de coordonate).

Observaţie: Dacă notăm cu

$$\phi = \frac{1}{2}g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k,$$

atunci ecuaţiile Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\dot{x}^j}\right) - \frac{\partial\phi}{\partial x^j} = 0, \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

conduc la acelaşi rezultat (5.107). În consecinţă, principiile variaţionale:

$$\delta\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\ ds = 0$$

şi

[14] Pentru demonstraţie vezi, de exemplu, lucrarea autorilor Ioan Mercheş şi Daniel Radu, „Electrodinamică", Ed. Univ. „Al.I. Cuza", Iaşi, 2002, pag. 429.

BIBLIOTECA CENTRALA UNIVERSITARA

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k \, ds = 0$$

sunt echivalente.

Aplicație: Să se determine geodezicele unei sfere de rază unitate.

Pentru o sferă de rază r, elementul de arc este

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{5.108}$$

Dacă raza sferei este $r=1$, atunci relația de mai sus devine

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{5.109}$$

iar principiul variațional care ne conduce la rezultatul dorit,

$$\delta \int ds = 0$$

poate fi scris astfel:

$$\delta \int ds = \delta \int \frac{ds^2}{ds^2} ds = \delta \int \frac{d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2}{ds^2} ds = \delta \int \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) ds = 0,$$

unde $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds}$ şi $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{ds}$. Funcționala căreia trebuie să-i determinăm extremalele este deci

$$F(\theta, \varphi) = \int_{P_1}^{P_2} f\left(\theta, \dot{\theta}, \varphi\right) ds = \int_{P_1}^{P_2} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) ds, \tag{5.110}$$

unde P_1 şi P_2 sunt două puncte fixe (date) pe suprafața sferei, iar funcția f este dată de

$$f\left(\theta, \dot{\theta}, \varphi\right) = \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2 = 1. \tag{5.111}$$

Ecuația Euler-Lagrange pentru variabila φ este

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0. \tag{5.112}$$

Efectuând derivatele necesare,

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} = 2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 4\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\sin\theta\,\cos\theta + 2\,\sin^2\theta\,\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{şi}$$

înlocuindu-le în (5.112) obținem:

$$\ddot{\varphi} + 2ctg\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0. \tag{5.113}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a găsi ecuația explicită a geodezicei, $\varphi = \varphi(\theta)$, trebuie să eliminăm parametrul s între ecuațiile (5.111) și (5.113). Înainte de a realiza acest lucru să observăm că ecuația (5.113) mai poate fi scrisă astfel:

$$d\dot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\, ctg\theta\, d\theta = 0,$$

de unde, separând variabilele:

$$\frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -2ctg\theta\, d\theta = -2\frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta} = -2\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

și integrând, găsim:

$$\ln\dot{\varphi} = -2\ln(\sin\theta) + \ln C = \ln\left(\frac{C}{\sin^2\theta}\right),$$

adică

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{\sin^2\theta},$$

unde C este o constantă arbitrară de integrare. Apoi, deoarece $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\theta}{d\varphi}\dot{\varphi}$, deci $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2\dot{\varphi}^2$, utilizând (5.111) și faptul că $\dot{\varphi} = \frac{C}{\sin^2\theta}$, obținem:

$$\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2\dot{\varphi}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}^2\left[\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta\right] =$$

$$= \frac{C^2}{\sin^4\theta}\left[\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \sin^2\theta\right] = 1,$$

sau,

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\sin^2\theta}{C^2}\left(\sin^2\theta - C^2\right),$$

de unde, prin separarea variabilelor, avem:

$$d\varphi = \frac{C}{\sin\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - C^2}}. \qquad (5.114)$$

Integrând,

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int d\varphi = \int \frac{C}{\sin\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - C^2}},$$

avem:

$$\int \frac{C}{\sin\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - C^2}} = \varphi - \varphi_0, \qquad (5.115)$$

unde $(-\varphi_0)$ este o constantă arbitrară de integrare. Pentru a efectua integrala din relația (5.115) facem schimbarea de variabilă

$$\sin^2\theta - C^2 = \zeta^2.$$

Cu aceasta, integrala devine:

$$\int \frac{C}{\sin\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - C^2}} = C\int \frac{d\zeta}{\left(\zeta^2 + C^2\right)\sqrt{1 - C^2 - \zeta^2}}. \qquad (5.116)$$

Aceasta este o integrală de tipul:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)\sqrt{b^2 - x^2}},$$

în care $a = C$ şi $b = \sqrt{1 - C^2}$, pentru care avem[15]

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)\sqrt{b^2 - x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{a^2 + b^2}} arctg\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2 - x^2}}\right).$$

Atunci, integrala din membrul drept al relației (5.116) va fi egală cu

$$C\int \frac{d\zeta}{\left(\zeta^2 + C^2\right)\sqrt{1 - C^2 - \zeta^2}} = arctg\left(\frac{\zeta}{C\sqrt{1 - C^2 - \zeta^2}}\right) = arctg\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta - C^2}}{C\cos\theta}\right),$$

iar (5.115) devine:

$$arctg\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta - C^2}}{C\cos\theta}\right) = \varphi - \varphi_0,$$

sau,

---

[15] Vezi tabelele cu integrale din lucrarea autorului M.L. Smoleanski, „Tabele de integrale nedefinite", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1972, pag. 86, al. 28.5 b (în care există o greşeală de tipar, anume, în cazul b, în loc de $\gamma a > \alpha c$, trebuie considerată inegalitatea inversă. În scrierea inegalității am folosit notațiile din cartea citată; deci, nu trebuie să se confunde constanta a din această inegalitate cu cea din text).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\sqrt{\sin^2\theta - C^2}}{C\cos\theta} = tg(\varphi - \varphi_0),$$

sau încă,

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\varphi-\varphi_0)}} = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}ctg\theta. \qquad (5.117)$$

Aceasta este ecuația unui plan care trece prin originea sistemului de coordonate, care este totodată centrul sferei. Așadar, geodezicele pe care le căutăm sunt *cercurile mari ale sferei*, obținute ca intersecție a planului determinat mai sus cu sfera (vezi Fig. V.10).

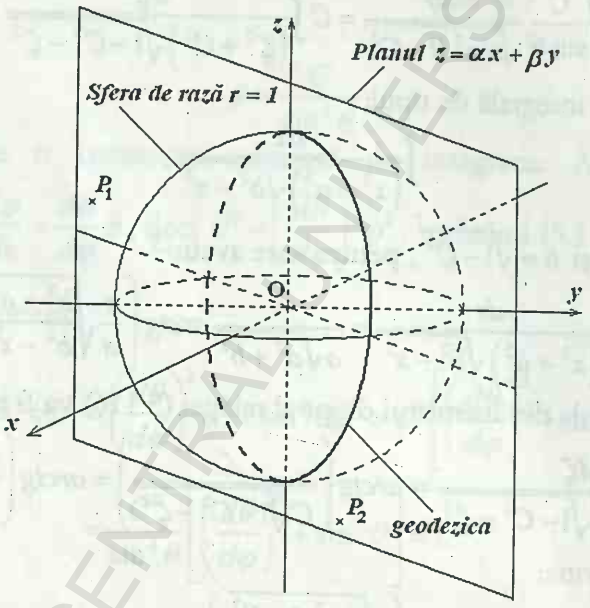


Fig. V.10

Pentru a scoate mai clar în evidență faptul că (5.117) reprezintă ecuația unui plan care trece prin originea sistemului de coordonate, să transcriem această ecuație în coordonate carteziene. Pentru aceasta vom utiliza relațiile de transformare cunoscute:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

în care trebuie să punem $r = 1$.

Avem,

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \cos\varphi\cos\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0 = \frac{x}{\sin\theta}\cos\varphi_0 + \frac{y}{\sin\theta}\sin\varphi_0 =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}ctg\theta = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\frac{z}{\sin\theta},$$

sau,

$$z = \alpha x + \beta y, \tag{5.118}$$

care este în mod evident ecuația unui plan în spațiu, ce trece prin originea sistemului de coordonate carteziene $Oxyz$. În relația (5.118)

$$\alpha = \frac{\sqrt{1-C^2}\cos\varphi_0}{C}$$

și

$$\beta = \frac{\sqrt{1-C^2}\sin\varphi_0}{C}$$

sunt două constante care, la rândul lor depind de constantele arbitrare de integrare C și φ_0, care pot fi determinate impunând condiția ca planul să treacă prin cele două[16] puncte fixe (date), P_1 și P_2.

[16] Evident, un plan este determinat univoc de trei puncte necoliniare. În cazul acesta, al treilea punct este originea sistemului de coordonate.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul VI

Probleme rezolvate cu ajutorul formalismului lagrangean

1. Maşina Atwood

Sistemul mecanic numit *maşina Atwood* constă – în esenţă – din două corpuri de mase m_1 şi m_2 legate printr-un fir inextensibil, de lungime l, trecut peste un scripete de rază r şi moment de inerţie I (vezi Fig. VI.1). Să se scrie ecuaţia diferenţială a mişcării sistemului utilizând formalismul lagrangean. Se vor neglija frecările.

Rezolvare

Sistemul este unul natural, întrucât singurele forţe aplicate sunt forţele de greutate ale corpurilor şi, după cum ştim, acestea sunt forţe potenţiale (chiar conservative).

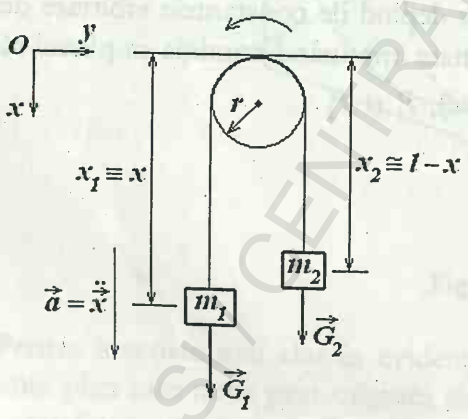


Fig. VI.1

Considerând şi scripetele ca un al treilea corp ce aparţine sistemului şi ţinând cont de Fig. VI.1, ecuaţiile legăturilor care restricţionează mişcarea corpurilor sunt

- $f_1(z_1) = z_1 = 0$, (fără a restrânge cu nimic generalitatea problemei, putem considera că mişcarea corpurilor are loc în planul $z = 0$);
- $f_2(z_2) = z_2 = 0$, (idem),
- $f_3(z_3) = z_3 = 0$, (scripetele nu are mişcare de translaţie);

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- $f_4(y_1) = y_1 = C_1 (= const.)$, (corpul de masă m_1 se mişcă doar de-a lungul axei Ox);
- $f_5(y_2) = y_2 = C_2 (= const.)$, (corpul de masă m_2 se mişcă, de asemenea, doar de-a lungul axei Ox);
- $f_6(y_3) = y_3 = C_3 (= const.)$, (scripetele nu are mişcare de translaţie);
- $f_7(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - l = 0$, (firul este inextensibil[1]);
- $f_8(x_3) = x_3 = 0$.

În concluzie, sistemul are $3 \cdot 3 - 8 = 1$ grad de libertate, căruia îi vom asocia coordonata generalizată $x \ (\equiv x_1)$. Pentru a scrie funcţia Lagrange a sistemului trebuie să determinăm energia cinetică a acestuia şi potenţialul.

Deoarece scripetele are raza de dimensiuni finite şi un moment de inerţie care nu poate fi neglijat, trebuie să luăm în considerare şi energia cinetică a mişcării de rotaţie (în jurul propriei axe) a scripetelui. De aceea,

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

unde ω este viteza unghiulară de rotaţie a scripetelui în jurul axei proprii. Întrucât firul nu alunecă pe scripete, viteza liniară a unui punct oarecare de la periferia discului scripetelui coincide cu viteza mişcării de translaţie a corpurilor de mase m_1 şi respectiv m_2, anume $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = \dot{x}$. Atunci,

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \frac{\dot{x}^2}{r^2}.$$

În ceea ce priveşte potenţialul (în fapt, energia potenţială a) sistemului, considerând că scripetele – fiind fix – are energia potenţială V_s constantă, putem scrie:

$$V = V_c + V_s,$$

---

[1] Facem observaţia că am presupus raza discului scripetelui mică în comparaţie cu lungimea firului, $\frac{r}{l} \ll \frac{1}{\pi - 2}$. În caz contrar, ar trebui să modificăm ecuaţia lui f_7 în $f_7(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + (\pi - 2) r - l = 0$. Chiar cu această „corecţie" rezultatele finale rămân corecte, deoarece efectul acestei „corecţii" este apariţia în expresia energiei potenţiale V_c a termenului constant, $(\pi - 2) m_2 g r$, care, în expresia lagrangeanului poate fi omis.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde V_c este energia potențială a celorlalte două corpuri (de mase m_1 și m_2). Conform „rețetei", pentru aceasta avem

$$dV_c = -dA = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -m_1 g dx_1 - m_2 g dx_2,$$

de unde,

$$V_c = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + V_{c0},$$

constanta arbitrară de integrare V_{c0} putând fi considerată nulă prin alegerea convenabilă a nivelului de referință pentru energia potențială. Într-adevăr, considerând $V_c(x_1 = 0,\ x_2 = 0) = 0$, rezultă $V_{c0} = 0$. Atunci:

$$V = V_c + V_s = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + V_s = -m_1 g x - m_2 g (l - x) + V_s =$$
$$= -(m_1 - m_2) g x - m_2 g l + V_s,$$

cu $V_s = const.$ Funcția Lagrange a sistemului va fi deci:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \frac{\dot{x}^2}{r^2} + (m_1 - m_2) g x + m_2 g l - V_s,$$

care, lăsând la o parte termenii constanți $(m_2 g l - V_s)$, este echivalentă cu lagrangeanul:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}\right)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2) g x.$$

Ecuația Lagrange de speța a II-a pentru coordonata generalizată x este

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \qquad (6.1)$$

Efectuând derivatele,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}\right)\dot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (m_1 - m_2) g,$$

ecuația (6.1) devine:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x} - (m_1 - m_2) g = 0, \qquad (6.2)$$

BCU IAȘI / CENTRALA UNIVERSITARĂ IBRARY

de unde rezultă accelerația (constantă) a sistemului:

$$a \equiv \ddot{x} = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} = const. \tag{6.3}$$

2. Maşina Atwood dublă

Se consideră sistemul prezentat schematic în Fig. VI.2, numit *maşina Atwood dublă*. Masele scripeților sunt neglijabile şi nu există frecare. Să se scrie ecuațiile diferențiale ale mişcării sistemului şi să se determine accelerațiile celor trei corpuri utilizând formalismul lagrangean.

Rezolvare

Sistemul este natural, deoarece singurele forțe aplicate sistemului sunt forțele de greutate.

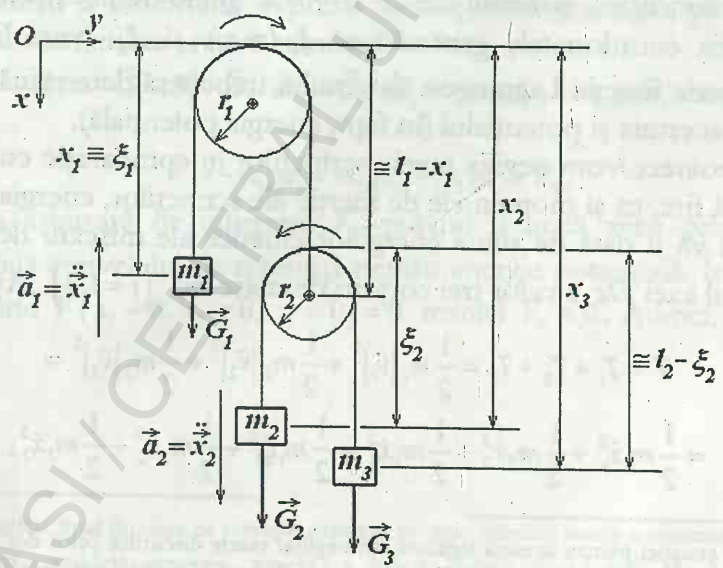


Fig. VI.2

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ecuaţiile legăturilor care limitează posibilităţile de mişcare ale celor trei corpuri sunt (vezi Fig. VI.2):

- $f_1(z_1) = z_1 = 0$, (fără a restrânge cu nimic generalitatea problemei, putem considera că mişcarea corpurilor are loc în planul $z = 0$);
- $f_2(z_2) = z_2 = 0$, (idem);
- $f_3(z_3) = z_3 = 0$, (idem);
- $f_4(y_1) = y_1 = C_1 (= const.)$, (corpul de masă m_1 se mişcă doar de-a lungul axei Ox);
- $f_5(y_2) = y_2 = C_2 (= const.)$, (corpul de masă m_2 se mişcă, de asemenea, doar de-a lungul axei Ox);
- $f_6(y_3) = y_3 = C_3 (= const.)$, (corpul de masă m_3 se deplasează doar în lungul axei Ox);
- $f_7(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3 - 2l_1 - l_2 = 0$, (firele de lungime l_1 şi respectiv l_2 sunt inextensibile[2]).

În concluzie, sistemul are $3 \cdot 3 - 7 = 2$ grade de libertate, cărora le vom asocia coordonatele generalizate ξ_1 $(\equiv x_1)$ şi ξ_2 (vezi Fig. VI.2). Pentru a scrie funcţia Lagrange a sistemului trebuie să determinăm energia cinetică a acestuia şi potenţialul (în fapt, energia potenţială).

Deoarece vom neglija razele scripeţilor în comparaţie cu lungimile celor două fire, ca şi momentele de inerţie ale scripeţilor, energia cinetică a sistemului va fi dată de suma energiilor cinetice ale mişcării de translaţie de-a lungul axei Ox a celor trei corpuri de mase m_i, $\left(i = \overline{1,3}\right)$. Avem:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_1 \left|\vec{v}_1\right|^2 + \frac{1}{2} m_2 \left|\vec{v}_2\right|^2 + \frac{1}{2} m_3 \left|\vec{v}_3\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2,$$

[2] În scrierea ecuaţiei pentru această legătură am neglijat razele discurilor celor doi scripeţi. Ca şi în problema maşinii Atwood simple, efectul acestei aproximaţii se răsfrânge doar asupra energiei potenţiale a sistemului, care va diferi de cea „reală" printr-o mărime constantă, ce poate fi lăsată la o parte în expresia funcţiei Lagrange. Dacă ţinem cont de razele finite ale discurilor scripeţilor, atunci expresia legăturii f_7 devine $f_7(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3 - 2l_1 - l_2 + 2(\pi - 2) r_1 + \pi r_2 = 0$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde trebuie să ținem cont de ecuațiile legăturilor pentru a exprima pe $\dot{x}_2^2$ și $\dot{x}_3^2$ în funcție de $\dot{\xi}_1$ și $\dot{\xi}_2$. Din Fig. VI.2 se observă că (în ipoteza neglijării razelor celor două discuri ale scripeților[3]),

$$x_2 = l_1 + \xi_2 - x_1 = l_1 + \xi_2 - \xi_1,$$

de unde,

$$\dot{x}_2^2 = \left(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1\right)^2.$$

Tot din Fig. VI.2, în cadrul aceleiași aproximații[4], se observă că:

$$x_3 = l_2 + x_2 - 2\xi_2,$$

de unde,

$$\dot{x}_3^2 = \left(\dot{x}_2 - 2\dot{\xi}_2\right)^2 = \left(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1 - 2\dot{\xi}_2\right)^2 = \left(-\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2\right)^2 = \left(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2\right)^2.$$

În concluzie, energia cinetică totală a sistemului va fi

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_3\left(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2\right)^2. \tag{6.4}$$

Pentru a determina expresia potențialului (energiei potențiale a) sistemului vom utiliza „rețeta standard":

$$dV = -dA = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 - \vec{G}_3 \cdot d\vec{r}_3 = -m_1 g dx_1 - m_2 g dx_2 - m_3 g dx_3,$$

de unde,

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 - m_3 g x_3 + V_0,$$

constanta arbitrară de integrare V_0 putând fi luată zero prin alegerea convenabilă a nivelului de referință pentru energia potențială. Într-adevăr, considerând $V\left(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0\right) = 0$ rezultă $V_0 = 0$. Atunci, în aceeași

---

[3] Același rezultat final (în ceea ce privește expresia energiei cinetice totale a sistemului) se obține și dacă vom considera expresia „exactă" a lui x_2, adică $x_2 = l_1 + \xi_2 - \xi_1 - (\pi - 2)r_1 - r_2$, deoarece la derivare mărimile constante „dispar".

[4] Și aici, dacă dorim să lucrăm „exact", va trebui să considerăm pentru x_3 expresia $x_3 = x_2 + l_2 - 2\xi_2 - (\pi - 2)r_2$, care conduce la aceeași energie cinetică totală. Motivul este același cu cel menționat în nota de subsol precedentă.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

aproximație[5] (razele discurilor scripeților sunt neglijabile în raport cu lungimile celor două fire inextensibile),

$$\begin{aligned} V &= -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 - m_3 g x_3 = -m_1 g \xi_1 - m_2 g\left(l_1 + \xi_2 - \xi_1\right) - \\ &-m_3 g\left(l_2 + x_2 - 2\xi_2\right) = -m_1 g \xi_1 - m_2 g\left(l_1 + \xi_2 - \xi_1\right) - m_3 g\left(l_2 + \right. \\ &\left. + l_1 + \xi_2 - \xi_1 - 2\xi_2\right) = -g\left(m_1 - m_2 - m_3\right)\xi_1 - g\left(m_2 - m_3\right)\xi_2 - \\ &-g l_1\left(m_2 + m_3\right) - m_3 g l_2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Ținând cont de expresiile obținute pentru energia cinetică T și energia potențială V, funcția Lagrange a sistemului va fi:

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1\right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2\right)^2 + \\ &+ g\left(m_1 - m_2 - m_3\right)\xi_1 + g\left(m_2 - m_3\right)\xi_2, \end{aligned} \tag{6.6}$$

unde termenul $\left[g l_1\left(m_2 + m_3\right) + m_3 g l_2\right]$ fiind constant, a fost lăsat la o parte.

Cele două ecuații Lagrange de speța a II-a (corespunzătoare celor două grade de libertate și respectiv celor două coordonate generalizate ξ_1 și ξ_2) sunt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_1} = 0 \tag{6.7}$$

și

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_2} = 0. \tag{6.8}$$

Efectuând derivatele,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} = m_1 \dot{\xi}_1 - m_2\left(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1\right) + m_3\left(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1}\right) = \ddot{\xi}_1\left(m_1 + m_2 + m_3\right) + \ddot{\xi}_2\left(m_3 - m_2\right),$$

[5] Dacă lucrăm „exact", atunci la expresia deja obținută a energiei potențiale trebuie să adăugăm termenul $g(\pi - 2)(m_2 r_1 + m_3 r_2) + g m_2 r_2$, care va apărea cu semn schimbat în expresia lagrangeanului și care, fiind constant, poate fi omis (cei doi lagrangeeni sunt echivalenți).

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1} = g\left(m_1 - m_2 - m_3\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} = m_2\left(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1\right) + m_3\left(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2}\right) = \ddot{\xi}_1\left(m_3 - m_2\right) + \ddot{\xi}_2\left(m_2 + m_3\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_2} = g\left(m_2 - m_3\right),$$

ecuațiile (6.7) și (6.8) devin

$$\ddot{\xi}_1\left(m_1 + m_2 + m_3\right) + \ddot{\xi}_2\left(m_3 - m_2\right) - g\left(m_1 - m_2 - m_3\right) = 0 \tag{6.9}$$

și respectiv,

$$\ddot{\xi}_1\left(m_3 - m_2\right) + \ddot{\xi}_2\left(m_2 + m_3\right) - g\left(m_2 - m_3\right) = 0. \tag{6.10}$$

Ecuațiile (6.9) și (6.10) formează un sistem algebric în necunoscutele $\ddot{\xi}_1$ și $\ddot{\xi}_2$ (cele două accelerații; vezi Fig. VI.2):

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1\left(m_1 + m_2 + m_3\right) + \ddot{\xi}_2\left(m_3 - m_2\right) - g\left(m_1 - m_2 - m_3\right) = 0, \\ \ddot{\xi}_1\left(m_3 - m_2\right) + \ddot{\xi}_2\left(m_2 + m_3\right) - g\left(m_2 - m_3\right) = 0. \end{cases} \tag{6.11}$$

Substituind $\ddot{\xi}_2$ din ecuația a doua a sistemului,

$$\ddot{\xi}_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\left(g + \ddot{\xi}_1\right),$$

în prima ecuație a aceluiași sistem, obținem:

$$\ddot{\xi}_1\left(m_1 + m_2 + m_3\right) - \frac{\left(m_2 - m_3\right)^2}{m_2 + m_3}\left(g + \ddot{\xi}_1\right) - g\left(m_1 - m_2 - m_3\right) = 0,$$

sau,

$$\ddot{\xi}_1\left(m_1 + m_2 + m_3 - \frac{\left(m_2 - m_3\right)^2}{m_2 + m_3}\right) - g\frac{\left(m_2 - m_3\right)^2}{m_2 + m_3} - g\left(m_1 - m_2 - m_3\right) = 0,$$

de unde,

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\ddot{\xi}_1 = \frac{g\left[\frac{(m_2-m_3)^2}{m_2+m_3}+(m_1-m_2-m_3)\right]}{m_1+m_2+m_3-\frac{(m_2-m_3)^2}{m_2+m_3}} =$$

$$= g\,\frac{\frac{(m_2-m_3)^2+(m_2+m_3)(m_1-m_2-m_3)}{m_2+m_3}}{\frac{(m_1+m_2+m_3)(m_2+m_3)-(m_2-m_3)^2}{m_2+m_3}} =$$

$$= g\,\frac{(m_2-m_3)^2+(m_2+m_3)(m_1-m_2-m_3)}{(m_1+m_2+m_3)(m_2+m_3)-(m_2-m_3)^2} =$$

$$= g\,\frac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3},$$

iar pentru $\ddot{\xi}_2$ obținem:

$$\ddot{\xi}_2 = \frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\left(g+\ddot{\xi}_1\right) = \frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\left(g+g\,\frac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}\right) =$$

$$= g\,\frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\left(1+\frac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}\right) =$$

$$= g\,\frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\left(\frac{2m_1(m_2+m_3)}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}\right) = g\,\frac{2m_1(m_2-m_3)}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}.$$

Aşadar, cele trei accelerații ale corpurilor ($a_1 \equiv \ddot{\xi}_1$, a corpului de masă m_1, față de reperul inerțial xOy, $a_2 \equiv \ddot{\xi}_2$, pentru corpul de masă m_2 și respectiv $a_3 = -a_2 = -\ddot{\xi}_2$, pentru corpul de masă m_3, în raport cu scripetele de rază r_2, care este un reper neinerțial) sunt

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} a_1 = \ddot{\xi}_1 = g\,\dfrac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}, \\ a_2 = \ddot{\xi}_2 = g\,\dfrac{2m_1(m_2-m_3)}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}, \\ a_3 = -a_2 = g\,\dfrac{2m_1(m_3-m_2)}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}. \end{cases} \tag{6.12}$$

3. Pendulul cu punct oscilant de suspensie

Punctul de suspensie al unui pendul gravitațional, de lungime l și masă m, se mișcă pe direcție orizontală oscilatoriu liniar armonic, după legea $X = a\cos\omega_0 t$ (vezi Fig. VI.3). Să se scrie ecuațiile de mișcare ale sistemului utilizând atât un sistem de referință inerțial, cât și unul neinerțial.

Rezolvare

Cazul I – Sistem de referință inerțial (SRI)

Vom nota cu θ unghiul format de tija ideală a pendulului cu verticala. Alegem sistemul de referință inerțial („fix" în raport cu sistemul de referință al laboratorului) cu originea în punctul „de echilibru" al oscilatorului, O, a cărui lege de mișcare este $x_O \equiv X = a\cos\omega_0 t$, având axa Ox după orizontală și Oy după verticala descendentă (vezi Fig. VI.3).

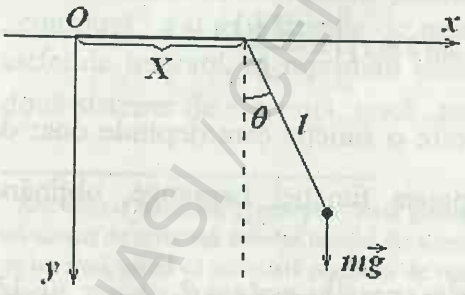


Fig. VI.3

Ecuațiile legăturilor sunt:

1) $f_1(x, y) = (x - X)^2 + y^2 - l^2 = 0$;

2) $f_2(z) = z = const.(=0)$,

astfel că sistemul are $3-2=1$ grad de libertate, căruia îi vom asocia drept coordonată generalizată un -

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ghiul θ. Față de reperul inerțial considerat, putem scrie:

$$\begin{cases} x = X + l\sin\theta = a\cos\omega_0 t + l\sin\theta, \\ y = l\cos\theta \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} \dot{x} = -a\omega_0 \sin\omega_0 t + l\dot{\theta}\cos\theta, \\ \dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta. \end{cases}$$

Energia cinetică a sistemului este

$$T = \frac{1}{2}m\left|\vec{v}^2\right| = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(a^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t - 2al\omega_0\dot{\theta}\sin\omega_0 t\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right).$$

Deoarece sistemul este unul conservativ, pentru energia potențială (gravitațională) avem:

$$dV = -dA = -\vec{G}\cdot d\vec{r} = -mgdy,$$

de unde

$$V = -mgy = -mgl\cos\theta,$$

astfel că funcția Lagrange este:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(a^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t - 2al\omega_0\dot{\theta}\sin\omega_0 t\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) + mgl\cos\theta.$$

Având în vedere faptul că termenul $\frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t$ poate fi scris sub forma:

$$\frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega_0 t}{4\omega_0}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8}ma^2\omega_0\left(2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t\right)\right] = \frac{dF(t)}{dt},$$

unde $F(t) = \frac{1}{8}ma^2\omega_0\left(2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t\right)$ este o funcție care depinde doar de timp, acesta poate fi omis din expresia funcției Lagrange, obținând lagrangeanul echivalent

$$L = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 - 2al\omega_0\dot{\theta}\sin\omega_0 t\cos\theta\right) + mgl\cos\theta. \qquad (6.13)$$

Deoarece

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} - mal\omega_0 \sin\omega_0 t\cos\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} - mal\omega_0^2\cos\omega_0 t\cos\theta + mal\omega_0\dot{\theta}\sin\omega_0 t\sin\theta$$

şi

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mal\omega_0\dot{\theta}\sin\omega_0 t\sin\theta - mgl\sin\theta,$$

ecuaţia Lagrange de speţa a II-a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \tag{6.14}$$

devine

$$ml^2\ddot{\theta} - mal\omega_0^2\cos\omega_0 t\cos\theta + mgl\sin\theta = 0,$$

sau,

$$l\ddot{\theta} - a\omega_0^2\cos\omega_0 t\cos\theta + g\sin\theta = 0. \tag{6.15}$$

Cazul II – Sistem de referinţă neinerţial (SRNI)

În această situaţie, va trebui mai întâi să arătăm că, în cazul general, într-un SRNI funcţia Lagrange se scrie astfel:

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}_r|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{\omega}\times\vec{r}\,'|^2 + m\vec{v}_r\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') - m\vec{a}_0\cdot\vec{r}\,' - V(\vec{r}\,'), \tag{6.16}$$

semnificaţia mărimilor $\vec{v}_r$, $\vec{\omega}$, $\vec{r}\,'$, $\vec{a}_0$ şi $V(\vec{r}\,')$ fiind dată în cele ce urmează.

Pentru a demonstra relaţia (6.16) trebuie să studiem mişcarea „compusă" a unei particule de masă m. Pentru a înţelege ce înseamnă o astfel de mişcare, să raportăm simultan mişcarea acestei particule faţă de două sisteme de referinţă, unul „presupus"[6] inerţial (fix), $S\,(Oxyz)$ şi cel

[6] Am utilizat termenul „presupus" între ghilimele deoarece, în realitate, în Univers nu există nici un sistem de referinţă absolut inerţial (în acest Univers, orice corp se află în mişcare relativă faţă de un altul, astfel că nu există noţiunea de *repaus absolut*, şi, în consecinţă, nici cea de *reper absolut inerţial*). Totuşi, pentru necesităţi de ordin practic, cu o foarte bună aproximaţie, anumite sisteme de referinţă pot fi considerate ca fiind inerţiale (de exemplu, orice corp aflat în repaus faţă de suprafaţa Pământului poate fi considerat originea unui sistem de referinţă inerţial, în care să se studieze mişcarea altor corpuri de pe Pământ; acelaşi corp însă nu mai poate juca acest rol, dacă dorim să studiem – faţă de el – mişcarea altor corpuri cereşti).

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de-al doilea, $S'\ (O'x'y'z')$, având o mişcare accelerată faţă de primul (fiind deci neinerţial) (vezi Fig. VI.4).

Pentru a ilustra în mod concret o astfel de situaţie putem considera, de exemplu, mişcarea unei maşini pe o stradă de pe suprafaţa Pământului, Pământ care, la rândul lui se mişcă faţă de Soare. Evident, în acest caz maşina este „particula", reperul inerţial S este Soarele, iar reperul neinerţial S' este Pământul.

Pentru a distinge cu uşurinţă cele două mişcări ale particulei (faţă de cele două repere, S şi S') vom numi *mişcare absolută* mişcarea particulei faţă de reperul S (cel inerţial) şi *mişcare relativă* cea faţă de reperul neinerţial S'. Mişcarea reperului S' (ca un întreg) faţă de reperul inerţial S o vom numi *mişcare de transport.* O astfel de mişcare (referindu-ne la particula de masă m) este ceea ce se numeşte *mişcare compusă.*

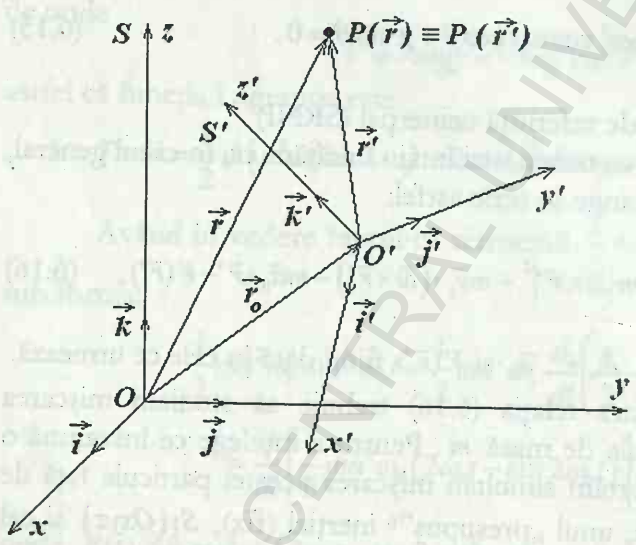


Fig. VI.4

În Univers, orice mişcare, a oricărui corp, poate fi studiată ca o mişcare compusă. Din Fig. VI.4 se observă că putem scrie

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'.$$

De aici, situându-ne în cadrul mecanicii clasice, newtoniene[7], prin derivare totală în raport cu timpul obţinem

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}', \tag{6.17}$$

[7] În care este valabil principiul simultaneităţii absolute (timpul se scurge la fel în toate sistemele de referinţă inerţiale; deci, sincronizând ceasornicele din toate sistemele de referinţă inerţiale, acestea vor avea – toate – aceeaşi indicaţie).

unde $\vec{v}$ este viteza particulei față de reperul inerțial S, numită *viteză absolută* (viteza mișcării absolute). Utilizând convenția de sumare a lui Einstein după indicii „muți" și notațiile $\vec{i}' \overset{not.}{=} \vec{u}_1'$, $\vec{j}' \overset{not.}{=} \vec{u}_2'$, $\vec{k}' \overset{not.}{=} \vec{u}_3'$, putem scrie:

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' = x_k'\vec{u}_k', \tag{6.18}$$

unde $x_1' = x'$, $x_2' = y'$ și $x_3' = z'$. Având în vedere faptul că versorii $\vec{u}_k'$, $\left(k = \overline{1,3}\right)$ variază în timp (evident, doar ca direcție și sens) avem:

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{x}_k'\vec{u}_k' + x_k'\dot{\vec{u}}_k' \overset{not.}{=} \vec{v}_r + x_k'\dot{\vec{u}}_k', \tag{6.19}$$

unde $\vec{v}_r \overset{not.}{=} \dot{x}_k'\vec{u}_k'$ este numită *viteză relativă* (viteza mișcării relative, adică viteza particulei în raport cu referențialul neinerțial S').

Pentru a analiza semnificația celui de-al doilea termen din relația (6.19) să notăm cu ω_k', $\left(k = \overline{1,3}\right)$ componentele vectorilor $\dot{\vec{u}}_k'$ în raport cu baza ortonormată $\vec{u}_k'$; cu alte cuvinte, fie

$$\dot{\vec{u}}_k' \overset{not.}{=} \omega_{ks}'\vec{u}_s'. \tag{6.20}$$

Din condiția de ortonormalitate a bazei $\left\{\vec{u}_k'\right\}_{k=\overline{1,3}}$, adică din relația:

$$\vec{u}_k' \cdot \vec{u}_s' = \delta_{ks},$$

prin derivare totală în raport cu timpul obținem:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u}_k' \cdot \vec{u}_s'\right) = \dot{\vec{u}}_k' \cdot \vec{u}_s' + \vec{u}_k' \cdot \dot{\vec{u}}_s' = \omega_{kr}'\vec{u}_r' \cdot \vec{u}_s' + \omega_{sr}'\vec{u}_k' \cdot \vec{u}_r' = \omega_{ks}' + \omega_{sk}' = 0,$$

ceea ce arată faptul că mărimile ω_{ks}', $\left(k,\ s = \overline{1,3}\right)$ sunt componentele unui tensor antisimetric de ordinul al doilea, definit pe spațiul tridimensional al vectorilor $\vec{v}' = v_k'\vec{u}_k'$. Fie $\vec{\omega}$ pseudovectorul (vectorul axial) corespunzător (prin izomorfismul dintre cele două mulțimi – cea a tensorilor antisimetrici de ordinul doi și cea a vectorilor $\vec{v}'$, definiți pe același spațiu tridimensional) acestui tensor (vezi Anexa C). Atunci,

$$\omega_{ks}' = \varepsilon_{ksi}\omega_i', \quad \left(i,\ k,\ s = \overline{1,3}\right). \tag{6.21}$$

Substituind ω_{ks}' dat de relația (6.21) în (6.20) găsim:

$$\dot{\vec{u}}_k' = \omega_{ks}'\vec{u}_s' = \varepsilon_{ksi}\omega_i'\vec{u}_s' = \omega_i'\varepsilon_{iks}\vec{u}_s' = \omega_i'\vec{u}_i' \times \vec{u}_k' = \vec{\omega} \times \vec{u}_k', \tag{6.22}$$

relație numită *formula lui Poisson*. Cu ajutorul relațiilor (6.19) și (6.22), viteza absolută dată de formula (6.17) poate fi scrisă astfel

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_r + x_k'\dot{\vec{u}}_k' = \vec{v}_0 + \vec{v}_r + x_k'\vec{\omega} \times \vec{u}_k' = \vec{v}_0 + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times x_k'\vec{u}_k' = \\ = \vec{v}_0 + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}', \tag{6.23}$$

unde $\vec{v}_0 \overset{not.}{=} \dot{\vec{r}}_0$ este viteza originii O' față de reperul inerțial S.

Accelerația absolută poate fi determinată prin derivarea totală în raport cu timpul a vitezei absolute,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}_0 + \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_k'\vec{u}_k'\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) = \dot{\vec{v}}_0 + \ddot{x}_k'\vec{u}_k' + \dot{x}_k'\dot{\vec{u}}_k' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}',$$

sau, ținând cont de relațiile (6.19) și (6.22),

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}_0 + \ddot{x}_k'\vec{u}_k' + \dot{x}_k'\dot{\vec{u}}_k' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{v}}_0 + \vec{a}_r + \dot{x}_k'\dot{\vec{u}}_k' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' =$$

$$= \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \left(\dot{x}_k'\dot{\vec{u}}_k' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'\right) = \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \left[\dot{x}_k'\vec{\omega} \times \vec{u}_k' + \vec{\omega} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\vec{v}_r + x_k'\dot{\vec{u}}_k'\right)\right] = \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \left(\vec{\omega} \times \dot{x}_k'\vec{u}_k' + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times x_k'\dot{\vec{u}}_k'\right) = \vec{a}_0 + \vec{a}_r +$$

$$+ \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \left[\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times x_k'\left(\vec{\omega} \times \vec{u}_k'\right)\right] = \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r +$$

$$+ \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times x_k'\vec{u}_k'\right) = \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right), \tag{6.24}$$

unde am notat $\dot{\vec{v}}_0 \overset{not.}{=} \vec{a}_0$ – accelerația originii O' a reperului neinerțial S' față de sistemul de referință inerțial S și $\ddot{x}_k'\vec{u}_k' \overset{not.}{=} \vec{a}_r$ – *accelerația relativă* (accelerația mișcării relative, adică accelerația particulei față de referențialul neinerțial S'). Termenul $\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) \overset{not.}{=} \vec{a}_{cp}$ este numit *accelerație centripetă*, iar termenul $2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \overset{not.}{=} \vec{a}_c$ – *accelerație Coriolis*.

Dacă particula însăși joacă rol de referențial neinerțial (cu alte cuvinte, dacă presupunem particula legată solidar de referențialul S'), atunci nu mai există mișcare relativă – ceea ce înseamnă că $\vec{v}_r = 0$ și $\vec{a}_r = 0$ – iar relațiile (6.23) și (6.24) devin:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' \overset{not.}{=} \vec{v}_{tr} \tag{6.25}$$

BCU „Al. I. Cuza" IAȘI – CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right) \overset{not.}{=} \vec{a}_{tr}. \tag{6.26}$$

Dacă, în plus, originile celor două repere coincid (nu există mişcare de translaţie), atunci $\vec{r}_0 = 0$, $\vec{v}_0 = 0$, $\vec{a}_0 = 0$ şi avem:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{6.27}$$

şi respectiv,

$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right), \tag{6.28}$$

căci în acest caz $\vec{r}\,' \equiv \vec{r}$.

Mărimile $\vec{v}_{tr}$ şi $\vec{a}_{tr}$ sunt numite *viteza* şi respectiv *acceleraţia de transport*. Atunci, mărimile[8] caracteristice mişcării absolute se vor scrie sub forma

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_{tr} \tag{6.29}$$

şi

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_c. \tag{6.30}$$

Pentru a determina semnificaţia fizică a pseudovectorului $\vec{\omega}$ vom considera cazul particular în care $O \equiv O'$ şi $Oz \equiv O'z'$ – axă fixă de rotaţie. Atunci, relaţia (6.22) particularizată pentru valoarea $k = 3$ a indicelui, devine

$$\vec{k}\,' = \vec{\omega} \times \vec{k} = 0,$$

ceea ce ne arată că vectorul axial $\vec{\omega}$ este coliniar cu axa de rotaţie, $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$, unde $\omega = |\vec{\omega}|$. Pe de altă parte, relaţia (6.29) ne conduce la concluzia că vectorul viteză, $\vec{v}$, al particulei P este perpendicular pe planul definit de vectorii $\vec{\omega}$ şi $\vec{r}$, şi are modulul (vezi Fig. VI.5):

[8] Viteza şi respectiv, acceleraţia.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$v = |\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin\alpha = \omega R .$$

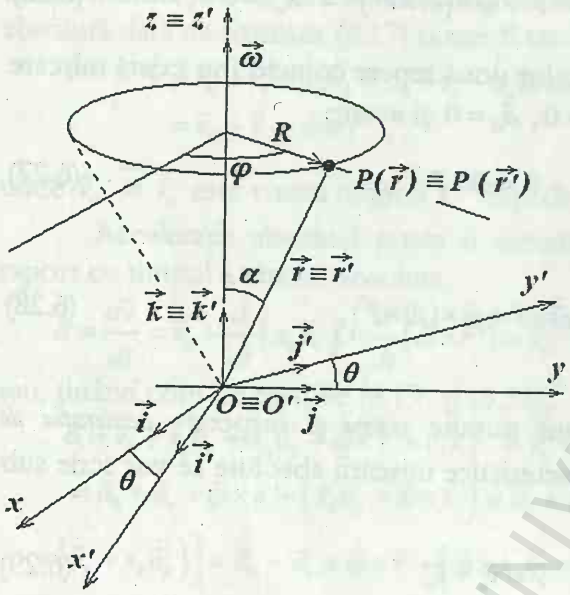


Fig. VI.5

Comparând această relaţie cu cea din cadrul mişcării circulare şi uniforme,

$$v = \dot{\varphi} R \equiv \omega R ,$$

unde $\dot{\varphi} \equiv \omega$ este viteza unghiulară, conchidem că vectorul $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ este direcţionat de-a lungul axei de rotaţie şi are modulul egal cu viteza unghiulară a mişcării de rotaţie, $\dot{\varphi}$; el este numit *vectorul de rotaţie instantanee.*

Revenind la particula noastră, principiul fundamental al dinamicii (*lex secunda*), relativ la referenţialul inerţial S, ne spune că ecuaţia fundamentală a mişcării este

$$\vec{F} = m\vec{a} , \tag{6.31}$$

unde $\vec{F} = -grad\, V(\vec{r})$ este forţa[9] care acţionează asupra particulei. Funcţia Lagrange care descrie mişcarea particulei are în referenţialul inerţial S forma:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 - V(\vec{r}) , \tag{6.32}$$

unde $\vec{v}$ este viteza particulei faţă de reperul S, iar $V(\vec{r})$ este energia ei potenţială.

[9] Am presupus că asupra particulei acţionează doar câmpul forţelor conservative, de energie potenţială $V = V(\vec{r})$.

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Pentru a scrie ecuația de mișcare a particulei în referențialul neinerțial S' trebuie să exprimăm lagrangeanul ca o funcție de noile coordonate, x_i', și noile viteze, $\dot{x}_i'$, $\left(i=\overline{1,3}\right)$, ale particulei (față de noul reper S'). Pentru aceasta ținem cont că (vezi relația (6.23),

$$|\vec{v}|^2=(\vec{v}_0+\vec{v}_r+\vec{\omega}\times\vec{r}')\cdot(\vec{v}_0+\vec{v}_r+\vec{\omega}\times\vec{r}')=|\vec{v}_0|+|\vec{v}_r|+|\vec{\omega}\times\vec{r}'|^2+$$
$$+2\vec{v}_0\cdot\vec{v}_r+2\vec{v}_0\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}')+2\vec{v}_r\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}').$$

Deci, în referențialul S' funcția Lagrange a particulei se va scrie astfel:

$$L=\frac{1}{2}m\left[|\vec{v}_0|^2+|\vec{v}_r|^2+|\vec{\omega}\times\vec{r}'|^2+2\vec{v}_0\cdot\vec{v}_r+2\vec{v}_0\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}')+2\vec{v}_r\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}')\right]-$$
$$-V(\vec{r}').$$

Termenii care conțin pe $\vec{v}_0$ pot fi transformați, după cum urmează:

$$|\vec{v}_0|^2+2\vec{v}_0\cdot\vec{v}_r+2\vec{v}_0\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}')=|\vec{v}_0|^2+2\vec{v}_0\cdot(\vec{v}_r+\vec{\omega}\times\vec{r}')=|\vec{v}_0|^2+2\vec{v}_0\cdot(\vec{v}-\vec{v}_0)=$$
$$=2\vec{v}_0\cdot\vec{v}-|\vec{v}_0|^2=\vec{v}_0\cdot(2\vec{v}-\vec{v}_0)=\vec{v}_0\cdot\frac{d}{dt}(2\vec{r}-\vec{r}_0)=\vec{v}_0\cdot\frac{d}{dt}\left[2(\vec{r}_0+\vec{r}')-\vec{r}_0\right]=$$
$$=\vec{v}_0\cdot\frac{d}{dt}(\vec{r}_0+2\vec{r}')=\frac{d}{dt}\left[\vec{v}_0\cdot(\vec{r}_0+2\vec{r}')\right]-\vec{a}_0\cdot(\vec{r}_0+2\vec{r}')=\frac{d}{dt}\left[\vec{v}_0\cdot(\vec{r}_0+2\vec{r}')\right]-$$
$$-\vec{a}_0\cdot\vec{r}_0-2\vec{a}_0\cdot\vec{r}'.$$

Întrucât expresia $\vec{v}_0\cdot(\vec{r}_0+2\vec{r}')$ depinde doar de coordonate și, eventual, de timp (nu poate depinde de viteze), iar cantitatea $\vec{a}_0\cdot\vec{r}_0$ este și ea o funcție doar de timp (ce poate fi exprimată ca o derivată totală în raport cu timpul a unei alte funcții ce depinde, de asemenea, doar de timp), termenii $\frac{d}{dt}\left[\vec{v}_0\cdot(\vec{r}_0+2\vec{r}')\right]$ și $(-\vec{a}_0\cdot\vec{r}_0)$ pot fi omiși din expresia lagrangeanului (lagrangeeni echivalenți), și atunci rămânem cu

$$L=\frac{1}{2}m\left[|\vec{v}_r|^2+|\vec{\omega}\times\vec{r}'|^2+2\vec{v}_r\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}')-2\vec{a}_0\cdot\vec{r}'\right]-V(\vec{r}')=$$
$$=\frac{1}{2}m|\vec{v}_r|^2+\frac{1}{2}m|\vec{\omega}\times\vec{r}'|^2+m\vec{v}_r\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}')-m\vec{a}_0\cdot\vec{r}'-V(\vec{r}'), \tag{6.33}$$

adică exact relația (6.16), care trebuia demonstrată.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Observație: Pentru a scrie ecuația fundamentală a mișcării particulei în noul referențial (neinerțial) e mai convenabil să exprimăm produsele scalare din expresia funcției Lagrange pe componente,

$$L=\frac{1}{2}m\left|\vec{v}_r\right|^2+\frac{1}{2}m\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right|^2+m\vec{v}_r\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)-m\vec{a}_0\cdot\vec{r}\,'-V(\vec{r}\,')=$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{x}_i'\dot{x}_i'+\frac{1}{2}m\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{inl}\omega_j'\omega_n'x_k'x_l'+m\varepsilon_{ijk}\dot{x}_i'\omega_j'x_k'-ma_{0i}'x_i'-V(x_k')=$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{x}_i'\dot{x}_i'+\frac{1}{2}m\left(\delta_{jn}\delta_{kl}-\delta_{jl}\delta_{kn}\right)\omega_j'\omega_n'x_k'x_l'+m\varepsilon_{ijk}\dot{x}_i'\omega_j'x_k'-ma_{0i}'x_i'-V(x_k')=$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{x}_i'\dot{x}_i'+\frac{1}{2}m\omega_j'\omega_j'x_k'x_k'-\frac{1}{2}m\omega_j'\omega_k'x_k'x_j'+m\varepsilon_{ijk}\dot{x}_i'\omega_j'x_k'-ma_{0i}'x_i'-V(x_k')=$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{x}_i'\dot{x}_i'+\frac{1}{2}m\omega_k'\omega_k'x_i'x_i'-\frac{1}{2}m\left(x_i'\omega_i'\right)\left(x_k'\omega_k'\right)+m\varepsilon_{ijk}\dot{x}_i'\omega_j'x_k'-ma_{0i}'x_i'-V(x_k'),\tag{6.34}$$

unde x_i', $\dot{x}_i'$, ω_i' și a_{0i}' sunt componentele pe axa Ox_i' a mărimilor vectoriale $\vec{r}\,'$, $\vec{v}_r$, $\vec{\omega}$ și respectiv $\vec{a}_0$ în referențialul neinerțial S'.

Ținând cont că

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_s'}=\frac{\partial}{\partial\dot{x}_s'}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}_i'\dot{x}_i'+m\varepsilon_{ijk}\dot{x}_i'\omega_j'x_k'\right)=\frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial\dot{x}_s'}\left(\dot{x}_i'\dot{x}_i'\right)+m\varepsilon_{ijk}\omega_j'x_k'\frac{\partial\dot{x}_i'}{\partial\dot{x}_s'}=$$

$$=\frac{1}{2}m\left(\frac{\partial\dot{x}_i'}{\partial\dot{x}_s'}\dot{x}_i'+\dot{x}_i'\frac{\partial\dot{x}_i'}{\partial\dot{x}_s'}\right)+m\varepsilon_{ijk}\omega_j'x_k'\delta_{is}=\frac{1}{2}m\ 2\dot{x}_i'\frac{\partial\dot{x}_i'}{\partial\dot{x}_s'}+m\varepsilon_{sjk}\omega_j'x_k'=$$

$$=m\dot{x}_i'\delta_{is}+m\varepsilon_{sjk}\omega_j'x_k'=m\dot{x}_s'+m\varepsilon_{sjk}\omega_j'x_k',$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_s'}\right)=m\ddot{x}_s'+m\varepsilon_{sjk}\dot{\omega}_j'x_k'+m\varepsilon_{sjk}\omega_j'\dot{x}_k',$$

și

$$\frac{\partial L}{\partial x_s'}=\frac{\partial}{\partial x_s'}\left(\frac{1}{2}m\omega_k'\omega_k'x_i'x_i'-\frac{1}{2}m\left(x_i'\omega_i'\right)\left(x_k'\omega_k'\right)+m\varepsilon_{ijk}\dot{x}_i'\omega_j'x_k'-ma_{0i}'x_i'-V(x_k')\right)=$$

$$=\frac{1}{2}m\omega_k'\omega_k'\frac{\partial}{\partial x_s'}\left(x_i'x_i'\right)-\frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial x_s'}\left[\left(x_i'\omega_i'\right)\left(x_k'\omega_k'\right)\right]+m\varepsilon_{ijk}\dot{x}_i'\omega_j'\frac{\partial x_k'}{\partial x_s'}-ma_{0i}'\frac{\partial x_i'}{\partial x_s'}-$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-\frac{\partial V}{\partial x_s'}=\frac{1}{2}m\omega_k'\omega_k'\left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_s'}x_i'+x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial x_s'}\right)-\frac{1}{2}m\frac{\partial\left(x_i'\omega_i'\right)}{\partial x_s'}\left(x_k'\omega_k'\right)-\frac{1}{2}m\left(x_i'\omega_i'\right)\times$$

$$\times\frac{\partial\left(x_k'\omega_k'\right)}{\partial x_s'}+m\varepsilon_{ijk}\dot{x}_i'\omega_j'\delta_{ks}-ma_{0i}'\delta_{is}-\frac{\partial V}{\partial x_s'}=\frac{1}{2}m\omega_k'\omega_k'\;2x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial x_s'}-\frac{1}{2}m\omega_i'\frac{\partial x_i'}{\partial x_s'}\times$$

$$\times\left(x_k'\omega_k'\right)-\frac{1}{2}m\left(x_i'\omega_i'\right)\omega_k'\frac{\partial x_k'}{\partial x_s'}+m\varepsilon_{ijs}\dot{x}_i'\omega_j'-ma_{0s}'-\frac{\partial V}{\partial x_s'}=m\omega_k'\omega_k'x_i'\delta_{is}-$$

$$-\frac{1}{2}m\omega_i'\delta_{is}\left(x_k'\omega_k'\right)-\frac{1}{2}m\left(x_i'\omega_i'\right)\omega_k'\delta_{ks}+m\varepsilon_{ijs}\dot{x}_i'\omega_j'-ma_{0s}'-\frac{\partial V}{\partial x_s'}=m\omega_k'\omega_k'x_s'-$$

$$-m\left(x_i'\omega_i'\right)\omega_s'+m\varepsilon_{sij}\dot{x}_i'\omega_j'-ma_{0s}'-\frac{\partial V}{\partial x_s'},$$

ecuațiile Lagrange de speța a II-a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_s'}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_s'}=0,\quad\left(s=\overline{1,3}\right),\tag{6.35}$$

devin

$$m\ddot{x}_s'+m\varepsilon_{sjk}\dot{\omega}_j'x_k'+m\varepsilon_{sjk}\omega_j'\dot{x}_k'-m\omega_k'\omega_k'x_s'+m\left(x_i'\omega_i'\right)\omega_s'-m\varepsilon_{sij}\dot{x}_i'\omega_j'+ma_{0s}'+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x_s'}=m\ddot{x}_s'+m\left(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'\right)_s+m\varepsilon_{sjk}\omega_j'\dot{x}_k'-m\omega_k'\omega_k'x_s'+m\left(x_i'\omega_i'\right)\omega_s'-m\varepsilon_{skj}\dot{x}_k'\omega_j'+$$

$$+ma_{0s}'+\frac{\partial V}{\partial x_s'}=m\ddot{x}_s'+m\left(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'\right)_s+m\varepsilon_{sjk}\omega_j'\dot{x}_k'-m\omega_k'\omega_k'x_s'+m\left(x_i'\omega_i'\right)\omega_s'+$$

$$+m\varepsilon_{sjk}\omega_j'\dot{x}_k'+ma_{0s}'+\frac{\partial V}{\partial x_s'}=m\ddot{x}_s'+m\left(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'\right)_s+2m\varepsilon_{sjk}\omega_j'\dot{x}_k'-m\omega_k'\omega_k'x_s'+$$

$$+m\left(x_i'\omega_i'\right)\omega_s'+ma_{0s}'+\frac{\partial V}{\partial x_s'}=m\ddot{x}_s'+m\left(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'\right)_s+2m\left(\vec{\omega}\times\vec{v}_r\right)_s-m\omega_k'\omega_k'x_s'+$$

$$+m\left(x_i'\omega_i'\right)\omega_s'+ma_{0s}'+\frac{\partial V}{\partial x_s'}=m\ddot{x}_s'+m\left(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'\right)_s+2m\left(\vec{\omega}\times\vec{v}_r\right)_s+$$

$$+m\left[\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)\right]_s+ma_{0s}'+\frac{\partial V}{\partial x_s'}=0,\tag{6.36}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deoarece

$$\left[\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)\right]_s^{\cdot} = \varepsilon_{sij}\omega_i^{\cdot}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)_j = \varepsilon_{sij}\varepsilon_{jnl}\omega_i^{\cdot}\omega_n^{\cdot}x_l^{\cdot} = \varepsilon_{jsi}\varepsilon_{jnl}\omega_i^{\cdot}\omega_n^{\cdot}x_l^{\cdot} =$$

$$= \left(\delta_{sn}\delta_{il} - \delta_{sl}\delta_{in}\right)\omega_i^{\cdot}\omega_n^{\cdot}x_l^{\cdot} = \omega_i^{\cdot}\omega_s^{\cdot}x_i^{\cdot} - \omega_i^{\cdot}\omega_i^{\cdot}x_s^{\cdot}.$$

Ecuaţia (6.36) reprezintă proiecţia pe axa $Ox_s^{\cdot}$ a ecuaţiei vectoriale

$$m\vec{a}_r + m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r + m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right) + m\vec{a}_0 - \vec{F} = 0,$$

care mai poate fi scrisă astfel:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r. \qquad (6.37)$$

Ţinând cont de relaţia (6.26), ecuaţia de mai sus devine

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_{tr} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r = \vec{F} - m\vec{a}_{tr} - m\vec{a}_c, \qquad (6.38)$$

sau, dacă introducem notaţiile:

$$\vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_{tr} \text{ şi } \vec{F}_c = -m\vec{a}_c, \qquad (6.39)$$

aceasta se scrie:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_c \qquad (6.40)$$

şi reprezintă ecuaţia mişcării particulei de masă m în referenţialul neinerţial S'.

După cum putem observa, ecuaţia fundamentală a mişcării particulei nu îşi păstrează forma la trecerea de la reperul inerţial S, la cel neinerţial S'. Pe lângă forţa newtoniană $\vec{F}$ mai apar în reperul S' încă două forţe, $\vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_{tr}$ şi $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$. Forţa $\vec{F}$ este numită *forţă aplicată*, iar forţele $\vec{F}_{tr}$ şi $\vec{F}_c$ sunt numite *forţe de inerţie* [10]. Se mai observă faptul că forţa centripetă $\vec{F}_{cp} = -m\vec{a}_{cp} = -m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)$ intervine doar ca o „componentă"/parte a forţei de transport $\vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_{tr}$. Dacă $\vec{a}_0 = 0$ şi $\vec{\omega} = 0$ (cu alte cuvinte, dacă referenţialul S' devine la rândul său unul inerţial) atunci $\vec{F}_{tr} = 0$ şi $\vec{F}_c = 0$, iar ecuaţia fundamentală a mişcării îşi recapătă forma cunoscută din reperul inerţial S:

$$m\vec{a}_r \equiv m\vec{a} = \vec{F}.$$

[10] Care, în reperul inerţia S nu există, dar în reperul neinerţial S' sunt, în fapt, tot forţe aplicate.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deci, într-un referențial neinerțial, pe lângă forța aplicată (efectivă), $\vec{F}$, mai acționează (tot ca forțe efective, aplicate) și forțele de inerție, $\vec{F}_{ir}$ și $\vec{F}_c$. Cu toate că aceste forțe nu există pentru un observator dintr-un reper inerțial, ele joacă rol de (și chiar sunt) *forțe reale* pentru un observator dintr-un reper neinerțial. Într-un astfel de reper (neinerțial) se poate considera că forțele de inerție sunt datorate (la fel ca, de exemplu, forța de greutate dintr-un reper inerțial, în care aceasta apare ca „efect" al câmpului gravitațional, care este un câmp de forțe potențiale[11]) unor câmpuri de forțe pe care le-am putea numi (prin analogie cu câmpul gravitațional) *câmpuri de forțe inerțiale*. De altfel, această idee se regăsește și în teoria relativității generalizate a lui Einstein, unde „echivalența" (locală) dintre un câmp gravitațional și un câmp de forțe inerțiale este ridicată la rang de principiu (*principiul echivalenței locale*).

Să revenim acum la problema noastră. Drept sistem de referință neinerțial, S', vom considera un reper care este solidar legat de punctul de suspensie al tijei pendulului, O' (vezi Fig. VI.6), punct care oscilează (față de originea O a reperului inerțial considerat inițial) conform legii

$$X = a\cos\omega_0 t\,,$$

deci, care are o mișcare accelerată, cu

$$a_0 = |\vec{a}_0| = \ddot{X} = -a\omega_0^2\cos\omega_0 t\,.$$

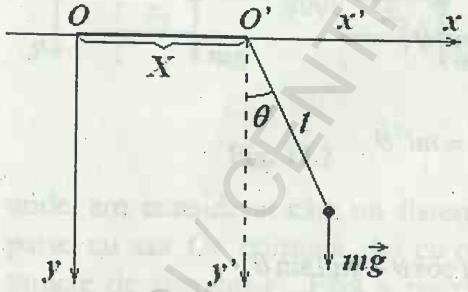


Fig. VI.6

Deoarece în cazul nostru $\vec{\omega} = 0$,

$$\vec{v}_0 = \left(-a\omega_0\sin\omega_0 t,\ 0,\ 0\right),$$

$$\vec{a}_0 = \left(-a\omega_0^2\cos\omega_0 t,\ 0,\ 0\right)$$

și

$$\vec{r}\,' = \left(l\sin\theta,\ l\cos\theta,\ 0\right),$$

relația (6.33) se scrie astfel:

[11] Chiar conservative.

$$L_{SRNI}=\frac{1}{2}m\left|\vec{v}_r\right|^2-m\vec{a}_0\cdot\vec{r}\,'-V(\vec{r}\,')=\frac{1}{2}m\left|\vec{v}-\vec{v}_0\right|^2-m\vec{a}_0\cdot\vec{r}\,'-V(\vec{r}\,'),\quad(6.41)$$

sau,

$$L_{SRNI}\equiv L'=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mal\omega_0^2\cos\omega_0 t\sin\theta+mgl\cos\theta,\quad(6.42)$$

deoarece

$$\vec{v}-\vec{v}_0=\left(\dot{x}-v_{0x},\ \dot{y}-0,\ 0-0\right)=\left(\dot{x}-v_0,\ \dot{y},\ 0\right)=\left(l\dot{\theta}\cos\theta,\ -l\dot{\theta}\sin\theta,\ 0\right)$$

şi

$$V(\vec{r}\,')=V(y')\equiv V(y)=-mgl\cos\theta,$$

căci $y'=y$.

Ecuaţia Lagrange de speţa a II-a pentru lagrangeanul L',

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L'}{\partial\theta}=0,\quad(6.43)$$

este

$$ml^2\ddot{\theta}-mal\omega_0^2\cos\omega_0 t\cos\theta+mgl\sin\theta=0,$$

sau,

$$l\ddot{\theta}-a\omega_0^2\cos\omega_0 t\cos\theta+g\sin\theta=0,\quad(6.44)$$

adică aceeaşi ecuaţie cu cea obţinută lucrând într-un sistem de referinţă inerţial.

Într-adevăr, avem:

$$\frac{\partial L'}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial\dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}$$

şi

$$\frac{\partial L'}{\partial\theta}=mal\omega_0^2\cos\omega_0 t\cos\theta-mgl\sin\theta,$$

care înlocuite în (6.43) dau (6.44).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4. Problema a două pendule identice cuplate

Se consideră două pendule simple identice (vezi Fig. VI.7), fiecare având lungimea l şi masa m. Pendulele sunt legate printr-un resort de masă neglijabilă, netensionat când pendulele sunt în echilibru ($x_1 = x_2 = 0$).

a) să se determine pulsaţiile proprii ale sistemului;

b) să se scrie soluţiile ecuaţiilor de mişcare, dacă la momentul iniţial $t_0 = 0$, $x_1(t_0) = a$, $x_2(t_0) = 0$, iar vitezele iniţiale ale pendulelor sunt nule, $\dot{x}_1(t_0) = 0$, $\dot{x}_2(t_0) = 0$.

Rezolvare

a) Sistemul este unul natural, întrucât, atât câmpul gravitaţional, cât şi câmpul forţelor elastice sunt câmpuri de forţe potenţiale.

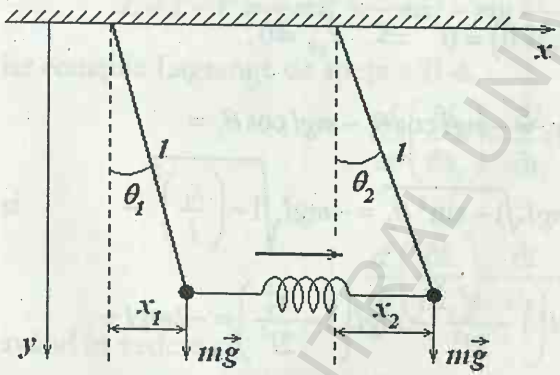


Fig. VI.7

Cu datele din Fig. VI.7, ecuaţiile legăturilor satisfăcute de corpurile sistemului sunt

$$f_1(z_1) = z_1 = 0,$$

$$f_2(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l^2 = 0,$$

$$f_3(z_2) = z_2 = 0,$$

$$f_4(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 - l^2 = 0,$$

unde, am considerat câte un sistem de referinţă pentru fiecare pendul în parte, cu axa Ox comună, dar cu originile în puncte diferite (în cele două puncte de suspensie). Fără a restrânge generalitatea problemei cu nimic am considerat că mişcarea corpurilor se face în planul $z = 0$. Presupunând că oscilaţiile sunt suficient de mici, putem neglija variaţia coordonatei verticale y a celor două corpuri şi putem considera că deplasarea acestora are loc numai de-a lungul axei Ox (mişcare unidimensională). Rezultă că sistemul are $3 \cdot 2 - 4 = 2$ grade de libertate, cărora, ţinând cont de ecuaţiile

legăturilor, le vom asocia ca şi coordonate generalizate, coordonatele lor carteziene x_1 şi x_2. Atunci, energia cinetică a sistemului va fi

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m\left|\vec{v}_1\right|^2 + \frac{1}{2}m\left|\vec{v}_2\right|^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2,$$

iar energia potenţială are două „componente", una gravitaţională şi una elastică, $V = V_g + V_e$. În ceea ce priveşte partea de origine gravitaţională, conform „reţetei standard", putem scrie

$$dV_g = -dA_g = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -mgdy_1 - mgdy_2,$$

deci,

$$V_g = -mgy_1 - mgy_2 + V_{g0},$$

unde, constanta arbitrară de integrare V_{g0} poate fi luată zero, dacă alegem ca nivel de referinţă pentru energia potenţială gravitaţională planul xOz. Într-adevăr,

$$V_g\left(y_1 = 0,\, y_2 = 0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{g0} = 0.$$

Rezultă, astfel, că:

$$V_g = -mgy_1 - mgy_2 = -mgl\cos\theta_1 - mgl\cos\theta_2 =$$

$$= -mgl\sqrt{1-\sin^2\theta_1} - mgl\sqrt{1-\sin^2\theta_2} = -mgl\sqrt{1-\left(\frac{x_1}{l}\right)^2} -$$

$$-mgl\sqrt{1-\left(\frac{x_2}{l}\right)^2} \cong -mgl\left(1-\frac{x_1^2}{2l^2}\right) - mgl\left(1-\frac{x_2^2}{2l^2}\right) = -2mgl +$$

$$+mg\frac{x_1^2}{2l} + mg\frac{x_2^2}{2l}.$$

Pentru partea de origine elastică avem:

$$dV_e = -dA_e = -\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -\left(-k\vec{x}\cdot d\vec{x}\right) = kx\,dx,$$

de unde,

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 + V_{e0},$$

în care, constanta arbitrară de integrare V_{e0} poate fi considerată nulă, dacă se alege ca „nivel" de referinţă pentru energia potenţială elastică starea iniţială, în care deformaţia resortului este zero:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$V_e(x=0)=0 \quad \Rightarrow \quad V_{e0}=0.$$

Atunci, ţinând cont şi de Fig. VI.7,

$$V_e=\frac{1}{2}kx^2 \equiv \frac{1}{2}k(\Delta x)^2=\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2,$$

deoarece, alegând nivelul de referinţă pentru energia potenţială elastică starea iniţială, atunci variabila x din expresia lui V_e va reprezenta chiar deformarea Δx a resortului (cu cât s-a alungit sau s-a comprimat resortul). Energia potenţială totală a sistemului va fi atunci

$$V=-2mgl+mg\frac{x_1^2}{2l}+mg\frac{x_2^2}{2l}+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2.$$

Lăsând la o parte constanta[12] $(-2mgl)$ din expresia energiei potenţiale, funcţia Lagrange a sistemului este

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-mg\frac{x_1^2}{2l}-mg\frac{x_2^2}{2l}-\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2,$$

iar ecuaţiile Lagrange de speţa a II-a,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0$$

şi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0,$$

având în vedere că

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m\dot{x}_1,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=m\ddot{x}_1,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=m\dot{x}_2,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)=m\ddot{x}_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-mg\frac{x_1}{l}+k(x_2-x_1) \text{ şi } \frac{\partial L}{\partial x_2}=-mg\frac{x_2}{l}-k(x_2-x_1),$$

devin:

$$m\ddot{x}_1+mg\frac{x_1}{l}-k(x_2-x_1)=0$$

şi respectiv,

[12] Acest lucru este posibil, întrucât, după cum ştim, doi lagrangeeni care diferă printr-o constantă sunt echivalenţi.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$m\ddot{x}_2 + mg\frac{x_2}{l} + k(x_2 - x_1) = 0,$$

sau,

$$m\ddot{x}_1 = -mg\frac{x_1}{l} + k(x_2 - x_1) \tag{6.45}$$

şi respectiv,

$$m\ddot{x}_2 = -mg\frac{x_2}{l} - k(x_2 - x_1). \tag{6.46}$$

Considerând că sistemul efectuează oscilaţii mici, vom căuta soluţii de forma:

$$x_1 = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t, \tag{6.47}$$

şi respectiv,

$$x_2 = A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t. \tag{6.48}$$

Impunând ca aceste soluţii să verifice ecuaţiile diferenţiale (6.45) şi (6.46) ale mişcării sistemului, obţinem:

$$-m\omega^2 A_1 \sin \omega t - m\omega^2 B_1 \cos \omega t = -mg\frac{A_1}{l}\sin \omega t - mg\frac{B_1}{l}\cos \omega t +$$

$$+kA_2 \sin \omega t + kB_2 \cos \omega t - kA_1 \sin \omega t - kB_1 \cos \omega t$$

respectiv,

$$-m\omega^2 A_2 \sin \omega t - m\omega^2 B_2 \cos \omega t = -mg\frac{A_2}{l}\sin \omega t - mg\frac{B_2}{l}\cos \omega t -$$

$$-kA_2 \sin \omega t - kB_2 \cos \omega t + kA_1 \sin \omega t + kB_1 \cos \omega t.$$

Identificând coeficienţii funcţiilor trigonometrice $\sin \omega t$ şi $\cos \omega t$ din cei doi membri ai relaţiilor de mai sus obţinem:

$$-m\omega^2 A_1 = -mg\frac{A_1}{l} + kA_2 - kA_1, \tag{6.49}$$

şi

$$-m\omega^2 B_1 = -mg\frac{B_1}{l} + kB_2 - kB_1 \tag{6.50}$$

respectiv,

$$-m\omega^2 A_2 = -mg\frac{A_2}{l} - kA_2 + kA_1 \tag{6.51}$$

şi

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-m\omega^2 B_2 = -mg\frac{B_2}{l} - kB_2 + kB_1 . \tag{6.52}$$

Pentru ca sistemul

$$\begin{cases} \left(-m\omega^2 + \dfrac{mg}{l} + k\right)A_1 - kA_2 = 0, \\ -kA_1 + \left(-m\omega^2 + \dfrac{mg}{l} + k\right)A_2 = 0, \end{cases}$$

format din ecuațiile (6.49) și (6.51) să fie compatibil trebuie ca

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + \dfrac{mg}{l} + k & -k \\ -k & -m\omega^2 + \dfrac{mg}{l} + k \end{vmatrix} = 0,$$

adică,

$$\left(-m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k\right)^2 - k^2 = 0,$$

sau,

$$\left(-m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k\right)^2 = k^2,$$

de unde,

$$-m\omega^2 + \frac{mg}{l} + k = \pm k,$$

ceea ce conduce la următoarele soluții pentru ω^2:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \pm \frac{k}{m}, \tag{6.53}$$

adică,

$$\omega_1^2 \equiv \omega_M^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \tag{6.54}$$

și

$$\omega_2^2 \equiv \omega_m^2 = \frac{g}{l}. \tag{6.55}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aceleași valori ale frecvențelor se obțin folosind ecuațiile rămase, (6.50) și (6.52) în necunoscutele B_1 și B_2. Lăsăm cititorul să se convingă singur de aceasta.

Înlocuind pe ω_M^2 din (6.54) în ecuația (6.49) obținem:

$$-m\omega_M^2 A_1 = -m\left(\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}\right)A_1 = -mg\frac{A_1}{l}+kA_2-kA_1,$$

sau,

$$-m\frac{g}{l}A_1-2kA_1 = -mg\frac{A_1}{l}+kA_2-kA_1,$$

de unde,

$$A_2 = -A_1. \tag{6.56}$$

Substituind acum pe ω_M^2 din (6.54) în ecuația (6.50) obținem:

$$-m\omega_M^2 B_1 = -m\left(\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}\right)B_1 = -mg\frac{B_1}{l}+kB_2-kB_1,$$

sau,

$$-m\frac{g}{l}B_1-2kB_1 = -mg\frac{B_1}{l}+kB_2-kB_1,$$

de unde,

$$B_2 = -B_1. \tag{6.57}$$

Reluând aceleași calcule cu ω_m^2 în locul lui ω_M^2, avem (utilizând (6.55) în (6.49)):

$$-m\omega_m^2 A_1 = -m\frac{g}{l}A_1 = -mg\frac{A_1}{l}+kA_2-kA_1,$$

de unde,

$$A_2 = A_1. \tag{6.58}$$

Apoi, cu ω_m^2 din (6.55) în (6.50) găsim:

$$-m\omega_m^2 B_1 = -m\frac{g}{l}B_1 = -mg\frac{B_1}{l}+kB_2-kB_1,$$

adică

$$B_2 = B_1. \tag{6.59}$$

Ținând cont că sistemul are două frecvențe de oscilație, soluțiile (6.47) și (6.48) ale ecuațiilor diferențiale ale mișcării celor două pendule

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cuplate se vor scrie ca o superpoziție a celor două moduri de oscilație. Având în vedere relațiile (6.56) ÷ (6.59), pentru x_1 și x_2 putem scrie atunci:

$$x_1 = C_1 \sin \omega_M t + C_2 \cos \omega_M t + C_3 \sin \omega_m t + C_4 \cos \omega_m t \qquad (6.60)$$

și

$$x_2 = -C_1 \sin \omega_M t - C_2 \cos \omega_M t + C_3 \sin \omega_m t + C_4 \cos \omega_m t\,, \qquad (6.61)$$

unde constantele arbitrare de integrare C_i, $\left(i = \overline{1,4}\right)$ se determină din condițiile inițiale.

b) Din enunțul problemei cunoaștem că la $t = 0$, $x_1 = a$ și $x_2 = 0$. Atunci, pentru vitezele inițiale obținem imediat $\dot{x}_1(t=0) = \dot{a} = 0$ și $\dot{x}_2(t=0) = 0$. Din relațiile (6.60) și (6.61) rezultă următoarele expresii generale pentru viteze:

$$\dot{x}_1 = \omega_M C_1 \cos \omega_M t - \omega_M C_2 \sin \omega_M t + \omega_m C_3 \cos \omega_m t - \omega_m C_4 \sin \omega_m t$$

și

$$\dot{x}_2 = -\omega_M C_1 \cos \omega_M t + \omega_M C_2 \sin \omega_M t + \omega_m C_3 \cos \omega_m t - \omega_m C_4 \sin \omega_m t\,.$$

Impunând acum condițiile inițiale obținem:

$$x_1(t=0) = a = C_2 + C_4\,, \qquad (6.62)$$

$$x_2(t=0) = 0 = -C_2 + C_4\,, \qquad (6.63)$$

$$\dot{x}_1(t=0) = 0 = \omega_M C_1 + \omega_m C_3 \qquad (6.64)$$

și

$$\dot{x}_2(t=0) = 0 = -\omega_M C_1 + \omega_m C_3\,. \qquad (6.65)$$

Din relațiile (6.62) și (6.63) rezultă imediat că $C_2 = C_4 = a/2$, iar din relațiile (6.64) și (6.65) rezultă că $C_1 = C_3 = 0$.

Așadar, condițiile inițiale impuse de enunțul problemei determină următoarele soluții pentru ecuațiile de mișcare:

$$x_1 = \frac{a}{2}\cos \omega_M t + \frac{a}{2}\cos \omega_m t = \frac{a}{2}\left(\cos \omega_M t + \cos \omega_m t\right) \qquad (6.66)$$

și

$$x_2 = -\frac{a}{2}\cos \omega_M t + \frac{a}{2}\cos \omega_m t = \frac{a}{2}\left(\cos \omega_m t - \cos \omega_M t\right), \qquad (6.67)$$

sau,

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$x_1 = \frac{a}{2}\ 2\ \cos\left(\frac{\omega_M+\omega_m}{2}\right)t\ \cos\left(\frac{\omega_M-\omega_m}{2}\right)t =$$

$$= a\cos\left(\frac{\omega_M+\omega_m}{2}\right)t\ \cos\left(\frac{\omega_M-\omega_m}{2}\right)t \overset{not.}{=} A_{\text{mod}}(t)\cos\left(\frac{\omega_M+\omega_m}{2}\right)t \tag{6.68}$$

și

$$x_2 = \frac{a}{2}\ 2\ \sin\left(\frac{\omega_M+\omega_m}{2}\right)t\ \sin\left(\frac{\omega_M-\omega_m}{2}\right)t =$$

$$= a\sin\left(\frac{\omega_M+\omega_m}{2}\right)t\ \sin\left(\frac{\omega_M-\omega_m}{2}\right)t \overset{not.}{=} B_{\text{mod}}(t)\sin\left(\frac{\omega_M+\omega_m}{2}\right)t, \tag{6.69}$$

adică apare *fenomenul de bătăi*, pulsația bătăilor fiind

$$\omega_{bat.} = 2\omega_{\text{mod}} = \omega_M - \omega_m. \tag{6.70}$$

5. Problema a două pendule diferite cuplate

Două pendule simple de mase m_1 și m_2 și lungimi l_1, respectiv l_2 sunt cuplate printr-un resort de constantă elastică k montat la distanța h de punctele lor de suspensie (vezi Fig. VI.8). Presupunând resortul netensionat când pendulele sunt în echilibru ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$), să se scrie ecuațiile de mișcare ale sistemului și să se determine soluțiile acestora în cazul micilor oscilații, în ipoteza că mișcarea are loc doar în plan vertical.

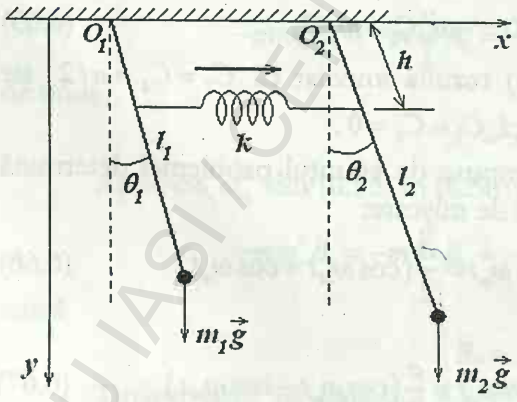


Fig. VI.8

Rezolvare

Deoarece atât câmpul gravitațional, cât și câmpul forțelor elastice sunt câmpuri potențiale de forță, sistemul este

BCU IAȘI / COLECȚIA UNIVERSITAS LIBRARY

unul natural. Pentru a determina numărul gradelor de libertate ale sistemului vom scrie mai întâi ecuațiile legăturilor. Acestea sunt:

$$f_1(z_1) = z_1 = 0,$$

$$f_2(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0,$$

$$f_3(z_2) = z_2 = 0$$

şi

$$f_4(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 - l_2^2 = 0,$$

unde, am considerat câte un sistem de referință pentru fiecare pendul în parte, cu axa Ox comună, dar cu originile în puncte diferite (în cele două puncte de suspensie, O_1 şi O_2 – vezi Fig. VI.8). Aşadar, sistemul are $3 \cdot 2 - 4 = 2$ grade de libertate, cărora le vom asocia ca şi coordonate generalizate unghiurile θ_1 şi θ_2 făcute de cele două tije ideale (rigide şi de masă neglijabilă) cu verticala. Întrucât

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin\theta_1, \\ y_1 = l_1 \cos\theta_1 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} x_2 = l_2 \sin\theta_2, \\ y_2 = l_2 \cos\theta_2, \end{cases}$$

energia cinetică a sistemului este

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2\right),$$

iar pentru energia potențială avem:

$$V = V_g + V_e,$$

unde V_g este „componenta" gravitațională, iar V_e – cea elastică (datorată câmpului forțelor elastice din resort). Pentru V_g putem scrie:

$$dV_g = -dA_g = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -m_1 g dy_1 - m_2 g dy_2,$$

deci,

$$V_g = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 + V_{g0},$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde constanta arbitrară de integrare V_{g0} poate fi luată zero, dacă alegem ca nivel de referință pentru energia potențială gravitațională planul xOz. Într-adevăr,

$$V_g(y_1 = 0, y_2 = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{g0} = 0.$$

Deci,

$$V_g = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2 =$$
$$= -g(m_1 l_1 \cos\theta_1 + m_2 l_2 \cos\theta_2).$$

Pentru partea de origine elastică avem:

$$dV_e = -dA_e = -\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -(-k\vec{x} \cdot d\vec{x}) = kx\,dx,$$

de unde,

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 + V_{e0},$$

în care, constanta arbitrară de integrare V_{e0} poate fi considerată nulă, dacă se alege ca „nivel" de referință pentru energia potențială elastică starea inițială, în care deformația resortului este zero:

$$V_e(x = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{e0} = 0.$$

Atunci, energia potențială elastică V_e va fi

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 \equiv \frac{1}{2}k(\Delta x)^2,$$

deoarece, alegând „nivelul de referință" pentru energia potențială elastică a resortului chiar starea inițială, variabila generică x din expresia lui V_e va reprezenta chiar deformarea Δx a resortului (cu cât s-a alungit, ori s-a comprimat resortul). Din Fig. VI.8 se observă că:

$$|\Delta x| = |x_2 - x_1| = h|\sin\theta_2 - \sin\theta_1|$$

și, ținând cont de identitatea trigonometrică

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

V_e devine

$$V_e = \frac{1}{2}kh^2\left[4\sin^2\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\right].$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece au apărut deja termeni de ordinul doi, vom utiliza ipoteza micilor oscilații, în care

$$\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)=\frac{\theta_2-\theta_1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)^3\cong\frac{\theta_2-\theta_1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)^4\cong 1,$$

și atunci V_e devine

$$V_e=\frac{1}{2}kh^2\left(\theta_2-\theta_1\right)^2.$$

Așadar, energia potențială totală a sistemului este

$$V=V_g+V_e=-g\left(m_1l_1\cos\theta_1+m_2l_2\cos\theta_2\right)+\frac{1}{2}kh^2\left(\theta_2-\theta_1\right)^2,$$

iar funcția Lagrange a sistemului este

$$L=T-V=\frac{1}{2}\left(m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2+m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2\right)+g\left(m_1l_1\cos\theta_1+m_2l_2\cos\theta_2\right)-\frac{1}{2}kh^2\left(\theta_2-\theta_1\right)^2,$$

care, în ipoteza micilor oscilații (ipoteză deja folosită în deducerea lui V_e), adică, atunci când putem utiliza aproximațiile:

$$\cos\theta_1\cong 1-\frac{1}{2}\theta_1^2 \text{ și } \cos\theta_2\cong 1-\frac{1}{2}\theta_2^2,$$

se va scrie

$$L=T-V=\frac{1}{2}\left(m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2+m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2\right)-\frac{1}{2}g\left(m_1l_1\theta_1^2+m_2l_2\theta_2^2\right)-\frac{1}{2}kh^2\left(\theta_2-\theta_1\right)^2,$$

unde am lăsat la o parte termenul constant $g\left(m_1l_1+m_2l_2\right)$ (lagrangeeni echivalenți).

Având în vedere că

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}=m_il_i^2\dot{\theta}_i,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}\right)=m_il_i^2\ddot{\theta}_i,\ (i=1,\ 2)$$

și

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=-gm_1l_1\theta_1+kh^2\left(\theta_2-\theta_1\right),$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -gm_2 l_2 \theta_2 - kh^2 (\theta_2 - \theta_1)$$

ecuaţiile Lagrange de speţa a II-a,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad (i = 1,\ 2)$$

devin

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + gm_1 l_1 \theta_1 - kh^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0 \tag{6.71}$$

şi

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + gm_2 l_2 \theta_2 + kh^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0\,. \tag{6.72}$$

Să revenim acum la funcţia lui Lagrange pentru micile oscilaţii,

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2\right) - \frac{1}{2} g \left(m_1 l_1 \theta_1^2 + m_2 l_2 \theta_2^2\right) - \frac{1}{2} kh^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 . \tag{6.73}$$

Punând $x_1 = \sqrt{m_1}\ l_1 \theta_1$ şi $x_2 = \sqrt{m_2}\ l_2 \theta_2$, avem $\dot{x}_1 = \sqrt{m_1}\ l_1 \dot{\theta}_1$ şi $\dot{x}_2 = \sqrt{m_2}\ l_2 \dot{\theta}_2$, de unde,

$$\theta_1 = \frac{x_1}{l_1 \sqrt{m_1}}, \quad \theta_2 = \frac{x_2}{l_2 \sqrt{m_2}}$$

şi

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{x}_1}{l_1 \sqrt{m_1}}, \text{ respectiv } \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{x}_2}{l_2 \sqrt{m_2}},$$

iar lagrangeanul (6.73) devine

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2\right) - \frac{1}{2} g \left(m_1 l_1 \theta_1^2 + m_2 l_2 \theta_2^2\right) - \frac{1}{2} kh^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{l_1} x_1^2 + \frac{g}{l_2} x_2^2\right) - \frac{1}{2} kh^2 \left(\frac{x_2}{l_2 \sqrt{m_2}} - \frac{x_1}{l_1 \sqrt{m_1}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2}\right) x_1^2 + \left(\frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2}\right) x_2^2\right] + \frac{kh^2}{l_1 l_2 \sqrt{m_1 m_2}} x_1 x_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2\right) + \kappa x_1 x_2,$$

unde am utilizat notaţiile:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l_{1,2}} + \frac{kh^2}{m_{1,2} l_{1,2}^2} \tag{6.74}$$

şi

$$\kappa = \frac{kh^2}{l_1 l_2 \sqrt{m_1 m_2}}. \tag{6.75}$$

Aşadar, problema revine la a studia micile oscilaţii ale unui sistem fizic descris de lagrangeanul

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2\right) + \kappa x_1 x_2, \tag{6.76}$$

cu $\omega_{1,2}$ şi κ date de relaţiile (6.74) şi respectiv (6.75).

În cele ce urmează, vom face „o mică paranteză" şi ne vom opri atenţia asupra acestei probleme mai generale anume, studiul mişcării unui sistem fizic al cărui lagrangean este dat de relaţia (6.76).

O modalitate elegantă de a introduce/determina coordonatele normale este de a face o schimbare de coordonate generalizate,

$$(x_1, x_2) \to (\eta_1, \eta_2), \tag{6.77}$$

care să lase lagrangeanul pătratic în noile viteze generalizate, dar care, în plus, să devină pătratic şi în noile coordonate generalizate (cu alte cuvinte, în noile coordonate – cele normale – coeficientul termenului mixt să se anuleze). Deoarece avem doar două coordonate generalizate, această schimbare de coordonate se poate face considerând formal transformarea (6.77) ca o rotaţie în plan, adică dată de

$$\begin{cases} x_1 = \eta_1 \cos\varphi - \eta_2 \sin\varphi, \\ x_2 = \eta_1 \sin\varphi + \eta_2 \cos\varphi, \end{cases} \tag{6.78}$$

cu φ o mărime constantă. Într-adevăr, deoarece

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\eta}_1 \cos\varphi - \dot{\eta}_2 \sin\varphi, \\ \dot{x}_2 = \dot{\eta}_1 \sin\varphi + \dot{\eta}_2 \cos\varphi, \end{cases}$$

în noile coordonate avem:

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică lagrangeanul rămâne pătratic în vitezele generalizate, iar termenul mixt $\kappa x_1 x_2$ devine

$$\kappa x_1 x_2 = \kappa(\eta_1 \cos\varphi - \eta_2 \sin\varphi)(\eta_1 \sin\varphi + \eta_2 \cos\varphi) =$$
$$= \kappa\eta_1^2 \sin\varphi\cos\varphi - \kappa\eta_2^2 \sin\varphi\cos\varphi + \kappa\eta_1\eta_2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) =$$
$$= \kappa \sin\varphi\cos\varphi(\eta_1^2 - \eta_2^2) + \kappa\eta_1\eta_2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Pe de altă parte, termenul $-\frac{1}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2)$ se va scrie:

$$-\frac{1}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2) = -\frac{1}{2}\left[\omega_1^2(\eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi)^2 + \omega_2^2(\eta_1\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi)^2\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\eta_1^2(\omega_1^2\cos^2\varphi + \omega_2^2\sin^2\varphi) + \eta_2^2(\omega_1^2\sin^2\varphi + \omega_2^2\cos^2\varphi) + \right.$$
$$\left. + 2\eta_1\eta_2\sin\varphi\cos\varphi(\omega_2^2 - \omega_1^2)\right],$$

astfel încât, pentru ca lagrangeanul să fie pătratic şi în noile coordonate[13], trebuie ca termenul mixt (cel în $\eta_1\eta_2$) să se anuleze:

$$\eta_1\eta_2\left[\kappa(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - \sin\varphi\cos\varphi(\omega_2^2 - \omega_1^2)\right] = 0,$$

ceea ce implică

$$\kappa(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \sin\varphi\cos\varphi(\omega_2^2 - \omega_1^2),$$

adică,

$$\kappa\cos 2\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi(\omega_2^2 - \omega_1^2),$$

de unde,

$$ctg\,2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}. \qquad (6.79)$$

Deci, alegând pentru constanta φ din transformarea de coordonate (6.78) valoarea dată de relaţia (6.79), noile coordonate vor fi chiar

[13] Adică, pentru ca noile coordonate să reprezinte chiar coordonatele normale.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

coordonatele normale. Atunci, în noile coordonate, η_1 şi η_2, lagrangeanul problemei va avea forma:

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)-\frac{1}{2}\left(\omega_1^2x_1^2+\omega_2^2x_2^2\right)+\kappa x_1x_2=\frac{1}{2}\left(\dot{\eta}_1^2+\dot{\eta}_2^2\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\Big[\eta_1^2\left(\omega_1^2\cos^2\varphi+\omega_2^2\sin^2\varphi-2\kappa\sin\varphi\cos\varphi\right)+$$

$$+\eta_2^2\left(\omega_1^2\sin^2\varphi+\omega_2^2\cos^2\varphi+2\kappa\sin\varphi\cos\varphi\right)\Big],$$

sau, dacă notăm:

$$\varpi_1^2 \overset{not.}{=} \omega_1^2\cos^2\varphi+\omega_2^2\sin^2\varphi-2\kappa\sin\varphi\cos\varphi$$

şi

$$\varpi_2^2 \overset{not.}{=} \omega_1^2\sin^2\varphi+\omega_2^2\cos^2\varphi+2\kappa\sin\varphi\cos\varphi,$$

adică,

$$\varpi_1^2=\frac{1}{2}\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)-\sqrt{\kappa^2+\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)/4} \tag{6.80}$$

şi

$$\varpi_2^2=\frac{1}{2}\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)+\sqrt{\kappa^2+\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)/4}, \tag{6.81}$$

atunci, noul lagrangean devine

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{\eta}_1^2+\dot{\eta}_2^2\right)-\frac{1}{2}\left(\varpi_1^2\eta_1^2+\varpi_2^2\eta_2^2\right), \tag{6.82}$$

care reprezintă lagrangeanul unui sistem format din doi oscilatori liniar armonici, având pulsaţiile proprii (pulsaţiile normale) ϖ_1 şi ϖ_2 date de relaţiile (6.80) şi (6.81), η_1 şi η_2 jucând rol de coordonate normale.

În deducerea relaţiilor (6.80) şi (6.81) am ţinut cont de faptul că

$$ctg2\varphi=\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa} \overset{not.}{=} a, \tag{6.83}$$

sau,

$$\frac{1-2\sin^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi}=a \Leftrightarrow 1+4\sin^4\varphi-4\sin^2\varphi=4a^2\sin^2\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right),$$

cu soluţia acceptabilă fizic

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\sin^2\varphi=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right). \tag{6.84}$$

Atunci,

$$\cos^2\varphi=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

şi

$$-2\kappa\sin\varphi\cos\varphi=-\kappa\sin 2\varphi=-\kappa\frac{\cos 2\varphi}{ctg2\varphi}=-\kappa\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{a}=$$

$$=-\kappa\frac{a}{a\sqrt{1+a^2}}=-\frac{\kappa}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Restul calculelor pot fi realizate cu uşurinţă, rezultând astfel relaţiile (6.80) şi (6.81).

Să vedem în continuare cum depinde φ de valorile pulsaţiilor ω_1 şi ω_2. În Fig. VI.9 este reprezentat φ în funcţie de $\omega_1\equiv x$ pentru ω_2 fixat. Acesta ia valori între zero[14] şi $\frac{\pi}{2}$, intervalul $\Delta\omega_1$ în care are loc tranziţia de

---

[14] De fapt, aceasta este o valoare aproximativă, deoarece, de exemplu, pentru $\omega_2=4\ rad/s$ şi $\kappa=0.01\ (rad/s)^2$ avem:

$$\lim_{\omega_1\to 0}\varphi=\lim_{\omega_1\to 0}\left[\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right]=\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega_2^2}{\sqrt{4\kappa^2+\omega_2^4}}\right)}=$$

$$=\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{16}{\sqrt{4\cdot 10^{-4}+4^4}}\right)}=0.000625,\ \text{care poate fi doar aproximat cu zero.}$$

În cazul general (pentru orice valori ale lui ω_2 şi κ, dar astfel încât κ să poată fi neglijat în raport cu $\omega_2^2/2$, adică pentru $\frac{4\kappa^2}{\omega_2^4}\to 0$) avem:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\lim_{\omega_1\to 0}\varphi=\lim_{\omega_1\to 0}\left[\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right]=\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega_2^2}{\sqrt{4\kappa^2+\omega_2^4}}\right)}=$$

$$=\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2\sqrt{1+\dfrac{4\kappa^2}{\omega_2^4}}}\right)}\overset{\frac{4\kappa^2}{\omega_2^4}\to 0}{\cong}\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2}\right)}=\arcsin 0=0.$$

În ceea ce priveşte $\lim_{\omega_1\to\infty}\varphi$, calcule simple efectuate pentru aceleaşi valori ale lui ω_2 şi κ arată că valoarea acestei limite este $\frac{\pi}{2}=1{,}5708$. Într-adevăr, după cum simplu se poate verifica, deja pentru $\omega_1=87$ expresia $\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}$ capătă exact valoarea $1{,}5708=\frac{\pi}{2}$, care se menţine apoi, oricât de mult ar creşte ω_1. Aşadar, $\lim_{\omega_1\to\infty}\varphi=\pi/2$. Acest lucru rezultă şi prin calcul direct:

$$\lim_{\omega_1\to\infty}\varphi=\lim_{\omega_1\to\infty}\left[\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right]=\lim_{\omega_1\to\infty}\left[\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\dfrac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right]=$$

$$=\lim_{\omega_1\to\infty}\left[\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\dfrac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right]=\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1+1)}=\arcsin\sqrt{1}=\frac{\pi}{2}.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

la valoarea $\varphi \cong 0$ la $\varphi \cong \pi/2$ fiind de ordinul lui κ/ω_2; deci, cu atât mai îngust, cu cât κ este mai mic. Acest lucru poate fi observat cu uşurinţă din Fig. VI.9, în care φ este reprezentat ca funcţie de $\omega_1 \equiv x$ pentru trei valori ale lui κ, respectiv, $\kappa_1 = 0,2$; $\kappa_2 = 1,2$ şi $\kappa_3 = 3,2$. Acest lucru a fost făcut cu ajutorul următoarelor instrucţiuni din cadrul soft-ului specializat în calcule analitice şi numerice Mathematica 4.0:

```
Off[General::spell]
Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];

k1 := 0.2;
k2 := 1.2;
k3 := 3.2;

Omega2 := 4;

f1 = Plot[Pi/4, {x, 0, 2.5*Pi}];
f2 = Plot[ArcSin[
   Sqrt[(1*(1 - (Omega2^2 - x^2)/(2*k1*Sqrt[1 + ((Omega2^2 -
x^2)/(2*k1))^2])))/2]],
  {x, 0, 2.5*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
f3 = Plot[ArcSin[
   Sqrt[(1*(1 - (Omega2^2 - x^2)/(2*k2*Sqrt[1 + ((Omega2^2 -
x^2)/(2*k2))^2])))/2]],
  {x, 0, 2.5*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
f4 = Plot[ArcSin[
   Sqrt[(1*(1 - (Omega2^2 - x^2)/(2*k3*Sqrt[1 + ((Omega2^2 -
x^2)/(2*k3))^2])))/2]],
  {x, 0, 2.5*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];

Show[f1, f2, f3, f4];
```

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

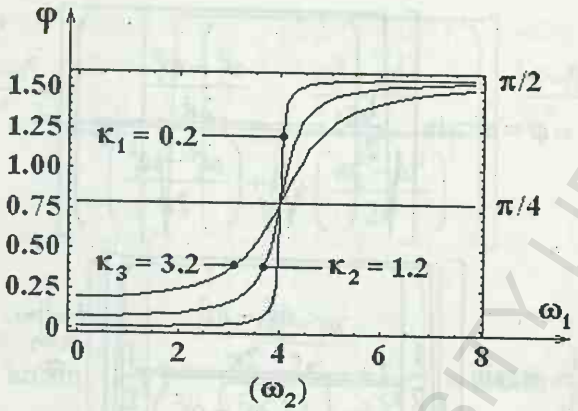


Fig. VI.9

Dacă avem un cuplaj slab $\left(\kappa \ll \left|\omega_2^2 - \omega_1^2\right|\right)$, oscilațiile normale sunt „localizate", adică, pentru $\omega_1 < \omega_2$ din (6.84) avem:

$$\varphi \overset{\omega_2^2-\omega_1^2 \gg \kappa}{=} \arcsin\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right] \overset{\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\kappa} \gg 1}{\cong}$$

$$\overset{\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\kappa} \gg 1}{\cong} \arcsin\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right] = \arcsin 0 = 0$$

și deci, din (6.78) obținem:

$$\begin{cases} x_1 \cong \eta_1, \\ x_2 \cong \eta_2, \end{cases} \tag{6.85}$$

iar pentru $\omega_1 > \omega_2$ avem:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\varphi = \arcsin\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right] =$$

$$= \arcsin\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right] \overset{\substack{|\omega_2^2-\omega_1^2|\gg\kappa,\\ \omega_1>\omega_2}}{\cong}$$

$$\overset{\substack{|\omega_2^2-\omega_1^2|\gg\kappa,\\ \omega_1>\omega_2}}{\cong} \arcsin\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2\kappa}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right] = \arcsin\sqrt{1} = \frac{\pi}{2},$$

astfel că din (6.78) obținem:

$$\begin{cases} x_1 \cong -\eta_2, \\ x_2 \cong \eta_1. \end{cases} \tag{6.86}$$

În cazul cuplajului tare, $\kappa \gg \left|\omega_2^2-\omega_1^2\right|$, oscilațiile nu mai sunt localizate. Într-adevăr, în acest caz:

$$\varphi \overset{|\omega_2^2-\omega_1^2|\ll\kappa}{=} \arcsin\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right] \overset{\frac{|\omega_2^2-\omega_1^2|}{\kappa}\ll 1}{=}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\overset{\frac{|\omega_2^2-\omega_1^2|}{\kappa}\ll 1}{=} \arcsin\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right] \overset{\frac{|\omega_2^2-\omega_1^2|}{\kappa}\to 0}{=}$$

$$\overset{\frac{|\omega_2^2-\omega_1^2|}{\kappa}\to 0}{=} \arcsin\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\kappa}\right)^2}}\right)}\right] = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},$$

iar din relaţiile (6.78) obţinem:

$$\begin{cases} x_1 \cong \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 - \eta_2), \\ x_2 \cong \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + \eta_2). \end{cases} \tag{6.87}$$

Relaţiile (6.80) şi (6.81) ne dau dependenţa pulsaţiilor normale de parametrii ω_1, ω_2 şi κ. Aceasta este reprezentată grafic în Fig. VI.10, unde sunt redate ϖ_1 şi ϖ_2 în funcţie de ω_1 la ω_2 fixat (mai exact, am considerat $\omega_2 = 4\ rad/s$) şi cuplaj relativ slab (pentru ilustrare am considerat valoarea $\kappa = 8\ (rad/s)^2$). Acest lucru a fost realizat cu ajutorul următorului set de instrucţiuni din cadrul soft-ului amintit mai sus:

```
Off[General::spell]
Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];

k := 8;
Omega2 := 4;
```

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

```
g1 = Sqrt[(Omega2^2 + x^2)/2 - Sqrt[k^2 + (Omega2^2 - x^2)^2/4]];
g2 = Sqrt[(Omega2^2 + x^2)/2 + Sqrt[k^2 + (Omega2^2 - x^2)^2/4]];
g3 = Sqrt[Abs[(Omega2^2 + x^2)/2 - Sqrt[k^2 + (Omega2^2 -
x^2)^2/4]]];

h1 = Plot[g1, {x, k/Omega2, 3*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
h2 = Plot[g2, {x, 0, 3*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
h3 = Plot[a, {x, 0, 3*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
h4 = Plot[x, {x, 0, 3*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];
h5 = Plot[g3, {x, 0, 3*Pi}, Frame -> True, PlotRange -> All];

Show[h1, h2, h3, h4];
Show[h1, h2, h3, h4, h5];
```

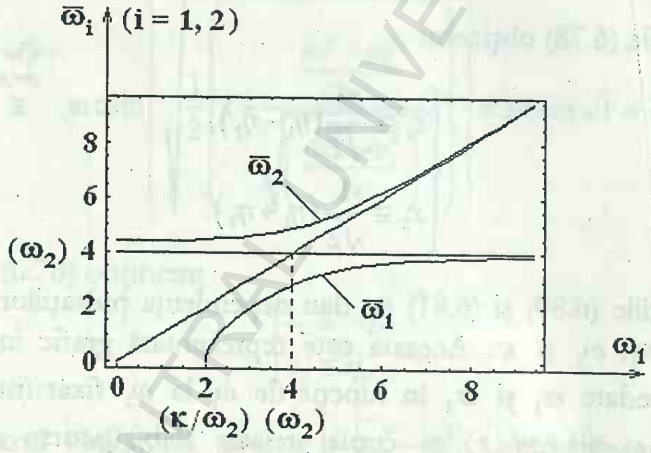


Fig. VI.10

Se observă că $\varpi_1 < \min(\omega_1, \omega_2)$ şi $\varpi_2 > \max(\omega_1, \omega_2)$. Dacă cuplajul este slab (κ suficient de mic), atunci, cu excepţia domeniului de degenerare $\left|\omega_2^2 - \omega_1^2\right| \approx \kappa$, pulsaţiile normale coincid practic cu ω_1 şi respectiv ω_2. Într-adevăr, dacă κ poate fi neglijat în comparaţie cu $\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2}$ (aceasta arătând ce înseamnă κ „suficient de mic") atunci

$$\sqrt{\kappa^2+\frac{\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)^2}{4}}\cong\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}$$

şi din relaţiile (6.80) şi (6.81) rezultă:

$$\varpi_{1,2}^2=\frac{\omega_1^2}{2}+\frac{\omega_2^2}{2}\mp\left(\frac{\omega_2^2}{2}-\frac{\omega_1^2}{2}\right),$$

adică $\varpi_1=\omega_1$ şi $\varpi_2=\omega_2$.

În fine, pentru pulsaţii ω_1 foarte mici, una din pulsaţiile normale (mai exact, ϖ_1) devine imaginară, ceea ce înseamnă că sistemul nu mai este stabil. Într-adevăr, pentru ca ϖ_1 să fie imaginară, adică

$$\varpi_1^2=\frac{\omega_1^2}{2}+\frac{\omega_2^2}{2}-\sqrt{\kappa^2+\frac{\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)^2}{4}}<0,$$

trebuie ca

$$\sqrt{\kappa^2+\frac{\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)^2}{4}}>\frac{\omega_1^2}{2}+\frac{\omega_2^2}{2},$$

sau,

$$\left(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\right)^2<\kappa^2+\frac{\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)^2}{4},$$

adică,

$$\omega_1<\frac{\kappa}{\omega_2},$$

relaţie care arată totodată şi ce înseamnă „pulsaţii ω_1 foarte mici". Acest lucru poate fi văzut cu uşurinţă din Fig. VI.11 în care, pentru ϖ_1 a fost reprezentată grafic dependenţa lui $\sqrt{|\varpi_1^2|}$, mărime notată cu $\bar{\varpi}_1$. După cum se poate observa, graficul lui $\bar{\varpi}=\sqrt{|\varpi_1^2|}$ prezintă două „ramuri", cea mai scurtă, din stânga valorii $\omega_1=\frac{\kappa}{\omega_2}$, apărând ca imaginea într-o oglindă plasată orizontal pe axa $O\omega_1$, cu faţa în jos (efectul considerării valorii

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

absolute (în modúl) a lui ϖ_1^2), a graficului funcţiei $\varpi_1^2 = \varpi_1^2(\omega_1)$ „afectat de radical”[15], pe intervalul $\left[0,\ \frac{\kappa}{\omega_2}\right]$.

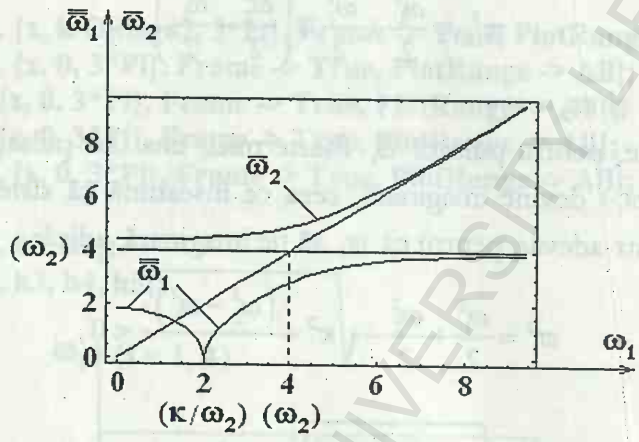


Fig. VI.11

Legea de mişcare este dată de

$$\begin{cases} \eta_1 = A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1), \\ \eta_2 = A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2), \end{cases} \tag{6.88}$$

[15] Acest „afectat de radical” ţine cont de faptul că funcţia $\varpi_1 = \varpi_1(\omega_1)$ nu poate fi reprezentată grafic pe intervalul $[0,\ \kappa/\omega_2]$ ca o funcţie reală, deoarece pe acest interval $\varpi_1 = \sqrt{\varpi_1^2}$ nu există. De aceea, pentru a da sens celor amintite mai sus, pe intervalul precizat putem reprezenta grafic doar ϖ_1^2. Dar imaginea în oglindă (ca efect a operaţiei de luare în modúl) a funcţiei $\varpi_1^2 = \varpi_1^2(\omega_1)$ nu este exact ramura din stânga valorii κ/ω_2 a graficului lui $\bar{\varpi}_1 = \sqrt{|\varpi_1^2|}$ ca funcţie de ω_1. Diferenţa se datorează funcţiei radical. Aceste precizări sunt susţinute de graficele din Fig. VI.12, în care se observă clar diferenţa amintită aici. Într-adevăr, după cum se poate sesiza, cele două ramuri din stânga valorii κ/ω_2 ale funcţiilor $\varpi_1^2 = \varpi_1^2(\omega_1)$ şi $\bar{\varpi}_1 = \sqrt{|\varpi_1^2|} = \bar{\varpi}_1(\omega_1)$ nu sunt una imaginea celeilalte într-o oglindă orizontală, situată pe axa $O\omega_1$.

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde constantele arbitrare A_1, A_2, ψ_1 şi ψ_2 se determină din condiţiile iniţiale. În planul coordonatelor normale (care este rotit cu unghiul φ faţă de planul coordonatelor iniţiale) traiectoria umple dens dreptunghiul delimitat de $-A_1 \le \eta_1 \le A_1$ şi $-A_2 \le \eta_2 \le A_2$ (vezi Fig. VI.13).

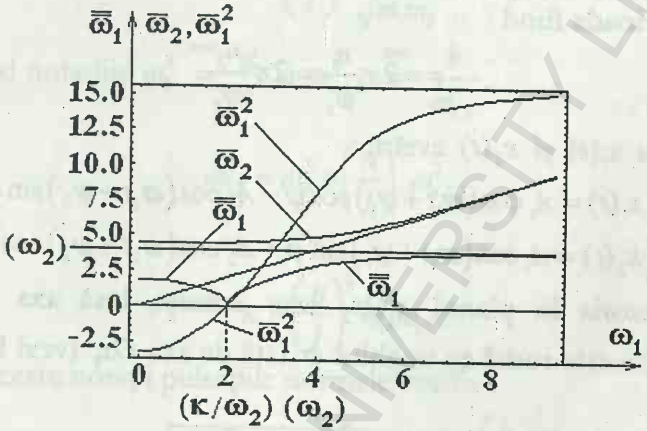


Fig. VI.12

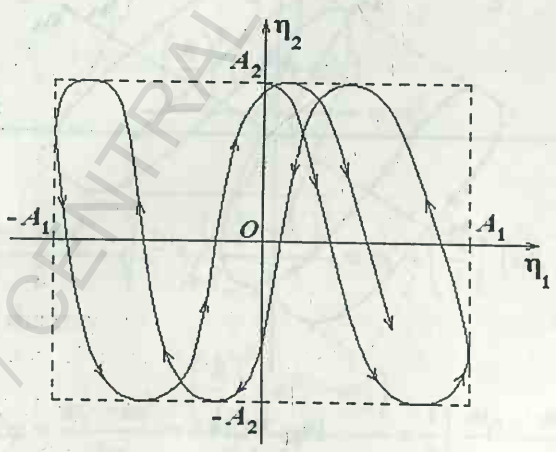


Fig. VI.13

Dacă ϖ_1 şi ϖ_2 nu sunt comensurabile, traiectoria nu este închisă, ceea ce înseamnă că mişcarea nu este una periodică. Cu toate acestea,

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

mişcarea proiecţiei punctului reprezentativ pe fiecare din cele două axe este periodică. Dacă pulsaţiile normale sunt însă comensurabile,

$$\frac{\varpi_1}{\varpi_2}=\frac{n_1}{n_2},\ (n_1,\ n_2\in\mathbb{N}),$$

traiectoriile se închid, apărând aşa-numitele *figuri Lissajous*, iar mişcarea este periodică, perioada fiind

$$\tau=2\pi\frac{n_1}{\varpi_1}=2\pi\frac{n_2}{\varpi_2}. \tag{6.89}$$

Pentru $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ avem:

$$\begin{cases} x_1(t)=A_1\cos(\varpi_1 t+\psi_1)\cos\varphi-A_2\cos(\varpi_2 t+\psi_2)\sin\varphi, \\ x_2(t)=A_1\cos(\varpi_1 t+\psi_1)\sin\varphi+A_2\cos(\varpi_2 t+\psi_2)\cos\varphi. \end{cases} \tag{6.90}$$

Traiectoria în planul x_1Ox_2 este aceeaşi, însă axa $(-A_1,\ A_1)$ a dreptunghiului este rotită cu unghiul φ faţă de axa Ox_1 (vezi Fig. VI.14).

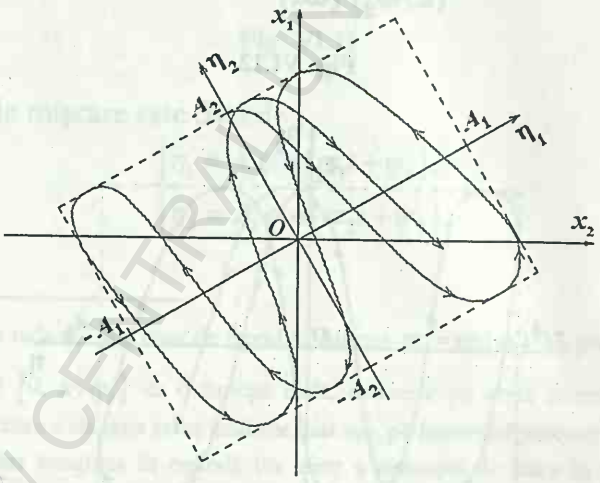


Fig. VI.14

Să revenim acum la problema noastră şi să studiem mai întâi cazul a) $l_1=l_2=l$. În această situaţie, relaţiile (6.74) şi (6.75) devin

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l} + \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{k}{m_{1,2}} \tag{6.74'}$$

şi respectiv

$$\kappa = \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{k}{\sqrt{m_1 m_2}}, \tag{6.75'}$$

sau, utilizând notaţiile $\omega_0^2 \overset{not.}{=} \frac{g}{l}$ şi $\omega_{e\,1,2}^2 \overset{not.}{=} \frac{k}{m_{1,2}}$,

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 \omega_{e\,1,2}^2 \tag{6.74"}$$

şi respectiv,

$$\kappa = \left(\frac{h}{l}\right)^2 \omega_{e1}\omega_{e2}. \tag{6.75"}$$

Cu aceste notaţii pulsaţiile normale vor fi:

$$\varpi_1^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \sqrt{\kappa^2 + \frac{\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)^2}{4}} = \frac{2\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2\right)}{2} - \frac{\left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2\right)}{2} = \omega_0^2$$

şi

$$\varpi_2^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \sqrt{\kappa^2 + \frac{\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)^2}{4}} = \omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2\right),$$

iar relaţia (6.79) devine

$$ctg2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} = \frac{\left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(\omega_{e2}^2 - \omega_{e1}^2\right)}{2\left(\frac{h}{l}\right)^2 \omega_{e1}\omega_{e2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{e2}}{\omega_{e1}} - \frac{\omega_{e1}}{\omega_{e2}}\right).$$

Condiţia de cuplaj slab, $\kappa \ll \left|\omega_2^2 - \omega_1^2\right|$, se va scrie în acest caz astfel:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\left(\frac{h}{l}\right)^2 \omega_{e1}\omega_{e2} \ll \left|\left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(\omega_{e2}^2 - \omega_{e1}^2\right)\right|,$$

adică,

$$\omega_{e1}\omega_{e2} \ll \left|\omega_{e2}^2 - \omega_{e1}^2\right|. \tag{6.91}$$

După cum am văzut în analiza generală, în cazul cuplajului slab sunt posibile două situații:

i) $\omega_1 < \omega_2$, care, pentru problema noastră înseamnă $\omega_{e1} < \omega_{e2}$, adică $m_1 > m_2$. Atunci, relația (6.91) devine

$$\frac{k}{\sqrt{m_1 m_2}} \ll \frac{k}{m_2} - \frac{k}{m_1},$$

sau,

$$\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \ll \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1},$$

de unde,

$$m_1 \gg m_2\left(3 - \frac{m_2}{m_1}\right),$$

ceea ce, ținând cont că în acest caz $m_1 > m_2$, deci $0 < \frac{m_2}{m_1} < 1$, se mai poate scrie $m_1 \gg m_2$, adică este în acord cu $m_1 > m_2$ și chiar o întărește. Deci, dacă între cele două pendule există un cuplaj slab și $m_1 \gg m_2$, atunci, conform analizei generale $\varphi \cong 0$ și oscilațiile sunt localizate;

ii) $\omega_1 > \omega_2$, care, pentru problema noastră înseamnă $\omega_{e1} > \omega_{e2}$, adică $m_1 < m_2$. Atunci, relația (6.91) devine

$$\frac{k}{\sqrt{m_1 m_2}} \ll \frac{k}{m_1} - \frac{k}{m_2},$$

sau,

$$\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \ll \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2},$$

de unde,

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$m_2 \gg m_1\left(3-\frac{m_1}{m_2}\right),$$

ceea ce, ţinând cont că în acest caz $m_1 < m_2$, deci $0 < \frac{m_1}{m_2} < 1$, se mai poate scrie $m_2 \gg m_1$, adică este în acord cu $m_1 < m_2$ şi chiar o întăreşte. Deci, dacă între cele două pendule există un cuplaj slab şi $m_1 \ll m_2$, atunci, conform analizei generale $\varphi \cong \pi/2$ şi oscilaţiile sunt, de asemenea, localizate.

Şi într-un caz $(\varphi \cong 0)$, şi în celălalt $(\varphi \cong \pi/2)$, pendulul de masă m_1 oscilează cu pulsaţia normală $\varpi_1 = \omega_0$, iar celălalt, după caz, cu pulsaţia normală

$$\varpi_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\left(\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2\right)} \cong \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\omega_{e2}\right)^2}, \quad \text{dacă } m_1 \gg m_2,$$

$$\varpi_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\left(\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2\right)} \cong \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\omega_{e1}\right)^2}, \quad \text{dacă } m_1 \ll m_2,$$

şi atunci, conform rezultatelor obţinute în cadrul analizei generale, avem:

$$\theta_1 \cong \overline{\theta}_1 = \overline{A}_1 \cos\left(\varpi_1 t + \psi_1\right) = \overline{A}_1 \cos\left(\omega_0 t + \psi_1\right) \tag{6.92}$$

şi

$$\theta_2 \cong \overline{\theta}_2 = \overline{A}_2 \cos\left(\varpi_2 t + \psi_2\right) =$$

$$= \begin{cases} \overline{A}_2 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\omega_{e2}\right)^2}\, t + \psi_2\right), & \text{dacă } m_1 \gg m_2, \\ \overline{A}_2 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{h}{l}\omega_{e1}\right)^2}\, t + \psi_2\right), & \text{dacă } m_1 \ll m_2. \end{cases} \tag{6.93}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă $m_1 = m_2 = m$ atunci $\omega_{e1} = \omega_{e2} = \omega_e$ și relația $ctg2\varphi = \dfrac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}$, din cadrul analizei generale, devine

$$ctg2\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{e2}}{\omega_{e1}} - \frac{\omega_{e1}}{\omega_{e2}}\right) = 0,$$

adică $\varphi = \pi/4$, ceea ce, conform rezultatelor găsite în cadrul aceleiași analize generale, înseamnă că oscilațiile nu mai sunt localizate și avem:

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1) - A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2), \\ \theta_2 = A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2), \end{cases} \tag{6.94}$$

unde $\varpi_1 = \omega_0$ și $\varpi_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\left(\dfrac{h}{l}\omega_e\right)^2}$ cu $\omega_e = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Într-adevăr, celor două moduri normale de oscilație le corespund coordonatele normale:

$$\begin{cases} \overline{\theta}_1 = \overline{A}_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1), \\ \overline{\theta}_2 = \overline{A}_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2), \end{cases}$$

iar θ_1 și θ_2 sunt dați (vezi relația (6.78)) de

$$\begin{cases} \theta_1 = \overline{\theta}_1 \cos\varphi - \overline{\theta}_2 \sin\varphi, \\ \theta_2 = \overline{\theta}_1 \sin\varphi + \overline{\theta}_2 \cos\varphi, \end{cases}$$

cu $\varphi = \pi/4$, de unde rezultă relațiile (6.94) în care $A_1 = \dfrac{\overline{A}_1}{\sqrt{2}}$ și $A_2 = \dfrac{\overline{A}_2}{\sqrt{2}}$, constantele arbitrare A_1, A_2, ψ_1 și ψ_2 determinându-se și în acest caz din condițiile inițiale. În continuare, vom analiza trei situații particulare mai importante care aparțin acestui caz, și anume:

1) Dacă inițial deplasăm pendulele de aceeași parte a verticalei, $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ și le lăsăm să oscileze fără viteză inițială, adică $\dot{\theta}_1(0) = 0$ și $\dot{\theta}_2(0) = 0$, ținând cont că

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = -\varpi_1 A_1 \sin(\varpi_1 t + \psi_1) + \varpi_2 A_2 \sin(\varpi_2 t + \psi_2), \\ \dot{\theta}_2 = -\varpi_1 A_1 \sin(\varpi_1 t + \psi_1) - \varpi_2 A_2 \sin(\varpi_2 t + \psi_2), \end{cases}$$

avem

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} \theta_0 = A_1 \cos\psi_1 - A_2 \cos\psi_2, \\ \theta_0 = A_1 \cos\psi_1 + A_2 \cos\psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin\psi_1 + \varpi_2 A_2 \sin\psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin\psi_1 - \varpi_2 A_2 \sin\psi_2. \end{cases}$$

Adunând ultimele două relații ale acestui sistem rezultă $\psi_1 = 0$, și atunci, și $\psi_2 = 0$. Cu aceste valori în primele două ecuații ale sistemului, prin adunarea lor, rezultă $A_1 = \theta_0$. E banal de constatat apoi că $A_2 = 0$. Cu aceste valori ale constantelor arbitrare A_1, A_2, ψ_1 și ψ_2 în (6.94) obținem:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 \cos(\varpi_1 t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t), \\ \theta_2 = \theta_0 \cos(\varpi_1 t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t), \end{cases} \tag{6.95}$$

ceea ce arată că cele două pendule oscilează în fază, cu pulsația ω_0.

2) Dacă deplasăm cele două pendule de-o parte și respectiv de cealaltă, adică $\theta_1(0) = -\theta_2(0) = \theta_0$ și le lăsăm din nou să oscileze fără viteză inițială, $\dot{\theta}_1(0) = 0$ și $\dot{\theta}_2(0) = 0$, obținem:

$$\begin{cases} +\theta_0 = A_1 \cos\psi_1 - A_2 \cos\psi_2, \\ -\theta_0 = A_1 \cos\psi_1 + A_2 \cos\psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin\psi_1 + \varpi_2 A_2 \sin\psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin\psi_1 - \varpi_2 A_2 \sin\psi_2. \end{cases}$$

Adunând din nou ultimele două relații ale acestui sistem rezultă că fazele inițiale sunt nule, $\psi_1 = 0$ și $\psi_2 = 0$, iar pentru amplitudinile de oscilație, din primele două ecuații rezultă $A_1 = 0$ și $A_2 = -\theta_0$. În acest caz, relațiile (6.94) devin

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 \cos(\varpi_2 t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\left(\dfrac{h}{l}\omega_e\right)^2}\, t\right), \\ \theta_2 = -\theta_0 \cos(\varpi_2 t) = \theta_0 \cos(\varpi_2 t + \pi) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\left(\dfrac{h}{l}\omega_e\right)^2}\, t + \pi\right), \end{cases} \tag{6.96}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ceea ce arată că în cazul acestor condiţii iniţiale pendulele oscilează cu aceeaşi pulsaţie, $\varpi_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\left(\frac{h}{l}\omega_e\right)^2} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\left(\frac{h}{l}\right)^2}$, dar în opoziţie de fază.

3) În fine, dacă deplasăm doar unul dintre pendule (de exemplu, primul), celălalt păstrându-l în poziţie de echilibru, $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_2(0) = 0$ şi le lăsăm să oscileze fără viteză iniţială, $\dot{\theta}_1(0) = 0$ şi $\dot{\theta}_2(0) = 0$ obţinem:

$$\begin{cases} \theta_0 = A_1 \cos\psi_1 - A_2 \cos\psi_2, \\ 0 = A_1 \cos\psi_1 + A_2 \cos\psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin\psi_1 + \varpi_2 A_2 \sin\psi_2, \\ 0 = -\varpi_1 A_1 \sin\psi_1 - \varpi_2 A_2 \sin\psi_2. \end{cases}$$

Din nou rezultă $\psi_1 = 0$ şi $\psi_2 = 0$, iar pentru amplitudini se găseşte $A_1 = -A_2 = \theta_0/2$. Cu aceste valori în (6.94) obţinem:

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\theta_0}{2}\left[\cos(\varpi_1 t) + \cos(\varpi_2 t)\right] = \frac{\theta_0}{2}\left[\cos(\omega_0 t) + \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\left(\frac{h}{l}\omega_e\right)^2}\ t\right)\right], \\ \theta_2 = \frac{\theta_0}{2}\left[\cos(\varpi_1 t) - \cos(\varpi_2 t)\right] = \frac{\theta_0}{2}\left[\cos(\omega_0 t) - \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\left(\frac{h}{l}\omega_e\right)^2}\ t\right)\right]. \end{cases} \tag{6.97}$$

Utilizând identităţile din trigonometrie,

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = +2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

relaţiile de mai sus devin

$$\begin{cases} \theta_1(t)=\theta_0\cos\dfrac{\left(\omega_0-\sqrt{\omega_0^2+2\left(\omega_e\dfrac{h}{l}\right)^2}\right)t}{2}\cos\dfrac{\left(\omega_0+\sqrt{\omega_0^2+2\left(\omega_e\dfrac{h}{l}\right)^2}\right)t}{2}, \\ \theta_2(t)=-\theta_0\sin\dfrac{\left(\omega_0-\sqrt{\omega_0^2+2\left(\omega_e\dfrac{h}{l}\right)^2}\right)t}{2}\sin\dfrac{\left(\omega_0+\sqrt{\omega_0^2+2\left(\omega_e\dfrac{h}{l}\right)^2}\right)t}{2}. \end{cases} \tag{6.98}$$

Apoi, deoarece $h<l$ avem:

$$\sqrt{\omega_0^2+2\left(\omega_e\frac{h}{l}\right)^2}=\omega_0\sqrt{1+2\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{h}{l}\right)^2}=$$

$$=\omega_0\left[1+\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{h}{l}\right)^2+\mathcal{O}\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\frac{h}{l}\right)^4\right]\overset{\omega_e<\omega_0}{\cong}\omega_0\left[1+\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{h}{l}\right)^2\right].$$

Deci, în condițiile în care $\omega_e<\omega_0$, ceea ce este echivalent cu $k<\dfrac{mg}{l}$ (cuplaj relativ slab), pulsația ϖ_2 devine

$$\varpi_2=\sqrt{\omega_0^2+2\left(\omega_e\frac{h}{l}\right)^2}\cong\omega_0\left[1+\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{h}{l}\right)^2\right]=\omega_0+2\gamma,$$

unde $\gamma=\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_e^2}{\omega_0}\left(\dfrac{h}{l}\right)^2\ll\omega_0$. Atunci, θ_1 și θ_2 vor fi dați de

$$\begin{cases} \theta_1(t)=\theta_0\cos\gamma t\ \cos(\omega_0+\gamma)t\cong\theta_0\cos\omega_0 t\ \cos\gamma t\overset{not.}{=}\theta_{1\,\mathrm{mod}}(t)\cos\omega_0 t, \\ \theta_2(t)=\theta_0\sin\gamma t\ \sin(\omega_0+\gamma)t\cong\theta_0\sin\omega_0 t\ \sin\gamma t\overset{not.}{=}\theta_{2\,\mathrm{mod}}(t)\sin\omega_0 t, \end{cases} \tag{6.99}$$

adică apare fenomenul de bătăi, ilustrat în Fig. VI.15. Graficele prezentate în figură corespund valorilor (convențional alese) $\theta_0=1$, $\omega_0=12$ și $\gamma=1$.

BCU "AL. I. CUZA" IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

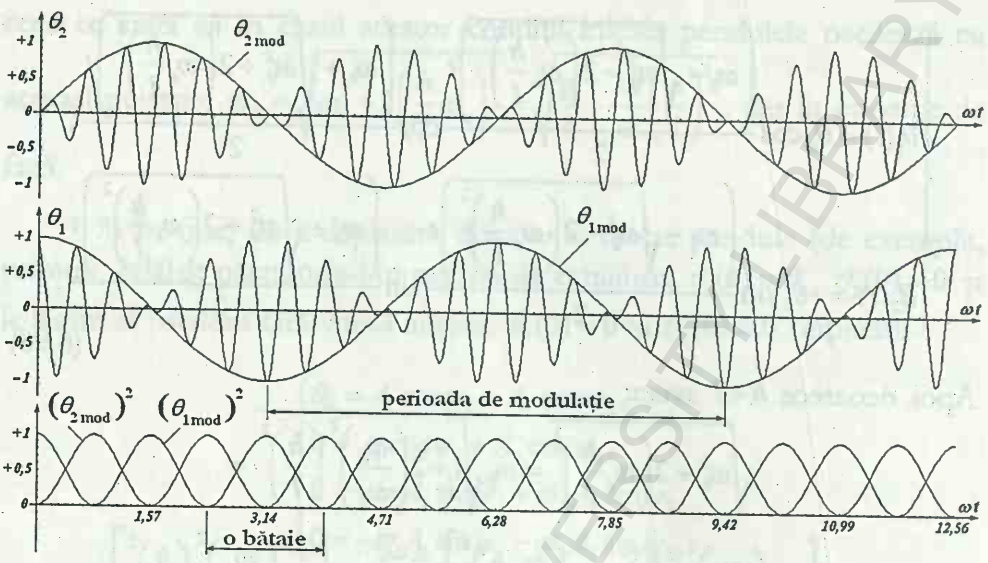


Fig. VI.15

b) În cazul $l_1 \neq l_2$ (pentru a preciza lucrurile, să admitem că $l_1 > l_2$) este mai comod să utilizăm ecuația caracteristică:

$$\left[\varpi^2 - \frac{g}{l_1} - \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{k}{m_1}\right]\left[\varpi^2 - \frac{g}{l_2} - \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{k}{m_2}\right] - \left(\frac{h^2}{l_1 l_2}\right)^2 \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0, \quad (6.100)$$

care poate fi găsită pornind de la ecuațiile diferențiale ale mișcării (6.71) și (6.72) (ecuațiile Lagrange de speța a II-a) deduse anterior și care mai pot fi scrise sub forma:

$$\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2}\right)\theta_1 - \frac{kh^2}{m_1 l_1^2}\theta_2 = 0 \quad (6.71')$$

și

$$\ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2}\right)\theta_2 - \frac{kh^2}{m_2 l_2^2}\theta_1 = 0. \quad (6.72')$$

Pentru a realiza acest lucru vom căuta soluții de forma $\theta_i = A_i \sin \varpi t + B_i \cos \varpi t$, $(i = 1, 2)$, în vederea determinării pulsațiilor celor două moduri normale de oscilație ale sistemului (pulsații notate aici cu ϖ). Avem,

$$\ddot{\theta}_i = -\varpi^2 A_i \sin \varpi t - \varpi^2 B_i \cos \varpi t, \quad (i = 1, 2),$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

astfel că ecuaţiile (6.71') şi (6.72') devin

$$-\varpi^2 A_1 \sin \varpi t - \varpi^2 B_1 \cos \varpi t + \left(\frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2}\right)\left(A_1 \sin \varpi t + B_1 \cos \varpi t\right) -$$

$$-\frac{kh^2}{m_1 l_1^2}\left(A_2 \sin \varpi t + B_2 \cos \varpi t\right) = 0$$

şi respectiv

$$-\varpi^2 A_2 \sin \varpi t - \varpi^2 B_2 \cos \varpi t + \left(\frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2}\right)\left(A_2 \sin \varpi t + B_2 \cos \varpi t\right) -$$

$$-\frac{kh^2}{m_2 l_2^2}\left(A_1 \sin \varpi t + B_1 \cos \varpi t\right) = 0.$$

Identificând coeficienţii funcţiilor trigonometrice $\sin \varpi t$ şi $\cos \varpi t$ din cei doi membri ai ecuaţiilor de mai sus obţinem:

$$\left[-\varpi^2 + \left(\frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2}\right)\right] A_1 - \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} A_2 = 0,$$

$$\left[-\varpi^2 + \left(\frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2}\right)\right] B_1 - \frac{kh^2}{m_1 l_1^2} B_2 = 0$$

şi respectiv

$$\left[-\varpi^2 + \left(\frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2}\right)\right] A_2 - \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} A_1 = 0,$$

$$\left[-\varpi^2 + \left(\frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2}\right)\right] B_2 - \frac{kh^2}{m_2 l_2^2} B_1 = 0.$$

Pentru ca sistemul alcătuit din cele două ecuaţii algebrice de mai sus în necunoscutele A_1 şi A_2 să aibă soluţie netrivială, trebuie ca determinantul caracteristic al acestui sistem să se anuleze:

$$\begin{vmatrix} -\varpi^2 + \left(\frac{g}{l_1} + \frac{kh^2}{m_1 l_1^2}\right) & -\frac{kh^2}{m_1 l_1^2} \\ -\frac{kh^2}{m_2 l_2^2} & -\varpi^2 + \left(\frac{g}{l_2} + \frac{kh^2}{m_2 l_2^2}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

adică,

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$$\left[-\varpi^2+\left(\frac{g}{l_1}+\frac{kh^2}{m_1l_1^2}\right)\right]\left[-\varpi^2+\left(\frac{g}{l_2}+\frac{kh^2}{m_2l_2^2}\right)\right]-\frac{k^2h^4}{m_1m_2l_1^2l_2^2}=0,$$

care este chiar ecuaţia caracteristică (6.100). În planul $(k,\ \varpi^2)$ aceasta reprezintă o hiperbolă ale cărei ramuri, ce corespund valorilor cu semnificaţie fizică a celor două mărimi (având în vedere că $k\in[0,\ \infty)$), sunt reprezentate în Fig. VI.16. Pentru a realiza această reprezentare grafică am utilizat soft-ul Mathematica 4.0 şi următoarele valori numerice pentru mărimile care intervin: $l_1=0,5$; $l_2=0,3$; $m_1=0,2$; $m_2=0,3$; $h=0,1$; $g=10$.

După cum foarte simplu se poate constata, cu notaţiile deja utilizate (vezi relaţiile (6.74) şi (6.75)),

$$\omega_{1,2}^2=\frac{g}{l_{1,2}}+\frac{kh^2}{m_{1,2}l_{1,2}^2}$$

şi

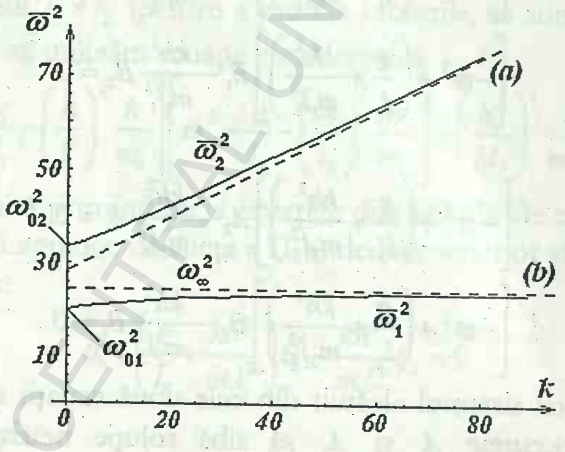


Fig. VI.16

$$\kappa=\frac{kh^2}{l_1l_2\sqrt{m_1m_2}},$$

ecuaţia (6.100) capătă forma:

$$\left(\varpi^2-\omega_1^2\right)\left(\varpi^2-\omega_2^2\right)-\kappa^2=0$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi are soluţiile (determinate deja pe altă cale; vezi relaţiile (6.80) şi (6.81)):

$$\varpi_1^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) - \sqrt{\kappa^2 + \left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)^2 / 4}$$

şi

$$\varpi_2^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \sqrt{\kappa^2 + \left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)^2 / 4}\,.$$

Pentru k mic şi/sau foarte mic (resort slab, $k \to 0$), pulsaţiile normale ϖ_1^2 şi ϖ_2^2 tind către pulsaţiile pendulelor libere, $\omega_{01}^2 = \frac{g}{l_1}$ şi $\omega_{02}^2 = \frac{g}{l_2}$. Într-adevăr, trecând la limita $k \to 0$ în ecuaţia (6.100), aceasta devine

$$\left(\varpi^2 - \omega_{01}^2\right)\left(\varpi^2 - \omega_{02}^2\right) = 0\,,$$

cu soluţiile evidente $\varpi_1^2 = \omega_{01}^2$ şi $\varpi_2^2 = \omega_{02}^2$.

Pentru k mare şi/sau foarte mare (resort puternic, $k \to \infty$), pulsaţia normală ϖ_2^2 tinde la infinit ca

$$\left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \omega_{e1}^2 + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \omega_{e2}^2\,, \tag{6.101}$$

(„asimptota" (a) din Fig. VI.16). Într-adevăr, avem

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{\varpi_2^2}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \sqrt{\kappa^2 + \left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)^2 / 4}}{k} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\omega_{01}^2 + \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{k}{m_1} + \omega_{02}^2 + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{k}{m_2}}{2k} +$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{\left(\frac{h^2}{l_1 l_2}\right)^2 \frac{k^2}{m_1 m_2} + \frac{1}{4}\left[\omega_{02}^2 + \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \frac{k}{m_2} - \omega_{01}^2 - \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \frac{k}{m_1}\right]^2}}{k} =$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$=\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{1}{2m_1}+\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{1}{2m_2}+\sqrt{\left(\frac{h^2}{l_1l_2}\right)^2\frac{1}{m_1m_2}+\left[\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{1}{2m_2}-\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{1}{2m_1}\right]^2}=$$

$$=\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{1}{2m_1}+\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{1}{2m_2}+\sqrt{\left[\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{1}{2m_2}+\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{1}{2m_1}\right]^2}=\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{1}{m_1}+\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{1}{m_2},$$

de unde,

$$\varpi_2^2\overset{k\to\infty}{=}k\alpha=\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{k}{m_1}+\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{k}{m_2}=\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\omega_{e1}^2+\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\omega_{e2}^2,$$

adică relaţia (6.101), iar cealaltă pulsaţie, ϖ_1^2, tinde la pulsaţia unui pendul care are două mase, m_1 şi m_2, pe aceeaşi tijă ideală, la distanţele l_1 şi $l_2<l_1$ (conform presupunerii de mai sus) de punctul de susţinere (vezi Fig. VI.17), („asimptota" (b) din Fig. VI.16):

$$\varpi_1^2\overset{k\to\infty}{\to}\omega_\infty^2=g\frac{m_1l_1+m_2l_2}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}. \qquad (6.102)$$

Într-adevăr, împărţind la k ecuaţia (6.100) şi trecând apoi la limita $k\to\infty$ obţinem succesiv

$$\frac{1}{k}\left\{\left[\varpi^2-\frac{g}{l_1}-\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{k}{m_1}\right]\left[\varpi^2-\frac{g}{l_2}-\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{k}{m_2}\right]-\left(\frac{h^2}{l_1l_2}\right)^2\frac{k^2}{m_1m_2}\right\}=0,$$

sau,

$$\frac{1}{k}\left\{\varpi^4-\varpi^2\left[\frac{g}{l_1}+\frac{g}{l_2}+\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{k}{m_1}+\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{k}{m_2}\right]+\frac{g}{l_1}\left[\frac{g}{l_2}+\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{k}{m_2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{g}{l_2}\left[\frac{g}{l_1}+\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{k}{m_1}\right]+\left(\frac{h^2}{l_1l_2}\right)\frac{k^2}{m_1m_2}-\left(\frac{h^2}{l_1l_2}\right)\frac{k^2}{m_1m_2}\right\}=0,$$

sau,

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{1}{k}\left\{\varpi^4-\varpi^2\left(\frac{g}{l_1}+\frac{g}{l_2}\right)-\varpi^2\left[\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{k}{m_1}+\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{k}{m_2}\right]+\frac{g}{l_1}\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{k}{m_2}+\right.$$

$$\left.+2\frac{g^2}{l_1l_2}+\frac{g}{l_2}\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{k}{m_1}\right\}=0,$$

sau încă,

$$\frac{\varpi^4}{k}-\frac{\varpi^2}{k}\left(\frac{g}{l_1}+\frac{g}{l_2}\right)-\varpi^2\left[\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{1}{m_1}+\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{1}{m_2}\right]+\frac{g}{l_1}\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{1}{m_2}+$$

$$+\frac{2}{k}\frac{g^2}{l_1l_2}+\frac{g}{l_2}\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{1}{m_1}=0,$$

care, atunci când $k\to\infty$ devine

$$-\varpi_\infty^2\left[\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{1}{m_1}+\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{1}{m_2}\right]+\frac{g}{l_1}\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{1}{m_2}+\frac{g}{l_2}\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{1}{m_1}=0, \quad (6.103)$$

de unde,

$$\varpi_\infty^2=\frac{\frac{g}{l_1}\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{1}{m_2}+\frac{g}{l_2}\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{1}{m_1}}{\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\frac{1}{m_1}+\left(\frac{h}{l_2}\right)^2\frac{1}{m_2}}=g\frac{m_1l_1+m_2l_2}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}\equiv\omega_\infty^2,$$

adică exact relația (6.102). Faptul că relația (6.102) exprimă pulsația pendulului din Fig. VI.17 rezultă simplu astfel[16]:

Deoarece ambele corpuri se află pe aceeaşi tijă rigidă şi de masă nulă, acestea au aceeaşi coordonată unghiulară θ. Deci, sistemul are un singur grad de libertate, căruia îi asociem coordonata generalizată θ. Să deducem funcția lui Lagrange a sistemului din Fig. VI.17.

Întrucât

[16] Nu vom mai parcurge toate etapele algoritmului de rezolvare a unei probleme prin intermediul formalismului ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, multe etape fiind subînțelese aici.

BUMA / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

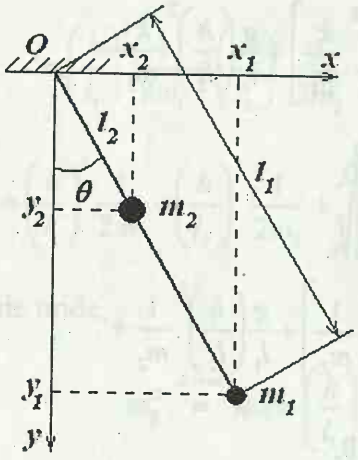


Fig. VI.17

$$\begin{cases} x_i = l_i \sin\theta, \\ y_i = l_i \cos\theta, \end{cases} \quad (i = 1,\ 2),$$

şi

$$\begin{cases} \dot{x}_i = l_i \dot{\theta} \cos\theta, \\ y_i = -l_i \dot{\theta} \sin\theta, \end{cases} \quad (i = 1,\ 2),$$

pentru energia cinetică avem

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \left|\vec{v}_1^{\,2}\right| + \frac{1}{2} m_2 \left|\vec{v}_2^{\,2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right) \tag{6.104}$$

iar în ceea ce priveşte energia potenţială avem,

$$dV = -dA = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -m_1 g dy_1 - m_2 g dy_2,$$

de unde, alegând ca nivel de referinţă pentru energia potenţială planul xOz (adică $y_1 = 0,\ y_2 = 0$), obţinem

$$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \cos\theta - m_2 g l_2 \cos\theta = -g \cos\theta \left(m_1 l_1 + m_2 l_2\right), \tag{6.105}$$

constanta arbitrară de integrare fiind determinată de alegerea nivelului de referinţă pentru energia potenţială: $V\left(y_1 = 0,\ y_2 = 0\right) = 0$. Atunci, funcţia lui Lagrange va fi

$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right) + g \left(m_1 l_1 + m_2 l_2\right) \cos\theta, \tag{6.106}$$

iar ecuaţia Lagrange de speţa a II-a,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \tag{6.107}$$

ţinând cont că

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta}\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \ddot{\theta}\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -g\left(m_1 l_1 + m_2 l_2\right)\sin\theta ,$$

se scrie

$$\ddot{\theta}\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right) + g\left(m_1 l_1 + m_2 l_2\right)\sin\theta = 0 \qquad (6.108)$$

şi reprezintă ecuaţia diferenţială a mişcării sistemului. Se observă că, în limita micilor oscilaţii $(\sin\theta \cong \theta)$ (când ecuaţia se mai scrie:

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = 0 , \qquad (6.109)$$

unde am utilizat notaţia:

$$\Omega^2 = g\frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} \equiv \omega_\infty^2),$$

acest sistem se comportă ca un pendul simplu a cărui pulsaţie este

$$\Omega = \sqrt{g\frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} = \omega_\infty . \qquad (6.110)$$

6. Problema a trei pendule identice cuplate

Se consideră trei pendule simple identice (vezi Fig. VI.18), fiecare având lungimea l şi masa m. Pendulele sunt legate prin două resorturi identice de masă neglijabilă, netensionate când pendulele sunt în echilibru $(\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0)$ şi aflate la distanţa h faţă de articulaţiile tijelor, ca în Fig. VI.18. Să se scrie ecuaţiile de mişcare ale sistemului şi să se determine soluţiile acestora în cazul micilor oscilaţii.

Rezolvare

Şi în acest caz sistemul este unul natural, deoarece, atât câmpul gravitaţional, cât şi câmpul forţelor elastice sunt câmpuri potenţiale de forţă.

BCU "ASTRA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

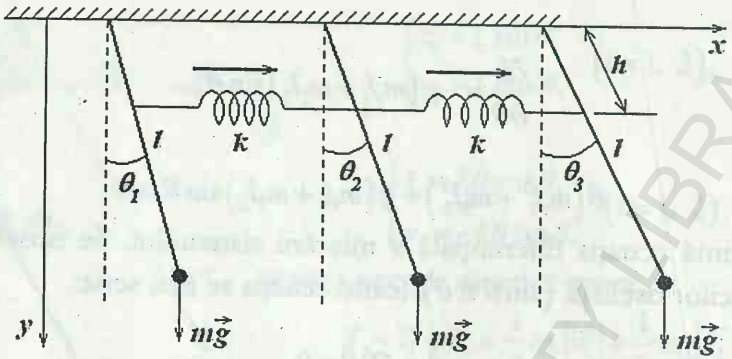


Fig. VI.18

Presupunând că mişcarea corpurilor are loc în planul xOy $(z=0)$, ecuaţiile legăturilor care „afectează" această mişcare sunt:

$$f_1(z_1)=z_1=0,$$

$$f_2(x_1, y_1)=x_1^2+y_1^2-l^2=0,$$

$$f_3(z_2)=z_2=0,$$

$$f_4(x_2, y_2)=x_2^2+y_2^2-l^2=0,$$

$$f_5(z_3)=z_3=0,$$

$$f_6(x_3, y_3)=x_3^2+y_3^2-l^2=0,$$

unde, am considerat câte un sistem de referinţă pentru fiecare pendul în parte, cu axa Ox comună, dar cu originile în puncte diferite (în cele trei puncte de suspensie).

Rezultă că sistemul are $3\cdot 3-6=3$ grade de libertate, cărora le vom asocia ca şi coordonate generalizate, unghiurile θ_1, θ_2 şi θ_3 făcute de cele trei tije ideale (rigide şi de masă neglijabilă) cu verticala.

Energia cinetică a sistemului va fi

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_2|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_3|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2\right).$$

Deoarece

$$x_i = l\sin\theta_i,\ y_i = l\cos\theta_i,\ \left(i = \overline{1,3}\right),$$

expresia energiei cinetice devine

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2\right).$$

Energia potențială are două „componente", una gravitațională și una elastică, $V = V_g + V_e$. În ceea ce privește partea de origine gravitațională, putem scrie:

$$dV_g = -dA_g = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 - \vec{G}_3 \cdot d\vec{r}_3 = -mgdy_1 - mgdy_2 - mgdy_3,$$

deci,

$$V_g = -mgy_1 - mgy_2 - mgy_3 + V_{g0},$$

unde constanta arbitrară de integrare V_{g0} poate fi luată zero, dacă alegem ca nivel de referință pentru energia potențială gravitațională planul xOz. Într-adevăr,

$$V_g\left(y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{g0} = 0.$$

Rezultă, astfel, că:

$$V_g = -mgy_1 - mgy_2 - mgy_3 = -mgl\cos\theta_1 - mgl\cos\theta_2 - mgl\cos\theta_3 =$$

$$= -mgl\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3\right).$$

Pentru partea de origine elastică avem:

$$dV_e = -dA_e = -\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -\left(-k\vec{x} \cdot d\vec{x}\right) = kx\,dx,$$

de unde,

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 + V_{e0},$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în care constanta arbitrară de integrare V_{e0} poate fi considerată nulă dacă se alege ca „nivel" de referință pentru energia potențială elastică starea inițială, în care deformația resorturilor este zero:

$$V_e(x=0)=0 \quad \Rightarrow \quad V_{e0}=0.$$

Atunci, energia potențială elastică totală (a celor două resorturi) va fi

$$V_e = V_{e1}+V_{e2} = \frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}kx_2^2 \equiv \frac{1}{2}k(\Delta x_1)^2+\frac{1}{2}k(\Delta x_2)^2,$$

deoarece, alegând „nivelurile de referință" pentru energia potențială elastică a celor două resorturi chiar stările inițiale, variabila generică x din expresia lui V_e va reprezenta chiar deformările Δx_i, $(i=1,\ 2)$ ale celor două resorturi (cu cât s-au alungit, ori s-au comprimat resorturile). Din Fig. VI.18 se observă că:

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1 = h(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

și

$$\Delta x_2 = x_3 - x_2 = h(\sin\theta_3 - \sin\theta_2).$$

Ținând cont de formula trigonometrică:

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

V_e devine

$$V_e = \frac{1}{2}kh^2\left[4\sin^2\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}kh^2\left[4\sin^2\left(\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)\right].$$

Deoarece au apărut deja termeni de ordinul doi, vom utiliza ipoteza micilor oscilații, în care

$$\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) = \frac{\theta_2-\theta_1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)^3 \cong \frac{\theta_2-\theta_1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)^4 \cong 1,$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\sin\left(\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right)=\frac{\theta_3-\theta_2}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right)^3\cong\frac{\theta_3-\theta_2}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)^2+\mathcal{O}\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)^4\cong 1$$

şi atunci V_e devine

$$V_e=\frac{1}{2}kh^2\left(\theta_2-\theta_1\right)^2+\frac{1}{2}kh^2\left(\theta_3-\theta_2\right)^2=\frac{1}{2}kh^2\left[\left(\theta_2-\theta_1\right)^2+\left(\theta_3-\theta_2\right)^2\right].$$

Energia potențială totală a sistemului este

$$V=V_g+V_e=-mgl\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3\right)+\frac{1}{2}kh^2\left[\left(\theta_2-\theta_1\right)^2+\left(\theta_3-\theta_2\right)^2\right],$$

iar funcția Lagrange a sistemului se scrie astfel:

$$L=T-V=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot\theta_1^2+\dot\theta_2^2+\dot\theta_3^2\right)+mgl\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3\right)-$$

$$-\frac{1}{2}kh^2\left[\left(\theta_2-\theta_1\right)^2+\left(\theta_3-\theta_2\right)^2\right].$$

Având în vedere că

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_i}=ml^2\dot\theta_i,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_i}\right)=ml^2\ddot\theta_i,\ \left(i=\overline{1,3}\right)$$

şi

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=-mgl\sin\theta_1+kh^2\left(\theta_2-\theta_1\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_2}=-mgl\sin\theta_2-kh^2\left(\theta_2-\theta_1\right)+kh^2\left(\theta_3-\theta_2\right)=$$

$$=-mgl\sin\theta_2-2kh^2\theta_2+kh^2\left(\theta_1+\theta_3\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_3}=-mgl\sin\theta_3-kh^2\left(\theta_3-\theta_2\right),$$

ecuațiile Lagrange de speța a II-a,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=0,\ \left(i=\overline{1,3}\right)$$

devin

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl\sin\theta_1 - kh^2(\theta_2 - \theta_1) = 0,$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl\sin\theta_2 + 2kh^2\theta_2 - kh^2(\theta_1 + \theta_3) = 0$$

şi

$$ml^2\ddot{\theta}_3 + mgl\sin\theta_3 + kh^2(\theta_3 - \theta_2) = 0,$$

sau, în ipoteza micilor oscilaţii $(\sin\theta_i \cong \theta_i,\ i = 1,\ 2,\ 3)$,

$$\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right)\theta_1 - \frac{kh^2}{ml^2}\theta_2 = 0, \tag{6.111}$$

$$\ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right)\theta_2 - \frac{kh^2}{ml^2}(\theta_1 + \theta_3) = 0 \tag{6.112}$$

şi

$$\ddot{\theta}_3 + \left(\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right)\theta_3 - \frac{kh^2}{ml^2}\theta_2 = 0. \tag{6.113}$$

Întrucât sistemul efectuează oscilaţii mici, vom căuta soluţii de forma:

$$\theta_i = A_i\sin\omega t + B_i\cos\omega t. \tag{6.114}$$

Impunând ca aceste soluţii să verifice ecuaţiile diferenţiale (6.111) ÷ (6.113) ale mişcării sistemului, obţinem:

$$-\omega^2 A_1\sin\omega t - \omega^2 B_1\cos\omega t + \left(\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right)A_1\sin\omega t + \left(\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right)B_1\cos\omega t -$$

$$-\frac{kh^2}{ml^2}A_2\sin\omega t - \frac{kh^2}{ml^2}B_2\cos\omega t = 0,$$

$$-\omega^2 A_2\sin\omega t - \omega^2 B_2\cos\omega t + \left(\frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right)A_2\sin\omega t + \left(\frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right)B_2\cos\omega t -$$

$$-\frac{kh^2}{ml^2}A_1\sin\omega t - \frac{kh^2}{ml^2}B_1\cos\omega t - \frac{kh^2}{ml^2}A_3\sin\omega t - \frac{kh^2}{ml^2}B_3\cos\omega t = 0$$

şi

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-\omega^2 A_3 \sin\omega t - \omega^2 B_3 \cos\omega t + \left(\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right) A_3 \sin\omega t + \left(\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right) B_3 \cos\omega t -$$
$$- \frac{kh^2}{ml^2} A_2 \sin\omega t - \frac{kh^2}{ml^2} B_2 \cos\omega t = 0.$$

Identificând coeficienții funcțiilor trigonometrice $\sin\omega t$ și $\cos\omega t$ din cei doi membri ai relațiilor de mai sus obținem:

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right) A_1 - \frac{kh^2}{ml^2} A_2 = 0, \tag{6.115}$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right) B_1 - \frac{kh^2}{ml^2} B_2 = 0, \tag{6.116}$$

$$-\frac{kh^2}{ml^2} A_1 + \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right) A_2 - \frac{kh^2}{ml^2} A_3 = 0, \tag{6.117}$$

$$-\frac{kh^2}{ml^2} B_1 + \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right) B_2 - \frac{kh^2}{ml^2} B_3 = 0, \tag{6.118}$$

$$-\frac{kh^2}{ml^2} A_2 + \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right) A_3 = 0 \tag{6.119}$$

și

$$-\frac{kh^2}{ml^2} B_2 + \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right) B_3 = 0. \tag{6.120}$$

Pentru ca sistemul format din relațiile (6.115), (6.117) și (6.119) să fie compatibil trebuie ca

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} & -\frac{kh^2}{ml^2} & 0 \\ -\frac{kh^2}{ml^2} & -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2} & -\frac{kh^2}{ml^2} \\ 0 & -\frac{kh^2}{ml^2} & -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2} \end{vmatrix} = 0,$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică,

$$\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)^2-2\left(\frac{kh^2}{ml^2}\right)^2\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)=0,$$

sau,

$$\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)\left[\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)-2\left(\frac{kh^2}{ml^2}\right)^2\right]=0.$$

Această ecuaţie este satisfăcută dacă

$$-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}=0,$$

cu soluţia

$$\omega_1^2=\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2} \tag{6.121}$$

sau dacă

$$\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)\left(-\omega^2+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)=2\left(\frac{kh^2}{ml^2}\right)^2,$$

adică,

$$\omega^4-2\omega^2\left(\frac{g}{l}+\frac{3kh^2}{2ml^2}\right)+\left(\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)\left(\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)-2\left(\frac{kh^2}{ml^2}\right)^2=0,$$

care este o ecuaţie de gradul doi în ω^2. Soluţiile ei sunt

$$\omega_{2,3}^2=\frac{g}{l}+\frac{3kh^2}{2ml^2}\pm\sqrt{\left(\frac{g}{l}+\frac{3kh^2}{2ml^2}\right)^2-\left(\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)\left(\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)+2\left(\frac{kh^2}{ml^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{g}{l}+\frac{3kh^2}{2ml^2}\pm\sqrt{\frac{9k^2h^4}{4m^2l^4}}=\frac{g}{l}+\frac{3kh^2}{2ml^2}\pm\frac{3kh^2}{2ml^2},$$

adică,

$$\omega_2^2\equiv\omega_M^2=\frac{g}{l}+\frac{3kh^2}{ml^2} \tag{6.122}$$

şi

$$\omega_3^2\equiv\omega_m^2=\frac{g}{l}. \tag{6.123}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aceleaşi valori ale frecvenţelor se obţin folosind sistemul ecuaţiilor rămase, (6.116), (6.118) şi (6.120) în necunoscutele B_1, B_2 şi B_3. Lăsăm cititorul să se convingă singur de aceasta.

Aşadar, schimbând numerotarea (arbitrară) făcută mai sus, cele trei frecvenţe normale ale sistemului de trei pendule identice cuplate, în cazul analizat, sunt

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}} \text{ şi } \omega_3 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{ml^2}}. \tag{6.124}$$

Înlocuind pe ω_1^2 din (6.124) în ecuaţia (6.115) obţinem:

$$\left(-\omega_1^2 + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right)A_1 - \frac{kh^2}{ml^2}A_2 = \left(-\frac{g}{l} + \frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right)A_1 - \frac{kh^2}{ml^2}A_2 = 0,$$

sau,

$$\frac{kh^2}{ml^2}A_1 = \frac{kh^2}{ml^2}A_2,$$

de unde,

$$A_2 = A_1. \tag{6.125}$$

Substituind acum pe ω_1^2 din (6.124) în ecuaţia (6.116), obţinem

$$B_2 = B_1. \tag{6.126}$$

Într-o manieră asemănătoare, cu ω_1^2 din (6.124) în ecuaţia (6.117) avem

$$-\frac{kh^2}{ml^2}A_1 + \left(-\omega_1^2 + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right)A_2 - \frac{kh^2}{ml^2}A_3 =$$

$$= -\frac{kh^2}{ml^2}A_1 + \left(-\frac{g}{l} + \frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}\right)A_2 - \frac{kh^2}{ml^2}A_3 = 0,$$

de unde, utilizând (6.125), rezultă că:

$$A_3 = A_2 = A_1. \tag{6.127}$$

În fine, înlocuind pe ω_1^2 din (6.124) în relaţia (6.118) şi utilizând (6.126), se obţine:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-\frac{kh^2}{ml^2}B_1+\left(-\omega_1^2+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)B_2-\frac{kh^2}{ml^2}B_3=$$

$$=-\frac{kh^2}{ml^2}B_1+\left(-\frac{g}{l}+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)B_2-\frac{kh^2}{ml^2}B_3=0,$$

adică,

$$B_3=B_2=B_1. \tag{6.128}$$

Reluând aceleaşi calcule cu ω_2^2 dat de (6.124) în locul lui $\omega_1^2=\frac{g}{l}$ din aceeaşi relație, avem (utilizând relația (6.115)):

$$\left(-\omega_2^2+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)A_1-\frac{kh^2}{ml^2}A_2=\left(-\frac{g}{l}-\frac{kh^2}{ml^2}+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)A_1-\frac{kh^2}{ml^2}A_2=0,$$

de unde,

$$A_2=0. \tag{6.129}$$

Apoi, cu $\omega_2^2=\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}$ din (6.124) în (6.116) găsim:

$$\left(-\omega_2^2+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)B_1-\frac{kh^2}{ml^2}B_2=\left(-\frac{g}{l}-\frac{kh^2}{ml^2}+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)B_1-\frac{kh^2}{ml^2}B_2=0,$$

adică

$$B_2=0. \tag{6.130}$$

La fel, cu ω_2^2 din relația (6.124) în (6.117) şi utilizând (6.129) obținem:

$$-\frac{kh^2}{ml^2}A_1+\left(-\omega_2^2+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)A_2-\frac{kh^2}{ml^2}A_3=$$

$$=-\frac{kh^2}{ml^2}A_1-\frac{kh^2}{ml^2}A_3=0,$$

de unde,

$$A_3=-A_1. \tag{6.131}$$

În mod asemănător, cu ω_2^2 din relația (6.124) în relația (6.118) şi făcând uz de relația (6.130) găsim că:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-\frac{kh^2}{ml^2}B_1+\left(-\omega_2^2+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)B_2-\frac{kh^2}{ml^2}B_3=$$

$$=-\frac{kh^2}{ml^2}B_1-\frac{kh^2}{ml^2}B_3=0,$$

adică,

$$B_3=-B_1. \tag{6.132}$$

În sfârşit, reluând calculele pentru cea de-a treia frecvență din relația (6.124), $\omega_3^2=\frac{g}{l}+\frac{3kh^2}{ml^2}$ obținem succesiv:

- din relația (6.115):

$$\left(-\omega_3^2+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)A_1-\frac{kh^2}{ml^2}A_2=\left(-\frac{g}{l}-\frac{3kh^2}{ml^2}+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)A_1-\frac{kh^2}{ml^2}A_2=0,$$

adică,

$$A_2=-2A_1; \tag{6.133}$$

- din relația (6.116):

$$\left(-\omega_3^2+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)B_1-\frac{kh^2}{ml^2}B_2=\left(-\frac{g}{l}-\frac{3kh^2}{ml^2}+\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}\right)B_1-\frac{kh^2}{ml^2}B_2=0,$$

adică,

$$B_2=-2B_1; \tag{6.134}$$

- din relația (6.117), utilizând şi rezultatul (6.133):

$$-\frac{kh^2}{ml^2}A_1+\left(-\omega_3^2+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)A_2-\frac{kh^2}{ml^2}A_3=$$

$$=-\frac{kh^2}{ml^2}A_1-2\left(-\frac{g}{l}-\frac{3kh^2}{ml^2}+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)A_1-\frac{kh^2}{ml^2}A_3=0,$$

adică,

$$A_3=A_1; \tag{6.135}$$

- din relația (6.118), făcând apel şi la rezultatul (6.134):

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-\frac{kh^2}{ml^2}B_1+\left(-\omega_3^2+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)B_2-\frac{kh^2}{ml^2}B_3=$$

$$=-\frac{kh^2}{ml^2}B_1-2\left(-\frac{g}{l}-\frac{3kh^2}{ml^2}+\frac{g}{l}+\frac{2kh^2}{ml^2}\right)B_1-\frac{kh^2}{ml^2}B_3=0,$$

de unde,

$$B_3=B_1. \tag{6.136}$$

Relațiile (6.119) și (6.120) se verifică în mod identic în toate cele trei cazuri, fiind compatibile cu rezultatele găsite în fiecare situație în parte. Verificarea acestui lucru o lăsăm în seama cititorului.

Ținând cont că sistemul are trei frecvențe de oscilație, soluțiile ecuațiilor diferențiale ale mișcării celor trei pendule cuplate se vor scrie ca o superpoziție a celor trei moduri de oscilație. Având în vedere relațiile (6.114) și (6.125) ÷ (6.136), pentru θ_1, θ_2 și θ_3 putem scrie atunci,

$$\begin{cases}\theta_1=A\sin\omega_1t+B\cos\omega_1t+C\sin\omega_2t+D\cos\omega_2t+E\sin\omega_3t+F\cos\omega_3t,\\ \theta_2=A\sin\omega_1t+B\cos\omega_1t-2E\sin\omega_3t-2F\cos\omega_3t,\\ \theta_3=A\sin\omega_1t+B\cos\omega_1t-C\sin\omega_2t-D\cos\omega_2t+E\sin\omega_3t+F\cos\omega_3t,\end{cases} \tag{6.137}$$

sau,

$$\begin{cases}\theta_1=K_1\sin(\omega_1t+\alpha_1)+K_2\sin(\omega_2t+\alpha_2)+K_3\sin(\omega_3t+\alpha_3),\\ \theta_2=K_1\sin(\omega_1t+\alpha_1)-2K_3\sin(\omega_3t+\alpha_3),\\ \theta_3=K_1\sin(\omega_1t+\alpha_1)-K_2\sin(\omega_2t+\alpha_2)+K_3\sin(\omega_3t+\alpha_3),\end{cases} \tag{6.138}$$

sau încă, sub formă matricială,

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}=K_1\begin{pmatrix}+1\\ +1\\ +1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\alpha_1\right)+K_2\begin{pmatrix}+1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{kh^2}{ml^2}}\,t+\alpha_2\right)+$$

$$+K_3\begin{pmatrix}+1\\ -2\\ +1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{3kh^2}{ml^2}}\,t+\alpha_3\right), \tag{6.139}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde constantele arbitrare de integrare A, B, C, D, E, F, respectiv K_i şi α_i, $\left(i=\overline{1,3}\right)$ se determină din cele şase condiţii iniţiale,

$$\theta_i\left(t=0\right)=\theta_{0i},\ \dot{\theta}_i\left(t=0\right)=\dot{\theta}_{0i},\ \left(i=\overline{1,3}\right). \tag{6.140}$$

7. Problema pendulului gravitaţional dublu

Să se studieze mişcarea unui pendul gravitaţional dublu format din două corpuri (puncte materiale) de mase m_1 şi m_2, lungimile tijelor ideale (de masă nulă şi cu articulaţii fără frecare) fiind l_1 şi respectiv l_2.

Rezolvare

Să identificăm mai întâi legăturile la care este supus sistemul.

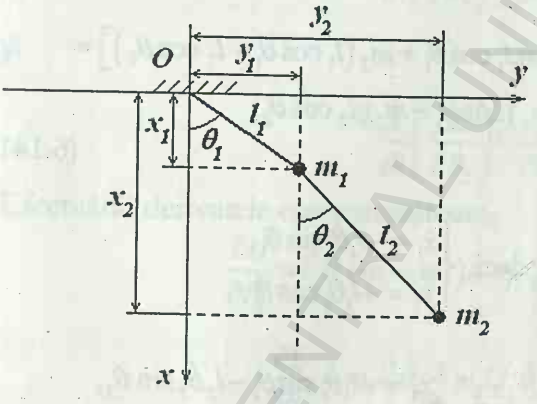


Fig. VI.19

Întrucât presupunem mişcarea plană (considerând doar condiţii iniţiale corespunzătoare) şi ţinând cont de Fig. VI.19, putem scrie:

$$f_1(z_1)=z_1=const._1\left(=0\right),$$

$$f_2(z_2)=z_2=const._2\left(=0\right),$$

$$f_3(x_1,\,y_1)=x_1^2+y_1^2-l_1^2=0$$

şi

$$f_4(x_1,\,x_2,\,y_1,\,y_2)=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2-l_2^2=0.$$

În concluzie, sistemul este supus la patru legături olonome (bilaterale, scleronome şi finite) şi are $3\cdot 2-4=2$ grade de libertate. Asociem acestor două grade de libertate coordonatele generalizate θ_1 şi θ_2 – unghiurile făcute de cele două tije cu verticala descendentă. Singurele forţe aplicate sistemului sunt cele două forţe de greutate ale corpurilor. Câmpul gravitaţional fiind unul potenţial (chiar conservativ) rezultă că

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sistemul este unul natural. Pentru a determina funcția Lagrange a sistemului trebuie să aflăm potențialul (energia potențială a) sistemului și energia lui cinetică.

Conform celor discutate în cadrul problemei pendulului simplu, avem

$$dV = -dA = -\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -m_1 g dx_1 - m_2 g dx_2,$$

de unde,

$$V = -g\left(m_1 x_1 + m_2 x_2\right) + V_0,$$

constanta arbitrară de integrare V_0 determinându-se prin alegerea convenabilă a nivelului de referință pentru energia potențială. Evident, cel mai convenabil este ca $V_0 = 0$. Acest lucru este cu putință, dacă alegem nivelul de referință pentru V ca fiind planul yOz. Într-adevăr,

$$V\left(x_1 = 0,\ x_2 = 0\right) = 0 \ \Rightarrow \ V_0 = 0.$$

Atunci,

$$V = -g\left(m_1 x_1 + m_2 x_2\right) = -g\left[m_1 l_1 \cos\theta_1 + m_2\left(l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2\right)\right] =$$
$$= -g l_1 \left(m_1 + m_2\right)\cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2. \qquad (6.141)$$

Deoarece, din Fig. VI.19 avem:

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cos\theta_1, \\ y_1 = l_1 \sin\theta_1, \end{cases} \text{ deci, } \begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1, \\ \dot{y}_1 = +l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1, \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2, \\ y_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2, \end{cases} \text{ deci, } \begin{cases} \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2, \\ \dot{y}_2 = +l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2, \end{cases}$$

energia cinetică a sistemului este

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \left|\vec{v}_1\right|^2 + \frac{1}{2} m_2 \left|\vec{v}_2\right|^2 = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\left(\theta_2 - \theta_1\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \left(m_1 + m_2\right) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\left(\theta_2 - \theta_1\right). \qquad (6.142)$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Funcția Lagrange a sistemului va fi atunci:

$$L = T - V = \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \\ + g l_1 (m_1 + m_2) \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2 \tag{6.143}$$

și, deoarece nu depinde explicit de timp, rezultă că ecuațiile Lagrange de speța a II-a admit integrala primă a energiei (energia totală a sistemului se conservă),

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \dot{\theta}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} + \dot{\theta}_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - L = const. \tag{6.144}$$

Ecuațiile Lagrange de speța a II-a corespunzătoare celor două coordonate generalizate sunt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \tag{6.145}$$

și

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0. \tag{6.145'}$$

Efectuând derivatele corespunzătoare,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = l_1^2 \dot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = l_1^2 \ddot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \\ - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \\ + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1),$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1$$

şi

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 g l_2 \sin\theta_2 ,$$

ecuaţiile Lagrange (6.145, 6.145') se scriu astfel:

$$l_1^2 \ddot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1 = 0 \qquad (6.146)$$

şi

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0 . \qquad (6.146')$$

Ecuaţiile (6.146) şi (6.146') reprezintă totodată şi ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sistemului. Rezolvarea analitică a acestora în cazul cel mai general nu este posibilă. De aceea, de obicei se recurge la abordarea cazurilor limită mai importante. În primul rând, cel mai adesea se studiază cazul oscilaţiilor mici, când, ţinând cont de aproximaţiile $\cos(\theta_2 - \theta_1) \cong 1$ şi $\cos\theta_i \cong 1 - \frac{\theta_i^2}{2}$, $(i = 1, 2)$, funcţia Lagrange (6.143) devine

$$L = T - V = \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\ - \frac{1}{2} g l_1 (m_1 + m_2) \theta_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^2 , \qquad (6.147)$$

unde am omis termenii constanţi $g l_1 (m_1 + m_2)$ şi $g m_2 l_2$ (lagrangeeni echivalenţi).

În cele ce urmează ne vom restrânge atenţia asupra cazului particular $l_1 = l_2 = l$. Luând drept coordonate ale micilor oscilaţii $\xi_1 = \sqrt{m_1} l \theta_1$ şi $\xi_2 = \sqrt{m_2} l (\theta_1 + \theta_2)$, ceea ce înseamnă că $\theta_1 = \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}}$ şi $\theta_2 = \frac{\xi_2}{l\sqrt{m_2}} - \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}}$, lagrangeanul micilor oscilaţii (6.147) devine

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2\right)-\frac{1}{2}\frac{g}{l}\left[\left(1+2\frac{m_2}{m_1}\right)\xi_1^2+\xi_2^2\right]+\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\frac{g}{l}\xi_1\xi_2, \quad (6.148)$$

adică lagrangeanul (6.76) din problema cinci, cu

$$\omega_1^2=\frac{g}{l}\left(1+2\frac{m_2}{m_1}\right),\ \omega_2^2=\frac{g}{l} \quad (6.149)$$

şi

$$\kappa=\frac{g}{l}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (6.150)$$

Pulsaţiile normale (ale modurilor normale) se obţin făcând înlocuirile corespunzătoare în relaţiile (6.80) şi (6.81) din aceeaşi problemă. Rezultă:

$$\varpi_1^2=\frac{1}{2}\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)-\sqrt{\kappa^2+\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)/4}=\frac{g}{l}\left[1+\frac{m_2}{m_1}\left(1-\sqrt{1+\frac{m_1}{m_2}}\right)\right] \quad (6.151)$$

şi

$$\varpi_2^2=\frac{1}{2}\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)+\sqrt{\kappa^2+\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)/4}=\frac{g}{l}\left[1+\frac{m_2}{m_1}\left(1+\sqrt{1+\frac{m_1}{m_2}}\right)\right]. \quad (6.152)$$

Analizei generale în raport cu ω_1 şi κ la ω_2 fixat din problema amintită îi corespunde acum dependenţa de raportul $\frac{m_2}{m_1}$. Vom considera în cele ce urmează doar cazurile limită mai importante: $\frac{m_2}{m_1}\ll 1$, $\frac{m_2}{m_1}\gg 1$ şi $m_1=m_2$. Într-adevăr, după cum am văzut în problema cinci, condiţia de „cuplaj slab" (când oscilaţiile sunt localizate), $\kappa\ll\left|\omega_2^2-\omega_1^2\right|$, înseamnă acum:

$$\frac{g}{l}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\ll\left|2\frac{g}{l}\frac{m_2}{m_1}\right| \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\gg 1 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1}\gg 1,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar condiţia de „cuplaj tare" (când oscilaţiile nu mai sunt localizate), $\kappa \gg \left|\omega_2^2 - \omega_1^2\right|$, devine acum:

$$\frac{g}{l}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \gg \left|2\frac{g}{l}\frac{m_2}{m_1}\right| \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} \ll 1.$$

1) În cazul $\frac{m_2}{m_1} \ll 1$, oscilaţiile fiind nelocalizate, conform analizei generale efectuate în problema cinci, avem

$$\xi_1 \cong \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sqrt{2}} \text{ şi } \xi_2 \cong \frac{\eta_1 + \eta_2}{\sqrt{2}}, \tag{6.153}$$

η_i, $(i = 1, 2)$ fiind coordonatele normale, deci pentru care putem scrie

$$\eta_i = A_i \cos(\varpi_i t + \psi_i), \ (i = 1, 2), \tag{6.154}$$

unde A_i şi ψ_i, $(i = 1, 2)$ sunt constante arbitrare, determinabile din condiţiile iniţiale. Într-adevăr, pentru $ctg2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa}$ avem:

$$ctg2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} = \frac{-2\frac{g}{l}\frac{m_2}{m_1}}{2\frac{g}{l}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}} = -\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \ (\to 0 \text{ prin valori negative}),$$

ceea ce înseamnă că $\varphi \to \frac{\pi}{4}$ (prin valori mai mari ca $\frac{\pi}{4}$), deci relaţiile (6.78) din problema cinci cu notaţiile de aici, adică

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \cos\varphi - \eta_2 \sin\varphi, \\ \xi_2 = \eta_1 \sin\varphi + \eta_2 \cos\varphi; \end{cases}$$

conduc imediat la (6.153). Până la termeni de ordinul întâi în $\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$, ϖ_i, $(i = 1, 2)$ din relaţiile (6.154), sunt date de

$$\varpi_{1,2} = \omega_0\left(1 \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right) = \omega_0 \mp \gamma, \tag{6.155}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu $\gamma = \omega_0 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \ll \omega_0$ şi $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Într-adevăr, cu notaţia $z \overset{not.}{=} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$, paranteza pătrată din expresia lui ϖ_1^2, $\left[1+\frac{m_2}{m_1}\left(1-\sqrt{1+\frac{m_1}{m_2}}\right)\right]$, se scrie $\left[1+z^2\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}\right)\right]$ şi atunci

$$\varpi_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1+z^2\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}\right)} = \omega_0\sqrt{1+z^2\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}\right)}.$$

Ţinând cont de aproximaţia $\sqrt{1\pm\zeta} \cong 1\pm\frac{\zeta}{2}$ (ne oprim doar la termenii de ordinul întâi în z) avem

$$\sqrt{1+z^2\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}\right)} = \sqrt{1+z^2-\sqrt{z^4+z^2}} = \sqrt{1+z^2-z\sqrt{z^2+1}} \cong$$

$$\cong \sqrt{1+z^2-z\left(1+\frac{z^2}{2}\right)} = \sqrt{1+z^2-z-\frac{z^3}{2}} \cong \sqrt{1-z} \cong 1-\frac{z}{2}$$

şi atunci

$$\varpi_1 \cong \omega_0\left(1-\frac{z}{2}\right) = \omega_0\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right). \tag{6.156}$$

În mod cu totul asemănător se arată faptul că

$$\varpi_2 \cong \omega_0\left(1+\frac{z}{2}\right) = \omega_0\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right). \tag{6.157}$$

Presupunând că în momentul iniţial pendulele sunt în repaus $\left(\dot\theta_1(t_0=0)=0,\ \dot\theta_2(t_0=0)=0\right)$ şi doar pendulul de masă m_2 este scos din poziţia de echilibru $\left(\theta_1(t_0=0)=0,\ \theta_2(t_0=0)=\theta_0\right)$, avem:

$$\theta_1 = \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}} \cong \frac{\eta_1-\eta_2}{l\sqrt{2m_1}} = \frac{1}{l\sqrt{2m_1}}\left[A_1\cos\left(\varpi_1 t+\psi_1\right)-A_2\cos\left(\varpi_2 t+\psi_2\right)\right] \tag{6.158}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

și

$$\theta_2 = \frac{\xi_2}{l\sqrt{m_2}} - \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}} \cong \frac{\eta_1+\eta_2}{l\sqrt{2m_2}} - \frac{\eta_1-\eta_2}{l\sqrt{2m_1}} = \left(\frac{1}{l\sqrt{2m_2}} - \frac{1}{l\sqrt{2m_1}}\right)\eta_1 +$$
$$+\left(\frac{1}{l\sqrt{2m_2}} + \frac{1}{l\sqrt{2m_1}}\right)\eta_2 = \left(\frac{1}{l\sqrt{2m_2}} - \frac{1}{l\sqrt{2m_1}}\right)A_1\cos(\varpi_1 t+\psi_1) +$$
$$+\left(\frac{1}{l\sqrt{2m_2}} + \frac{1}{l\sqrt{2m_1}}\right)A_2\cos(\varpi_2 t+\psi_2), \tag{6.159}$$

unde constantele arbitrare A_1, A_2, ψ_1 și ψ_2 se determină din condițiile inițiale. Având în vedere că

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{l\sqrt{2m_1}}\left[\varpi_2 A_2\sin(\varpi_2 t+\psi_2) - \varpi_1 A_1\sin(\varpi_1 t+\psi_1)\right]$$

și

$$\dot{\theta}_2 = \left(\frac{\varpi_1}{l\sqrt{2m_1}} - \frac{\varpi_1}{l\sqrt{2m_2}}\right)A_1\sin(\varpi_1 t+\psi_1) - \left(\frac{\varpi_2}{l\sqrt{2m_2}} + \frac{\varpi_2}{l\sqrt{2m_1}}\right)A_2\sin(\varpi_2 t+\psi_2)$$

impunerea condițiilor inițiale conduce la următorul sistem algebric de ecuații în constantele arbitrare amintite mai sus:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{l\sqrt{2m_1}}(A_1\cos\psi_1 - A_2\cos\psi_2), \\ \theta_0 = \left(\dfrac{1}{l\sqrt{2m_2}} - \dfrac{1}{l\sqrt{2m_1}}\right)A_1\cos\psi_1 + \left(\dfrac{1}{l\sqrt{2m_2}} + \dfrac{1}{l\sqrt{2m_1}}\right)A_2\cos\psi_2, \\ 0 = \dfrac{1}{l\sqrt{2m_1}}(\varpi_2 A_2\sin\psi_2 - \varpi_1 A_1\sin\psi_1), \\ 0 = \left(\dfrac{\varpi_1}{l\sqrt{2m_1}} - \dfrac{\varpi_1}{l\sqrt{2m_2}}\right)A_1\sin\psi_1 - \left(\dfrac{\varpi_2}{l\sqrt{2m_2}} + \dfrac{\varpi_2}{l\sqrt{2m_1}}\right)A_2\sin\psi_2. \end{cases}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din ecuația a treia a acestui sistem rezultă că $\varpi_1 A_1 \sin\psi_1 = \varpi_2 A_2 \sin\psi_2$. Utilizând această egalitate în ultima ecuație a sistemului obținem că $\psi_1 = 0$ și $\psi_2 = 0$. Cu acest rezultat în prima ecuație a sistemului găsim că $A_1 = A_2$ care, utilizată în ecuația a doua a sistemului conduce la $A_1 = A_2 = \frac{l\,\theta_0\sqrt{m_2}}{\sqrt{2}}$. Atunci,

$$\theta_1 = \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}} \cong \frac{\eta_1 - \eta_2}{l\sqrt{2m_1}} = \frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\left(\cos\varpi_1 t - \cos\varpi_2 t\right)$$

și

$$\theta_2 = \left(\frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right)\cos\varpi_1 t + \left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right)\cos\varpi_2 t =$$

$$= \frac{\theta_0}{2}\left(\cos\varpi_1 t + \cos\varpi_2 t\right) + \frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\left(\cos\varpi_2 t - \cos\varpi_1 t\right).$$

Utilizând cunoscutele identități trigonometrice

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}, \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}, \end{aligned} \tag{6.160}$$

expresiile coordonatelor unghiulare θ_1 și θ_2 devin

$$\theta_1 = \frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\left(\cos\varpi_1 t - \cos\varpi_2 t\right) = \theta_0\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\sin\frac{(\varpi_2 - \varpi_1)t}{2}\sin\frac{(\varpi_1 + \varpi_2)t}{2} =$$

$$= \theta_0\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right)\sin\omega_0 t = \theta_0\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\sin\omega_0 t\sin\gamma t$$

și

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\theta_2 = \frac{\theta_0}{2}\left(\cos\varpi_1 t + \cos\varpi_2 t\right) + \frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\left(\cos\varpi_2 t - \cos\varpi_1 t\right) =$$

$$= \theta_0 \cos\omega_0 t \cos\gamma t + \theta_0\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\cos\omega_0 t\cos\gamma t = \theta_0\left(1+\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right)\cos\omega_0 t\cos\gamma t \cong$$

$$\cong \theta_0 \cos\omega_0 t \cos\gamma t.$$

Relațiile obținute:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}\sin\omega_0 t\sin\gamma t, \\ \theta_2 = \theta_0\cos\omega_0 t\cos\gamma t, \end{cases} \tag{6.161}$$

ne arată că pendulele oscilează „alternativ" (fiecare își atinge amplitudinea când celălalt se află în poziția de echilibru). Totodată, se observă că amplitudinea pendulului de masă m_1 este mult mai mică (de $\sqrt{m_1/m_2}$ ori) decât cea a pendulului de masă m_2. De asemenea, acest rezultat poate fi interpretat ca fiind de tipul „bătăilor": oscilații cu pulsația ω_0 și amplitudinea mult mai lent variabilă în timp, $\theta_{\text{mod}\,(1)}(t) = \theta_0\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}\sin\gamma t$ și, respectiv, $\theta_{\text{mod}\,(2)}(t) = \theta_0\cos\gamma t$.

2) În cazul $\dfrac{m_2}{m_1} \gg 1$ oscilațiile sunt localizate și, deoarece $\omega_1 > \omega_2$, conform analizei generale din problema cinci, avem $\varphi \cong \dfrac{\pi}{2}$, astfel că

$$\xi_1 \cong -\eta_2 \text{ și } \xi_2 \cong \eta_1.$$

Într-adevăr, în acest caz:

$$ctg2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} = \frac{-2\dfrac{g}{l}\dfrac{m_2}{m_1}}{2\dfrac{g}{l}\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}} = -\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \ (\to -\infty), \text{ căci } m_2 \gg m_1,$$

ceea ce înseamnă că $\varphi \cong \dfrac{\pi}{2}$, iar din

$$\begin{cases}\xi_1 = \eta_1 \cos\varphi - \eta_2 \sin\varphi, \\ \xi_2 = \eta_1 \sin\varphi + \eta_2 \cos\varphi,\end{cases}$$

rezultă imediat $\xi_1 \cong -\eta_2 = -A_2 \cos(\varpi_2 t + \psi_2)$ şi $\xi_2 \cong \eta_1 = A_1 \cos(\varpi_1 t + \psi_1)$. Lucrând şi acum în aproximaţia de ordinul întâi în $\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \ll 1$ obţinem:

$$\varpi_1 \cong \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \text{ şi } \varpi_2 \cong \omega_0 \sqrt{\frac{2m_2}{m_1}} \text{ cu } \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Într-adevăr, până la termeni de ordinul întâi în $z \overset{not.}{=} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$, paranteza pătrată din expresia lui ϖ_1^2, adică $\left[1 + \frac{m_2}{m_1}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}}\right)\right]$, se scrie $\left[1 + \frac{1}{z^2}\left(1 - \sqrt{1+z^2}\right)\right]$ şi atunci,

$$\varpi_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}}\right)} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}\left(1 - \sqrt{1+z^2}\right)}.$$

Ţinând cont de aproximaţia $\sqrt{1 \pm \zeta} \cong 1 \pm \frac{\zeta}{2}$ (ne oprim doar la termenii de ordinul întâi în z) avem

$$\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}\left(1 - \sqrt{1+z^2}\right)} \cong \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}\left(1 - 1 - \frac{z^2}{2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

şi atunci,

$$\varpi_1 \cong \frac{\omega_0}{\sqrt{2}},$$

iar pentru

$$\varpi_2 = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}}\right)} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}\left(1 + \sqrt{1+z^2}\right)},$$

utilizând aceeaşi aproximaţie, $\sqrt{1 \pm \zeta} \cong 1 \pm \frac{\zeta}{2}$, avem

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\varpi_2 \cong \omega_0 \frac{\sqrt{2}}{z} = \omega_0 \sqrt{\frac{2m_2}{m_1}},$$

căci

$$\sqrt{1+\frac{1}{z^2}\left(1+\sqrt{1+z^2}\right)} \cong \sqrt{1+\frac{1}{z^2}\left(1+1+\frac{z^2}{2}\right)} = \sqrt{1+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}+\frac{2}{z^2}} \cong \sqrt{\frac{2}{z^2}} = \frac{\sqrt{2}}{z}.$$

Presupunând şi în acest caz că la momentul iniţial pendulele sunt în repaus $\left(\dot{\theta}_1(t_0=0)=0,\ \dot{\theta}_2(t_0=0)=0\right)$ şi doar pendulul de masă m_1 este scos din poziţia de echilibru $\left(\theta_1(t_0=0)=\theta_0,\ \theta_2(t_0=0)=0\right)$, avem

$$\theta_1 = \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}} \cong -\frac{\eta_2}{l\sqrt{m_1}} = -\frac{A_2}{l\sqrt{m_1}}\cos\left(\varpi_2 t+\psi_2\right)$$

şi

$$\theta_2 = \frac{\xi_2}{l\sqrt{m_2}} - \frac{\xi_1}{l\sqrt{m_1}} \cong \frac{\eta_1}{l\sqrt{m_2}} + \frac{\eta_2}{l\sqrt{m_1}} =$$

$$= \frac{A_1}{l\sqrt{m_2}}\cos\left(\varpi_1 t+\psi_1\right) + \frac{A_2}{l\sqrt{m_1}}\cos\left(\varpi_2 t+\psi_2\right),$$

unde A_1, A_2, ψ_1 şi ψ_2 sunt constante arbitrare, determinabile din condiţiile iniţiale. Cum

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\varpi_2 A_2}{l\sqrt{m_1}}\sin\left(\varpi_2 t+\psi_2\right)$$

şi

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{\varpi_1 A_1}{l\sqrt{m_2}}\sin\left(\varpi_1 t+\psi_1\right) - \frac{\varpi_2 A_2}{l\sqrt{m_1}}\sin\left(\varpi_2 t+\psi_2\right),$$

condiţiile iniţiale considerate conduc la următorul sistem algebric de patru ecuaţii în necunoscutele A_1, A_2, ψ_1 şi ψ_2:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} \theta_0 = -\dfrac{A_2}{l\sqrt{m_1}}\cos\psi_2, \\ 0 = \dfrac{A_1}{l\sqrt{m_2}}\cos\psi_1 + \dfrac{A_2}{l\sqrt{m_1}}\cos\psi_2, \\ 0 = \dfrac{\varpi_2 A_2}{l\sqrt{m_1}}\sin\psi_2, \\ 0 = -\dfrac{\varpi_1 A_1}{l\sqrt{m_2}}\sin\psi_1 - \dfrac{\varpi_2 A_2}{l\sqrt{m_1}}\sin\psi_2. \end{cases}$$

Din ecuația a treia rezultă imediat $\psi_2 = 0$, și atunci, din ultima ecuație a sistemului obținem că și $\psi_1 = 0$. Cu aceste valori în primele două ecuații ale sistemului rezultă $A_2 = -l\ \theta_0\sqrt{m_1}$ și $A_1 = l\ \theta_0\sqrt{m_2}$. Așadar:

$$\theta_1 = \theta_0 \cos\varpi_2 t = \theta_0 \cos\left(\omega_0\sqrt{2m_2/m_1}\ t\right) \tag{6.162}$$

și

$$\theta_2 = \theta_0\cos\varpi_1 t - \theta_0\cos\varpi_2 t = \theta_0\cos\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t - \theta_0\cos\left(\omega_0\sqrt{\frac{2m_2}{m_1}}\ t\right) =$$

$$= \theta_0\left[\cos\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t - \cos\left(\omega_0\sqrt{\frac{2m_2}{m_1}}\ t\right)\right] =$$

$$= 2\theta_0 \sin\frac{\omega_0\left(\sqrt{\frac{2m_2}{m_1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2}t\ \ \sin\frac{\omega_0\left(\sqrt{\frac{2m_2}{m_1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2}t \cong$$

$$\cong 2\theta_0 \sin^2\left(\omega_0\sqrt{\frac{m_2}{2m_1}}\ t\right) = \theta_0\left[1 - \cos\left(\omega_0\sqrt{\frac{2m_2}{m_1}}\ t\right)\right]. \tag{6.163}$$

3) În cazul $m_1 = m_2 = m$, din $ctg2\varphi = \dfrac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\kappa} \overset{not.}{=} a = \dfrac{\omega_0^2 - 3\omega_0^2}{2\omega_0^2} =$ $= -1$ găsim că

$$\sin^2\varphi=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\varphi=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}\Rightarrow \varphi=\frac{3\pi}{8}$$

şi

$$\cos^2\varphi=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\Rightarrow \varphi=\frac{3\pi}{8}.$$

Atunci, din

$$\begin{cases}\xi_1=\eta_1\cos\varphi-\eta_2\sin\varphi,\\ \xi_2=\eta_1\sin\varphi+\eta_2\cos\varphi,\end{cases}$$

rezultă

$$\begin{cases}\xi_1=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\,\eta_1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\,\eta_2,\\ \xi_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\,\eta_1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\,\eta_2,\end{cases}$$

iar pentru θ_1 şi θ_2 obţinem:

$$\theta_1=\frac{\xi_1}{l\sqrt{m}}=\frac{1}{l\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\,\eta_1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\,\eta_2\right)=$$

$$=\frac{1}{l\sqrt{m}}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\,A_1\cos\left(\varpi_1 t+\psi_1\right)-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\,A_2\cos\left(\varpi_2 t+\psi_2\right)\right] \tag{6.164}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$\theta_2=\frac{1}{l\sqrt{m}}(\xi_2-\xi_1)=\frac{1}{l\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\,\eta_1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\,\eta_2\right)-$$

$$-\frac{1}{l\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\,\eta_1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\,\eta_2\right)=\frac{1}{l\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\right)\eta_1+$$

$$+\frac{1}{l\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right)\eta_2=\frac{1}{l\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\right)\times$$

$$\times A_1\cos(\varpi_1 t+\psi_1)+\frac{1}{l\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right)A_2\cos(\varpi_2 t+\psi_2). \tag{6.165}$$

Având în vedere că

$$\dot{\theta}_1=\frac{1}{l\sqrt{m}}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\,A_2\varpi_2\sin(\varpi_2 t+\psi_2)-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\,A_1\varpi_1\sin(\varpi_1 t+\psi_1)\right]$$

şi

$$\dot{\theta}_2=\frac{1}{l\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right)A_1\varpi_1\sin(\varpi_1 t+\psi_1)-$$

$$-\frac{1}{l\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right)A_2\varpi_2\sin(\varpi_2 t+\psi_2),$$

condiţiile iniţiale $\theta_1(t_0=0)=0$, $\theta_2(t_0=0)=\theta_0$ şi $\dot{\theta}_1(t_0=0)=0$, $\dot{\theta}_2(t_0=0)=0$ conduc la următorul sistem algebric de patru ecuaţii cu cele patru necunoscute A_1, A_2, ψ_1 şi ψ_2 (până aici constante arbitrare, determinabile din condiţiile iniţiale):

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} 0=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\,A_1\cos\psi_1-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\,A_2\cos\psi_2, \\ l\,\theta_0\sqrt{m}=\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\right)A_1\cos\psi_1+\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right)A_2\cos\psi_2, \\ 0=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\,A_2\varpi_2\sin\psi_2-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\,A_1\varpi_1\sin\psi_1, \\ 0=\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right)A_1\varpi_1\sin\psi_1-\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right)A_2\varpi_2\sin\psi_2. \end{cases}$$

Din ultimele două ecuaţii ale acestui sistem rezultă simplu $\psi_1=0$ şi $\psi_2=0$. Cu aceste valori în prima ecuaţie a sistemului obţinem:

$$A_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\,A_1,$$

care, introdusă în a doua ecuaţie a sistemului furnizează pentru constanta A_1 valoarea

$$A_1=\frac{l\,\theta_0\sqrt{m}}{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}}=$$

$$=\frac{l\,\theta_0\sqrt{m}}{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}=\frac{l\,\theta_0\sqrt{m}}{\dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}},$$

deci,

$$A_2=\frac{l\,\theta_0\sqrt{m}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}=\frac{l\,\theta_0\sqrt{m}}{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}.$$

Atunci, relaţia (6.164) devine

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\theta_1 = \frac{1}{l\sqrt{m}}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\left(\frac{l\,\theta_0\sqrt{m}}{\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}\right)\cos\varpi_1 t - \right.$$

$$\left. -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\left(\frac{l\,\theta_0\sqrt{m}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}\right)\cos\varpi_2 t\right] =$$

$$= \frac{\theta_0}{2\sqrt{2}}\left(\cos\varpi_1 t - \cos\varpi_2 t\right),$$

iar relația (6.165) conduce la

$$\theta_2 = \frac{1}{l\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{l\,\theta_0\sqrt{m}}{\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}\right)\cos\varpi_1 t +$$

$$+\frac{1}{l\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{l\,\theta_0\sqrt{m}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}\right)\cos\varpi_2 t =$$

$$= \frac{\theta_0}{2}\left(\cos\varpi_1 t + \cos\varpi_2 t\right).$$

Deoarece în acest caz $\left(m_1 = m_2 = m,\ l_1 = l_2 = l\right)$,

$$\varpi_1^2 = \frac{g}{l}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

și

$$\varpi_2^2 = \frac{g}{l}\left(2+\sqrt{2}\right),$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cele două variabile unghiulare devin

$$\theta_1(t)=\frac{\theta_0}{2\sqrt{2}}\left[\cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \omega_0 t\right)-\cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\ \omega_0 t\right)\right] \tag{6.166}$$

şi

$$\theta_2(t)=\frac{\theta_0}{2}\left[\cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \omega_0 t\right)+\cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\ \omega_0 t\right)\right]. \tag{6.167}$$

Observaţie: În acest ultim caz particular ($m_1=m_2=m$ şi $l_1=l_2=l$) problema poate fi abordată şi independent de consideraţiile generale din problema cinci. Astfel, ecuaţiile (6.146) şi (6.146') devin

$$2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)-\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)+2\frac{g}{l}\sin\theta_1=0 \tag{6.168}$$

şi respectiv,

$$\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)+\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{g}{l}\sin\theta_2=0. \tag{6.168'}$$

Dacă, în plus, oscilaţiile sunt şi mici $\left[\cos(\theta_2-\theta_1)\cong 1,\ \sin(\theta_2-\theta_1)\cong 0,\ \sin\theta_1\cong\theta_1,\ \sin\theta_2\cong\theta_2\right]$, atunci ecuaţiile se scriu şi mai simplu,

$$2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2+2\frac{g}{l}\theta_1=0 \tag{6.169}$$

şi respectiv,

$$\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_1+\frac{g}{l}\theta_2=0. \tag{6.169'}$$

Căutăm soluţii de forma $\theta_1=A_1e^{i\omega t}$ şi $\theta_2=A_2e^{i\omega t}$. Obţinem:

$$-2\omega^2A_1e^{i\omega t}-\omega^2A_2e^{i\omega t}+2\frac{g}{l}A_1e^{i\omega t}=0$$

şi respectiv,

$$-\omega^2A_2e^{i\omega t}-\omega^2A_1e^{i\omega t}+\frac{g}{l}A_2e^{i\omega t}=0,$$

sau, simplificând exponenţiala nenulă,

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} 2\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)A_1-\omega^2 A_2=0, \\ -\omega^2 A_1+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)A_2=0. \end{cases}$$

Acest sistem are soluții netriviale pentru amplitudinile A_1 și A_2 doar dacă determinantul lui este nul:

$$\begin{vmatrix} 2\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \left(\frac{g}{l}-\omega^2\right) \end{vmatrix}=0, \tag{6.170}$$

adică,

$$\omega^4-2\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)^2=0,$$

Notând $\omega^2=z$ și $\frac{g}{l}=\omega_0^2$, rezultă următoarea ecuație de gradul doi în z:

$$z^2-2\left(\omega_0^2-z\right)^2=0,$$

sau,

$$z^2-4\omega_0^2 z+2\omega_0^4=0,$$

ale cărei soluții sunt

$$z_{1,2}=2\omega_0^2\pm\sqrt{4\omega_0^4-2\omega_0^4}=2\omega_0^2\pm\sqrt{2\omega_0^4}=\omega_0^2\left(2\pm\sqrt{2}\right).$$

Revenind la vechea variabilă, avem,

$$\omega_1=\omega_0\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \text{ și }\ \omega_2=\omega_0\sqrt{2+\sqrt{2}}\,. \tag{6.171}$$

Acestea sunt cele două *frecvențe normale* de oscilație ale sistemului. Rezultă deci că sistemul posedă două *moduri normale* de oscilație (corespunzător celor două grade de libertate ale sale).

După cum știm, alegerea coordonatelor generalizate este (într-o mare măsură) arbitrară. Acest fapt ne permite să reprezentăm sistemul printr-un ansamblu de oscilatori liniar armonici, câte unul pentru fiecare grad de libertate al sistemului. Cu alte cuvinte, fiecărei frecvențe normale îi

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI FIZICĂ

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

asociem o coordonată generalizată care variază periodic în timp, cu frecvenţa respectivă. Aceste *coordonate* sunt numite *normale.*

Să presupunem că sistemul oscilează cu una din frecvenţele normale, de exemplu, ω_1. Atunci, cum $\theta_1 = A_1 e^{i\omega_1 t}$ şi $\theta_2 = A_2 e^{i\omega_1 t}$, ecuaţia (6.169) devine

$$-2\omega_1^2 A_1 e^{i\omega_1 t} - \omega_1^2 A_2 e^{i\omega_1 t} + 2\omega_0^2 A_1 e^{i\omega_1 t} = 0,$$

sau,

$$\left(-2\omega_1^2 + 2\omega_0^2\right)\theta_1 = \omega_1^2 \theta_2 .$$

Ţinând cont că $\omega_1^2 = \left(2-\sqrt{2}\right)\omega_0^2$, ecuaţia de mai sus devine

$$\left[-2\left(2-\sqrt{2}\right)\omega_0^2 + 2\omega_0^2\right]\theta_1 = \left(2-\sqrt{2}\right)\omega_0^2\theta_2 ,$$

adică,

$$\left(-2+2\sqrt{2}\right)\theta_1 = \left(2-\sqrt{2}\right)\theta_2 ,$$

de unde,

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\left(-2+2\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{2}. \qquad (6.172)$$

Considerând acum cea de-a doua frecvenţă normală şi reluând aceleaşi calcule, vom obţine:

$$\left(-2\omega_2^2 + 2\omega_0^2\right)\theta_1 = \omega_2^2\theta_2 .$$

Cum $\omega_2^2 = \omega_0^2\left(2+\sqrt{2}\right)$, găsim:

$$\left[-2\left(2+\sqrt{2}\right)\omega_0^2 + 2\omega_0^2\right]\theta_1 = \left(2+\sqrt{2}\right)\omega_0^2\theta_2 ,$$

adică

$$\left(-2-2\sqrt{2}\right)\theta_1 = \left(2+\sqrt{2}\right)\theta_2 ,$$

de unde,

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\left(-2-2\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} = -\sqrt{2}. \qquad (6.172')$$

Aşadar, pentru cele două moduri normale de oscilaţie, relaţiile dintre cele două coordonate generalizate sunt:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\theta_2 = \theta_1\sqrt{2}$ (pentru $\omega = \omega_1$ – în acest caz modurile se numesc *simetrice*) şi $\theta_2 = -\theta_1\sqrt{2}$ (pentru $\omega = \omega_2$ – în acest caz modurile se numesc *antisimetrice*).

Dacă alegem ca şi coordonate normale mărimile $\eta_s = \theta_2 + \sqrt{2}\,\theta_1$ şi $\eta_{as} = \theta_2 - \sqrt{2}\,\theta_1$, funcţia Lagrange (6.143), în cazul particular $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ şi pentru mici oscilaţii ($\cos(\theta_2 - \theta_1) \cong 1$, $\cos\theta_i \cong 1 - \frac{\theta_i^2}{2}$, $(i = 1,\ 2)$), devine:

$$L = ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - mgl\theta_1^2 - \frac{1}{2}mgl\theta_2^2 = ml^2\left(\frac{\dot{\eta}_s - \dot{\eta}_{as}}{2\sqrt{2}}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{\dot{\eta}_s + \dot{\eta}_{as}}{2}\right)^2 + ml^2\left(\frac{\dot{\eta}_s - \dot{\eta}_{as}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\dot{\eta}_s + \dot{\eta}_{as}}{2}\right) - mgl\left(\frac{\eta_s - \eta_{as}}{2\sqrt{2}}\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{2}mgl\left(\frac{\eta_s + \eta_{as}}{2}\right)^2 = ml^2\left[\frac{\dot{\eta}_s^2 + \dot{\eta}_{as}^2 - 2\dot{\eta}_s\dot{\eta}_{as}}{8} + \frac{\dot{\eta}_s^2 + \dot{\eta}_{as}^2 + 2\dot{\eta}_s\dot{\eta}_{as}}{8} + \frac{\dot{\eta}_s^2 - \dot{\eta}_{as}^2}{4\sqrt{2}}\right] -$$

$$-\frac{mgl}{8}\left(\eta_s^2 + \eta_{as}^2 - 2\eta_s\eta_{as}\right) - \frac{mgl}{8}\left(\eta_s^2 + \eta_{as}^2 + 2\eta_s\eta_{as}\right) =$$

$$= ml^2\left[\frac{\sqrt{2}\left(\dot{\eta}_s^2 + \dot{\eta}_{as}^2 - 2\dot{\eta}_s\dot{\eta}_{as}\right)}{8\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\left(\dot{\eta}_s^2 + \dot{\eta}_{as}^2 + 2\dot{\eta}_s\dot{\eta}_{as}\right)}{8\sqrt{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\left(\dot{\eta}_s^2 - \dot{\eta}_{as}^2\right)}{8\sqrt{2}}\right] - \frac{mgl}{4}\left(\eta_s^2 + \eta_{as}^2\right) = \frac{ml^2}{8\sqrt{2}}\left[\left(2\sqrt{2} + 2\right)\dot{\eta}_s^2 + \left(2\sqrt{2} - 2\right)\dot{\eta}_{as}^2\right] -$$

$$-\frac{mgl}{4}\left(\eta_s^2 + \eta_{as}^2\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}ml^2\left[\dot{\eta}_s^2\left(\sqrt{2} + 1\right) + \dot{\eta}_{as}^2\left(\sqrt{2} - 1\right)\right] - \frac{mgl}{4}\left(\eta_s^2 + \eta_{as}^2\right),$$

sau, dacă alegem noi coordonate normale,

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\eta_1 = \eta_s \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} ml^2},$$

$$\eta_2 = \eta_{as} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} ml^2},$$

atunci lagrangeanul devine:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2\right) - \frac{g}{l}\left(\frac{\eta_1^2}{2+\sqrt{2}} + \frac{\eta_2^2}{2-\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2\right) - \frac{1}{2}\omega_0^2\left[\left(2-\sqrt{2}\right)\eta_1^2 + \left(2+\sqrt{2}\right)\eta_2^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\omega_1^2\eta_1^2 + \omega_2^2\eta_2^2\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\varpi_1^2\eta_1^2 + \varpi_2^2\eta_2^2\right),$$

adică am regăsit forma normală a lagrangeanului (6.147) în cazul al treilea $(m_1 = m_2 = m$ şi $l_1 = l_2 = l)$. Legea de mişcare poate fi şi ea dedusă uşor ţinând cont că

$$\eta_1 = l\eta_s\sqrt{m}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = l\sqrt{m}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\left(\theta_2 + \sqrt{2}\ \theta_1\right) = A_1\cos\left(\omega_1 t + \psi_1\right) \tag{6.173}$$

şi

$$\eta_2 = l\eta_{as}\sqrt{m}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = l\sqrt{m}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\left(\theta_2 - \sqrt{2}\ \theta_1\right) = A_2\cos\left(\omega_2 t + \psi_2\right). \tag{6.174}$$

Considerând aceleaşi condiţii iniţiale, anume, $\theta_1(t_0 = 0) = 0$, $\theta_2(t_0 = 0) = \theta_0$ şi $\dot{\theta}_1(t_0 = 0) = 0$, $\dot{\theta}_2(t_0 = 0) = 0$, constantele arbitrare (determinabile din aceste condiţii iniţiale) A_1, A_2, ψ_1 şi ψ_2 rezultă ca soluţii ale următorului sistem algebric:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} l\,\theta_0\sqrt{m}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = A_1\cos\psi_1, \\ l\,\theta_0\sqrt{m}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = A_2\cos\psi_2, \\ 0 = -\omega_1 A_1\sin\psi_1, \\ 0 = -\omega_2 A_2\sin\psi_2. \end{cases}$$

Din ultimele două ecuații ale acestui sistem rezultă imediat $\psi_1 = \psi_2 = 0$, valori care, introduse în primele două ecuații ale sistemului dau $A_1 = l\,\theta_0\sqrt{m}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$ și $A_2 = l\,\theta_0\sqrt{m}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$. Cu acestea în relațiile (6.173) și (6.174) rezultă ușor

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2\sqrt{2}}\left[\cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\;\omega_0 t\right) - \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\;\omega_0 t\right)\right]$$

și

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2}\left[\cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\;\omega_0 t\right) + \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\;\omega_0 t\right)\right],$$

adică exact relațiile (6.166) și (6.167) deduse prin prima metodă.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul VII

Probleme de echilibru şi mici oscilaţii

1. Un corp asimilabil unui punct material se poate mişca fără frecare în interiorul unui tub îndoit sub formă de elipsă, care se roteşte în jurul axei mari cu viteza unghiulară constantă ω, ca în Fig. VII.1. Cunoscând masa m a corpului, acceleraţia gravitaţională g şi semiaxele $a > b$ ale elipsei, să se determine:

a) poziţiile de echilibru ale corpului;

b) stabilitatea acestor poziţii de echilibru şi

c) perioada micilor oscilaţii efectuate de punctul material în jurul poziţiilor de echilibru stabil.

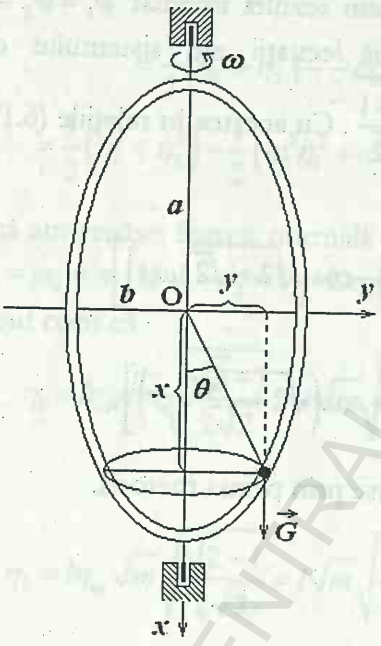


Fig. VII.1

Rezolvare

Întrucât în această problemă este implicată forţa centrifugă (care este o forţă de inerţie) o vom rezolva în două moduri, anume, studiind mişcarea corpului atât într-un sistem de referinţă inerţial, cât şi într-unul neinerţial.

BCU Cluj / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

A) Cazul sistemului de referinţă inerţial (SRI)

a) După cum ştim, într-un sistem de referinţă inerţial forţele de inerţie nu există. Aşadar, în cazul de faţă, pentru a rezolva problema nu trebuie să ne referim în nici un fel la forţa centrifugă. Din punctul de vedere al unui SRI, singura forţă aplicată corpului este forţa de greutate $\vec{G}$ a corpului.

Chiar fără a face nici un calcul, putem sesiza că, dacă elipsa nu s-ar roti, poziţia dată de $\theta = 0$ este o poziţie de echilibru stabil, iar cea dată de $\theta = \pi$ este una de echilibru instabil. Dacă elipsa se roteşte, atunci, în funcţie de valoarea vitezei unghiulare de rotaţie a elipsei, poziţia de echilibru $\theta = 0$ poate deveni o poziţie de echilibru instabil (când efectul forţei centrifuge[1] – care are tendinţa de a îndepărta şi mai mult corpul faţă de această poziţie de echilibru – întrece pe cel al forţei de greutate – care va tinde să readucă punctul material în poziţia de echilibru). Acest lucru se poate petrece dacă valoarea vitezei unghiulare de rotaţie a elipsei depăşeşte o anumită valoare critică, ω_{cr}, specifică sistemului. În schimb, dacă $\omega < \omega_{cr}$, atunci poziţia $\theta = 0$ rămâne o poziţie de echilibru stabil. Spre deosebire de aceasta, poziţia dată de $\theta = \pi$ este tot timpul (cu alte cuvinte, indiferent de valoarea lui ω) o poziţie de echilibru instabil, la o mică „perturbaţie" dată corpului, atât forţa de greutate, cât şi forţa centrifugă având tendinţa de a îndepărta şi mai mult corpul faţă de această poziţie de echilibru. În plus, atunci când elipsa se roteşte, este posibil (şi acest lucru nu îl putem determina cu exactitate decât efectuând calculele) să apară una sau mai multe poziţii de echilibru intermediare (cu θ cuprins între 0 şi π). Cu siguranţă însă, dacă $\omega \to \infty$ atunci poziţia dată de $\theta = \pi/2$ este o poziţie de echilibru stabil (în acest caz mişcarea corpului este determinată de forţa centrifugă, care întrece cu mult în efect pe cea de greutate).

Dacă aceste consideraţii sunt corecte, ar trebui să regăsim toate concluziile lor prin calcul. Să realizăm în continuare acest lucru în cadrul formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a.

---

[1] Această analiză calitativă preliminară nu ţine cont de tipul sistemului de referinţă (inerţial sau neinerţial) considerat, ci are un caracter general.

BCU IAŞI CENTRUL VECHI LIBRARY

Pentru a determina poziţiile de echilibru ale corpului, să observăm că sistemul este unul natural, deci, pentru care putem defini un potenţial. Fiind vorba despre câmpul forţelor de greutate (câmpul gravitaţional uniform şi omogen), potenţialul nu depinde explicit de timp, deci el reprezintă chiar energia potenţială a sistemului. Corpul este în echilibru în punctele în care energia lui potenţială este extremă. Deci, pentru a afla poziţiile de echilibru ale corpului trebuie să anulăm prima derivată a energiei lui potenţiale.

Avem,

$$dV = -dA,$$

unde

$$dA = \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

este lucrul mecanic elementar al forţei câmpului gravitaţional. Având în vedere alegerea sensului axelor de coordonate (vezi Fig. VII.1), putem scrie

$$dV = -mg\, dx,$$

de unde,

$$V = -mgx + V_0,$$

cu V_0 o constantă arbitrară de integrare. Aceasta se determină de obicei astfel încât expresia finală a potenţialului (aici a energiei potenţiale V) să fie cea mai simplă cu putinţă. În cazul nostru cel mai simplu ar fi ca $V_0 = 0$. Pentru a obţine acest lucru trebuie să alegem nivelul de referinţă pentru energia potenţială în planul $x = 0$, adică în planul yOz. Acest lucru este cu putinţă[2] şi avem:

$$V(x = 0) = 0 \Rightarrow V_0 = 0.$$

Ecuaţia elipsei raportată la sistemul de axe din Fig. VII.1,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

permite parametrizarea

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta, \end{cases}$$

[2] Precizăm că, în mod normal se procedează invers. Adică, mai întâi se alege un nivel de referinţă pentru energia potenţială şi apoi se determină constanta de integrare V_0.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ceea ce conduce la următoarea formă pentru energia potenţială a corpului:

$$V = -mga\cos\theta . \tag{7.1}$$

Anulând prima derivată a lui $V = V(\theta)$ obţinem:

$$\sin\theta = 0 ,$$

cu soluţiile „fizice"

$$\theta_1 = 0 \text{ şi } \theta_2 = \pi . \tag{7.2}$$

Stabilitatea acestor poziţii de echilibru se poate determina studiind semnul derivatei a doua a energiei potenţiale în aceste puncte. Cum

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mga\cos\theta ,$$

rezultă că poziţia de echilibru $\theta_1 = 0$ este una de echilibru stabil $\left(\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} > 0\right)$, iar cea dată de $\theta_2 = \pi$ este de echilibru instabil $\left(\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi} < 0\right)$. Aceste rezultate au fost deja anticipate în analiza calitativă succintă realizată la început, pentru cazul în care elipsa nu se roteşte. Totuşi, elipsa este în mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară constantă ω, fapt care nu reiese în nici un fel din modul de abordare de până acum al problemei. De ce? Sau, mai bine spus, unde este greşeala? Primul mijloc la care ar apela cei mai mulţi pentru a lua în consideraţie faptul că elipsa se roteşte este forţa centrifugă. Ori, acest lucru nu este permis în cazul de faţă, deoarece lucrăm într-un referenţial inerţial, în care această forţă pur şi simplu nu există. De aceea va trebui să utilizăm altă cale. Întrucât în cazul calculelor de mai sus nu se poate pune problema că am greşit, singura posibilitate este aceea de a gândi că raţionamentul la care am apelat nu este corect, sau cel puţin, este incomplet. Cu alte cuvinte, suntem conduşi la a concluziona că „adevărata" energie potenţială a corpului (sau energia potenţială „efectivă" – cum i se mai spune) nu este cea dată de relaţia (7.1). Într-adevăr, după cum vom vedea în cele ce urmează, aceasta este „greşeala".

Pentru a determina energia potenţială efectivă a corpului, să aflăm mai întâi lagrangeanul problemei. După cum simplu se poate constata, corpul are un singur grad de libertate, căruia îi vom asocia coordonata

BCU ALEXANDRU IOAN CUZA UNIVERSITY LIBRARY

generalizată $q \equiv \theta$. Funcţia Lagrange este dată de $L = T - V$, unde T este energia cinetică a corpului, iar potenţialul $V(\theta)$ este deja determinat. Deoarece corpul are o mişcare compusă (o mişcare de translaţie de-a lungul elipsei, în planul xOy şi o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei Ox), energia lui cinetică are două componente:

$$T = T_{tr} + T_{rot} = \frac{1}{2} m \vec{v}_{tr}^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}_{rot}^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \left(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta .$$

Atunci, lagrangeanul problemei este

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \left(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta + mga \cos \theta , \quad (7.3)$$

şi se observă că nu depinde explicit de timp. Acest lucru înseamnă că ecuaţiile Lagrange de speţa a II-a admit integrala primă

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = const. ,$$

această constantă fiind chiar energia totală a corpului, care se conservă. Avem deci,

$$const. = E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L =$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \left(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta \right) - \frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta .$$

De aici, prin identificare[3], rezultă:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \left(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta \right)$$

şi

$$E_{pot} = -\frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta . \quad (7.4)$$

Observăm aşadar că, pe lângă termenul $\left(-mga \cos \theta \right)$, care reprezintă chiar $V(\theta)$, am obţinut un termen suplimentar, $-\frac{1}{2} m \omega^2 b^2 \sin^2 \theta$, care

[3] Termenii care conţin o viteză generalizată (care este derivata totală în raport cu timpul a unei coordonate generalizate) la pătrat sunt termeni de energie cinetică „veritabilă", toţi ceilalţi termeni reprezentând energia potenţială „efectivă" a sistemului.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

„ţine cont" de faptul că elipsa se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω. În legătură cu o eventuală observaţie conform căreia termenul $-\frac{1}{2}m\omega^2b^2\sin^2\theta$ ar reprezenta tot un termen de energie cinetică (căci, pe de o parte el a apărut ca urmare a considerării în T a energiei cinetice a mişcării de rotaţie, iar pe de altă parte ω^2 este tot o derivată totală în raport cu timpul, a unei coordonate unghiulare, la pătrat), precizăm faptul că, în cadrul formalismului lagrangean termenii de energie cinetică „veritabilă" sunt cei pătratici în vitezele generalizate. În cazul problemei de faţă singura coordonată generalizată fiind θ, rezultă că avem doar o singură viteză generalizată, anume, $\dot{\theta}$. Singurul termen care conţine pe $\dot{\theta}^2$ este: $\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\right)$, ceea ce conduce la relaţia (7.4) pentru „adevărata" energie potenţială a sistemului (*energia potenţială efectivă*).

Anulând derivata întâi a acestei energii potenţiale, obţinem următoarea ecuaţie trigonometrică în θ:

$$\frac{dE_{pot}}{d\theta}=-m\omega^2b^2\sin\theta\cos\theta+mga\sin\theta=0.$$

Soluţiile acestei ecuaţii dau poziţiile de echilibru ale corpului. Avem:

$$\sin\theta\left(ga-\omega^2b^2\cos\theta\right)=0,$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases}\sin\theta=0,\\ ga-\omega^2b^2\cos\theta=0.\end{cases}$$

Din prima ecuaţie a acestui sistem rezultă aceleaşi poziţii de echilibru pe care le-am determinat la început,

$$\theta_1=0 \text{ şi } \theta_2=\pi,$$

iar a doua ecuaţie a sistemului conduce la o nouă poziţie de echilibru, dată de

$$\theta_3=\arccos\left(\frac{ga}{\omega^2b^2}\right). \tag{7.5}$$

Dacă introducem notaţia:

$$\omega_{cr}=\sqrt{\frac{ga}{b^2}}=\frac{\sqrt{ga}}{b}, \tag{7.6}$$

atunci cea de a treia poziţie de echilibru va fi dată de

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\theta_3 = \arccos\left(\omega_{cr}/\omega\right)^2. \tag{7.6'}$$

b) Pentru a determina stabilitatea pozițiilor de echilibru aflate mai sus trebuie să studiem semnul derivatei a doua a energiei potențiale efective în aceste puncte. Avem:

$$\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2} = -m\omega^2b^2\cos^2\theta + m\omega^2b^2\sin^2\theta + mga\cos\theta =$$

$$= m\omega^2b^2\left(1-2\cos^2\theta\right) + mga\cos\theta,$$

ceea ce conduce la:

i)

$$\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = -m\omega^2b^2 + mga = mga\left(1-\frac{\omega^2b^2}{ga}\right) =$$

$$= mga\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{cr}}\right)^2\right] \begin{cases} \nearrow > 0, & \omega < \omega_{cr}, \text{ (echilibru stabil);} \\ \searrow < 0, & \omega > \omega_{cr}, \text{ (echilibru instabil);} \end{cases}$$

ii)

$$\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi} = -m\omega^2b^2 - mga < 0, \quad \forall\omega \quad \text{(echilibru instabil);}$$

iii)

$$\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2} = m\omega^2b^2\left(1-2\left(\frac{ag}{\omega^2b^2}\right)^2\right) + mga\frac{ga}{\omega^2b^2} =$$

$$= m\omega^2b^2 - 2m\left(\frac{ga}{\omega b}\right)^2 + m\left(\frac{ga}{\omega b}\right)^2 = m\omega^2b^2 - m\left(\frac{ga}{\omega b}\right)^2 =$$

$$= m\omega^2b^2\left[1-\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^4\right] \begin{cases} \nearrow > 0, & \omega > \omega_{cr}, \text{ (echilibru stabil);} \\ \searrow < 0, & \omega < \omega_{cr}, \text{ (echilibru instabil).} \end{cases}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aşadar, poziţia de echilibru $\theta_1 = 0$ poate fi atât de echilibru stabil (dacă $\omega < \omega_{cr}$), cât şi instabil (dacă $\omega > \omega_{cr}$), poziţia $\theta_2 = \pi$ este totdeauna de echilibru instabil, iar poziţia intermediară de echilibru, $\theta_3 = \arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2$ poate fi, şi ea, atât de echilibru stabil (dacă $\omega > \omega_{cr}$), cât şi instabil (dacă $\omega < \omega_{cr}$).

Dacă $\omega = \omega_{cr}$, adică $\omega^2 b^2 = ga$, atunci $\theta_3 = \arccos 1 = 0 = \theta_1$, iar

$$\left.\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega(=\omega_{cr})}\right)^2} = m\omega^2 b^2\left[1-\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega(=\omega_{cr})}\right)^4\right] = 0.$$

Pentru a determina stabilitatea echilibrului dat de poziţia $\theta_3 = \theta_1 = 0$ în acest caz $(\omega = \omega_{cr})$ trebuie „să mergem mai departe" cu derivatele. Avem

$$\frac{d^3 E_{pot}}{d\theta^3} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right) = \frac{d}{d\theta}\left[m\omega^2 b^2\left(1-2\cos^2\theta\right)+mga\cos\theta\right] =$$

$$= 4m\omega^2 b^2 \sin\theta\cos\theta - mga\sin\theta = mga\sin\theta\left(\frac{4\omega^2 b^2}{ga}\cos\theta - 1\right) =$$

$$= mga\sin\theta\left[\left(\frac{2\omega}{\omega_{cr}}\right)^2\cos\theta - 1\right]$$

şi atunci

$$\left.\frac{d^3 E_{pot}}{d\theta^3}\right|_{\theta=\arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega(=\omega_{cr})}\right)^2} = \left\{mga\sin\theta\left[\left(\frac{2\omega}{\omega_{cr}}\right)^2\cos\theta - 1\right]\right\}_{\omega=\omega_{cr}} =$$

$$= mga\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega(=\omega_{cr})}\right)^4}\left[\left(2\frac{\omega(=\omega_{cr})}{\omega_{cr}}\right)^2\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega(=\omega_{cr})}\right)^2 - 1\right] = 0,$$

ceea ce arată că trebuie să calculăm şi derivata a patra. Obţinem:

$$\frac{d^4 E_{pot}}{d\theta^4} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^3 E_{pot}}{d\theta^3}\right) = \frac{d}{d\theta}\left\{mga\sin\theta\left[\left(\frac{2\omega}{\omega_{cr}}\right)^2\cos\theta - 1\right]\right\} =$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= mga\cos\theta\left[\left(\frac{2\omega}{\omega_{cr}}\right)^2\cos\theta - 1\right] - mga\left(\frac{2\omega}{\omega_{cr}}\right)^2\sin^2\theta =$$

$$= mga\left(\frac{2\omega}{\omega_{cr}}\right)^2\left(2\cos^2\theta - 1\right) - mga\cos\theta,$$

iar

$$\left.\frac{d^4E_{pot}}{d\theta^4}\right|_{\theta=\arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega(=\omega_{cr})}\right)^2} = \left[mga\left(\frac{2\omega}{\omega_{cr}}\right)^2\left(2\cos^2\theta - 1\right) - mga\cos\theta\right]_{\omega=\omega_{cr}} =$$

$$= 3mga > 0.$$

Întrucât în acest caz special, $(\omega = \omega_{cr})$, derivata a patra a energiei potențiale efective în punctul $\theta_3(=\theta_1) = 0$ este strict pozitivă, rezultă că poziția de echilibru dată de $\theta_3 = 0$ este tot de echilibru stabil, însă micile oscilații în jurul ei *nu mai sunt armonice.*

c) Evident, mici oscilații pot avea loc doar în jurul pozițiilor de echilibru stabil. După cum am văzut la punctele precedente ale problemei, pentru sistemul analizat, există două astfel de poziții de echilibru: $\theta_1 = 0$, (dacă $\omega < \omega_{cr}$) și $\theta_3 = \arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2$, (dacă $\omega > \omega_{cr}$). Principala chestiune care se pune în legătură cu o problemă de mici oscilații este determinarea perioadelor de oscilație ale modurilor normale de oscilație. Întrucât sistemul analizat are doar un singur grad de libertate, problema se simplifică foarte mult.

Pentru a determina perioada/perioadele de oscilație a/ale unui sistem fizic ce efectuează mici oscilații putem proceda în mai multe moduri. În general, dacă sistemul are mai multe grade de libertate, metoda bazată pe formalismul clasic newtonian este deosebit de greoaie, adesea chiar inaplicabilă. În acest caz, soluția problemei se poate obține mult mai ușor și elegant în cadrul formalismului lagrangean, prin „simpla" rezolvare a ecuației caracteristice a sistemului (care este o ecuație de ordinul n în ω^2, cu soluții reale și pozitive, n reprezentând numărul gradelor de libertate ale sistemului).

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În cazul sistemelor cu un singur grad de libertate (la care ne vom referi în continuare), din punct de vedere clasic, newtonian, problema poate fi rezolvată în cel puţin două moduri. Această rezolvare are la bază analogia cu cel mai simplu sistem care efectuează oscilaţii armonice liniare (unidimensionale), anume, un corp de masă m legat de un resort având constanta elastică k, ce poate oscila pe o singură direcţie. După cum se ştie, perioada micilor oscilaţii ale acestui sistem simplu este

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{7.7}$$

De fapt, acesta este unul dintre cele mai simple sisteme mecanice care se mişcă sub acţiunea unei forţe de tip elastic, $\vec{F} = -k\,\vec{x}$. Câmpul forţelor elastice este un câmp potenţial. Pentru potenţialul acestui câmp avem

$$dV = -dA = -\vec{F}\cdot d\vec{x} = k\vec{x}\cdot d\vec{x} = kx\,dx,$$

de unde,

$$V = k\int x\,dx = \frac{kx^2}{2} + V_0.$$

Dacă alegem şi aici ca „nivel" de referinţă pentru energia potenţială punctul $x = 0$ (care corespunde sistemului (resortului) nedeformat), putem scrie

$$V = \frac{kx^2}{2}. \tag{7.8}$$

O primă metodă simplă, care poate fi utilizată în cadrul formalismului newtonian pentru a determina perioada micilor oscilaţii armonice, liniare, ale unui sistem fizic oarecare este aceea pe care am putea-o numi „dinamică" şi ea presupune aflarea – pe de o parte – a forţei rezultante care acţionează asupra sistemului, şi, dacă aceasta este una „de tip elastic", adică de forma $\vec{F} = -K\vec{\xi}$, unde $\vec{\xi}$ este „elongaţia" mişcării, atunci ea permite determinarea „constantei elastice" K (mărime specifică sistemului, analoagă/corespunzătoare lui k din expresia $\vec{F} = -k\,\vec{x}$) şi – pe de altă parte – a acceleraţiei rezultante a sistemului care, pe baza relaţiei fundamentale a dinamicii, $\vec{F} = M\vec{a} = M\ddot{\vec{\xi}}$, permite determinarea „masei"

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

M (mărime specifică sistemului, analoagă/corespunzătoare masei m a corpului legat de resortul de constantă elastică k).

Atunci, prin analogie cu relaţia (7.7), perioada micilor oscilaţii efectuate de sistem va fi

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}. \tag{7.9}$$

O a doua metodă newtoniană, simplă, de determinare a perioadei de oscilaţie a unui sistem fizic (pe care am putea-o numi „energetică") implică determinarea energiilor cinetică şi potenţială ale sistemului care efectuează mici oscilaţii. Dacă aceste mărimi au forma:

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2$$

şi respectiv

$$E_p = \frac{1}{2}K\xi^2,$$

unde ξ are aceeaşi semnificaţie ca mai sus, atunci, prin analogie cu relaţia (7.7), perioada micilor oscilaţii ale sistemului va fi dată, de asemenea, de relaţia (7.9).

În cele ce urmează vom expune o metodă – pe cât de simplă, pe atât de eficientă – de determinare a perioadei de oscilaţie a unui sistem fizic oarecare (care efectuează mici oscilaţii armonice liniare) şi care are un singur grad de libertate, în cadrul formalismului lagrangean. Pentru a înţelege cât mai uşor esenţa metodei ne vom referi la acelaşi sistem simplu, utilizat mai sus în cadrul formalismului newtonian. Potenţialul sistemului a fost deja determinat (vezi relaţia (7.8)), iar energia cinetică a sistemului este

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

coordonata carteziană x fiind chiar coordonata generalizată asociată singurului grad de libertate al sistemului. Atunci, lagrangeanul sistemului va fi

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Ecuaţia Lagrange de speţa a II-a corespunzătoare sistemului este

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITAR IBRARY

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

care, efectuând derivatele, devine

$$m\ddot{x}+kx=0,$$

sau, dacă introducem notaţia $\omega_0^2=k/m$,

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0,$$

care este binecunoscuta ecuaţie a oscilatorului liniar armonic. După cum se ştie, soluţia acestei ecuaţii poate fi scrisă cel puţin în patru moduri (vezi problema pendulului simplu), iar perioada mişcării oscilatorii este

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Fie acum un sistem fizic cu un singur grad de libertate, a cărui mişcare este, deocamdată, necunoscută. Dacă notăm cu ξ coordonata generalizată asociată singurului grad de libertate al sistemului, şi dacă lagrangeanul sistemului are forma

$$L=A\dot{\xi}^2-B\xi^2, \tag{7.10}$$

unde A şi B sunt două constante reale, nenule, de acelaşi semn, atunci ecuaţia Lagrange de speţa a II-a asociată se scrie:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \xi}=0,$$

care, ţinând cont de (7.10), devine

$$A\ddot{\xi}+B\xi=0,$$

sau, dacă notăm raportul B/A cu Ω_0^2,

$$\ddot{\xi}+\Omega_0^2\xi=0.$$

După cum se poate constata, am obţinut aceeaşi ecuaţie a oscilatorului liniar armonic, a cărui perioadă de oscilaţie este, în acest caz,

$$\tau=\frac{2\pi}{\Omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{A}{B}}. \tag{7.11}$$

În concluzie, dacă un sistem fizic cu un singur grad de libertate are lagrangeanul de forma (7.10), atunci acesta va avea o mişcare oscilatorie armonică, cu perioada dată de relaţia (7.11). Un lagrangean de tipul (7.10)

BCU IAŞI / CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY

se numeşte *lagrangean al micilor oscilaţii* pentru un sistem fizic cu un singur grad de libertate.

Aşadar, pentru a determina perioada micilor oscilaţii ale sistemului nostru (corpul de masă m care se mişcă fără frecare pe elipsă) va trebui să aflăm mai întâi lagrangeanul micilor oscilaţii al sistemului. Lagrangeanul „general" al sistemului a fost deja determinat şi este dat de relaţia (7.3):

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\right)+\frac{1}{2}m\omega^2b^2\sin^2\theta+mga\cos\theta\,.$$

Pentru a găsi lagrangeanul micilor oscilaţii al sistemului putem proceda în două feluri, pornind de la expresia generală de mai sus a acestuia. Ca să realizăm acest lucru, să presupunem că sistemul (corpul de masă m) efectuează mici oscilaţii în jurul unei poziţii de echilibru stabil dată de $\theta_{e.s.}$ (vezi Fig. VII.2). În Fig. VII.2, cu ξ am notat elongaţia mişcării oscilatorii,

$$\xi=\theta-\theta_{e.s.}\,, \qquad (7.12)$$

(unde $\theta_{e.s.}=const.$) care, ţinând cont că oscilaţiile sunt mici, satisface relaţia[4]

$$\mathcal{O}\left(\xi^3\right)=0\,.$$

Legea mişcării oscilatorii poate fi scrisă sub forma

$$\xi=\xi_{\max}\sin\left(\Omega_o t+\varphi_o\right),$$

unde constantele $\xi_{\max}$ (amplitudinea mişcării oscilatorii armonice) şi φ_o (faza iniţială a mişcării) pot fi determinate din

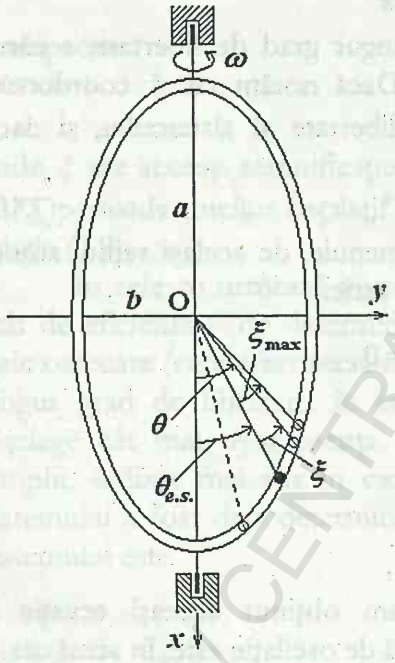


Fig. VII.2

[4] Observăm că, spre deosebire de situaţiile obişnuite în care aproximaţia cere ca $O(\xi^2)=0$, aici trebuie să luăm în consideraţie şi termenii pătratici în variabila mică ξ, în acord cu expresia (7.10) a lagrangeanului micilor oscilaţii. De aceea, aproximaţia cerută în acest caz este $O(\xi^3)=0$.

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

condiţiile iniţiale, $\xi_o = \xi(t=0)$ şi $\dot{\xi}_o = \dot{\xi}(t=0)$.

Cele două posibilităţi de a obţine lagrangeanul micilor oscilaţii pentru sistemul analizat sunt următoarele:

1. se exprimă unghiul θ din relaţia (7.12) în funcţie de noua variabilă ξ,
$$\theta = \theta_{e.s.} + \xi$$
şi se introduce în expresia (7.3) a lagrangeanului problemei, după care se dezvoltă expresia obţinută, $L = L(\xi)$, în serie Mac-Laurin după variabila ξ (în jurul valorii $\xi = 0$), reţinându-se doar termenii care conţin toate puterile lui ξ, până la puterea a doua inclusiv;
2. se dezvoltă direct expresia (7.3) a lagrangeanului în serie Taylor după variabila θ, în jurul valorii $\theta = \theta_{e.s.}$, şi se reţin doar termenii care conţin toate puterile lui $(\theta - \theta_{e.s.}) = \xi$, până la puterea a doua inclusiv.

Vom utiliza cea de a doua cale, nu înainte de a observa (lucru foarte important de altfel) că lagrangeanul general al sistemului poate fi scris sub forma:

$$L = E_{cin} - E_{pot}.$$

Atunci, dezvoltarea în serie Taylor a lui L implică de fapt dezvoltarea după variabila θ, în jurul valorii $\theta = \theta_{e.s.}$, a expresiilor energiei cinetice E_{cin} şi energiei potenţiale E_{pot}. Începând cu termenul al doilea, avem:

$$E_{pot}(\theta) = E_{pot}(\theta_{e.s.}) + \frac{1}{1!}\left.\frac{dE_{pot}}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.}) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.})^2 +$$

$$+ \mathcal{O}\left[(\theta - \theta_{e.s.})^3\right] \cong E_{pot}(\theta_{e.s.}) + \left.\frac{dE_{pot}}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.}) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.})^2 = E_{pot}(\theta_{e.s.}) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{e.s.}} \xi^2,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde am ţinut cont de faptul că derivata de ordinul întâi a energiei potenţiale în punctul $\theta = \theta_{e.s.}$ se anulează,

$$\left.\frac{dE_{pot}}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{e.s.}} = 0,$$

conform definiţiei punctelor de echilibru (de orice fel – stabil sau instabil).

În ceea ce priveşte primul termen, avem:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m\, \dot{\theta}^2 \left(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta\right) = \frac{1}{2} m\, \dot{\xi}^2 \left(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta\right) =$$

$$= E_{cin}(\theta) = E_{cin}(\theta_{e.s.}) + \frac{1}{1!}\left.\frac{dE_{cin}}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.}) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2E_{cin}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.})^2 +$$

$$+ \mathcal{O}\left[(\theta - \theta_{e.s.})^3\right] \cong E_{cin}(\theta_{e.s.}),$$

deoarece, deja termenul:

$$\frac{1}{1!}\left.\frac{dE_{cin}}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{e.s.}} (\theta - \theta_{e.s.}) = \frac{1}{1!}\left.\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 \left(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta\right)\right]\right|_{\theta=\theta_{e.s.}} \xi$$

conţine un factor de ordinul trei în ξ, anume $\dot{\xi}^2\xi$. Aşadar, din expresia energiei cinetice rămâne doar primul termen din dezvoltarea în serie Taylor, adică,

$$E_{cin}(\theta) = E_{cin}(\theta_{e.s.}) = \frac{1}{2} m\, \dot{\xi}^2 \left(a^2 \sin^2\theta_{e.s.} + b^2 \cos^2\theta_{e.s.}\right) \equiv E_{cin}\left(\dot{\xi}\right).$$

Deoarece termenul $E_{pot}(\theta_{e.s.})$ poate fi omis în expresia lagrangeanului (fiind o constantă, ceea ce face ca cei doi lagrangeeni – cel care conţine pe $E_{pot}(\theta_{e.s.})$ şi cel care nu conţine acest termen – să fie echivalenţi), pentru lagrangeanul micilor oscilaţii, $L_{m.o.}$, va rezulta următoarea expresie:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$L_{m.o.} = E_{cin}(\theta) - E_{pot}(\theta) = \frac{1}{2} m\left(a^2 \sin^2 \theta_{e.s.} + b^2 \cos^2 \theta_{e.s.}\right)\dot{\xi}^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\bigg|_{\theta=\theta_{e.s.}} \xi^2 \equiv L\left(\xi, \dot{\xi}\right) = A\dot{\xi}^2 - B\xi^2,$$

unde

$$A = \frac{1}{2} m\left(a^2 \sin^2 \theta_{e.s.} + b^2 \cos^2 \theta_{e.s.}\right) = const. > 0$$

şi

$$B = \frac{1}{2}\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\bigg|_{\theta=\theta_{e.s.}} = const. > 0.$$

Conform relaţiei (7.11), perioada micilor oscilaţii armonice ale sistemului va fi

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m\left(a^2 \sin^2 \theta_{e.s.} + b^2 \cos^2 \theta_{e.s.}\right)}{\dfrac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\bigg|_{\theta=\theta_{e.s.}}}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{m\left(a^2 \sin^2 \theta_{e.s.} + b^2 \cos^2 \theta_{e.s.}\right)}{\left[m\omega^2 b^2\left(1 - 2\cos^2 \theta\right) + mga\cos\theta\right]_{\theta=\theta_{e.s.}}}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \theta_{e.s.} + b^2 \cos^2 \theta_{e.s.}}{\omega^2 b^2\left(1 - 2\cos^2 \theta_{e.s.}\right) + ga\cos\theta_{e.s.}}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\dfrac{1}{\omega^2}\dfrac{a^2}{b^2}\sin^2 \theta_{e.s.} + \dfrac{1}{\omega^2}\cos^2 \theta_{e.s.}}{1 - 2\cos^2 \theta_{e.s.} + \left(\dfrac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2 \cos\theta_{e.s.}}} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{\left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right)\cos^2 \theta_{e.s.} + \dfrac{a^2}{b^2}}{1 - 2\cos^2 \theta_{e.s.} + \left(\dfrac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2 \cos\theta_{e.s.}}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - e^2}} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \theta_{e.s.}}{1 - 2\cos^2 \theta_{e.s.} + \left(\dfrac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2 \cos\theta_{e.s.}}}, \qquad (7.13)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

este excentricitatea elipsei.

Pentru cele două poziții de echilibru stabil determinate la punctele a) și b) ale problemei, $\theta_1=0$, (dacă $\omega<\omega_{cr}$) și $\theta_3=\arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2$, (dacă $\omega>\omega_{cr}$), avem,

$$\tau_1=\tau\big|_{\theta_{e.s.}=0}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\frac{1-e^2}{\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_{cr}^2-\omega^2}},\ \text{cu}\ \omega<\omega_{cr} \tag{7.14}$$

și

$$\tau_2=\tau\big|_{\theta_{e.s.}=\arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\frac{1-e^2\cos^2\theta_{e.s.}}{1-2\cos^2\theta_{e.s.}+\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2\cos\theta_{e.s.}}}=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\frac{1-e^2\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^4}{1-2\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^4+\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^4}}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\frac{1-e^2\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^4}{1-\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^4}}, \tag{7.15}$$

cu $\omega>\omega_{cr}$.

În fine, dacă $\omega\to\infty$, din $\theta_3=\arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2$ (ca poziție de echilibru stabil dacă $\omega>\omega_{cr}$), obținem o nouă poziție de echilibru stabil, dată de

$$\theta_4=\lim_{\omega\to\infty}\theta_3=\lim_{\omega\to\infty}\left[\arccos\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2\right]=\arccos 0=\frac{\pi}{2}, \tag{7.16}$$

ceea ce este în concordanță cu analiza calitativă făcută la început.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Perioada micilor oscilaţii efectuate în jurul acestei poziţii de echilibru stabil va fi

$$\tau_3 = \tau\big|_{\theta_{e.s.}=\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \tau_o \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{7.17}$$

unde am utilizat notaţia evidentă: $\tau_o \overset{not.}{=} \frac{2\pi}{\omega}$.

În cazul în care elipsa degenerează într-un cerc $(e=0)$, obţinem

$$\tau_3 = \tau\big|_{\theta_{e.s.}=\frac{\pi}{2}} = \tau_o . \tag{7.18}$$

B) Cazul sistemului de referinţă neinerţial (SRNI)

a) Pentru a determina poziţiile de echilibru ale corpului de masă m vom utiliza aceeaşi condiţie de anulare a derivatei întâi a energiei potenţiale a corpului. Ca şi sistem de referinţă neinerţial putem considera un reper care este solidar legat de corpul aflat în mişcare. Spre deosebire de cazul sistemului de referinţă inerţial, un observator aflat în sistemul de referinţă neinerţial considerat va sesiza că asupra corpului acţionează, pe lângă forţa de greutate şi forţa centrifugă, care este şi trebuie să fie considerată o forţă aplicată. Aşadar, pentru a determina potenţialul câmpului forţei aplicate rezultante, va trebui să considerăm şi contribuţia forţei centrifuge, $\vec{F}_{cf}$. Avem

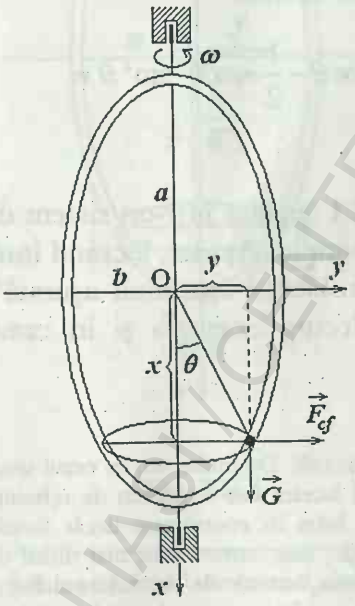


Fig. VII.3

$$dV = -dA = -\left(\vec{G}\cdot d\vec{r} + \vec{F}_{cf}\cdot d\vec{r}\right), \tag{7.19}$$

unde $\vec{F}_{cf}$ are direcţia perpendiculară pe axa de rotaţie şi sensul dinspre axa de rotaţie înspre „exterior" (vezi Fig. VII.3). Pentru a uşura efectuarea produselor scalare din relaţia (7.19) vom exprima pe componente vectorii care apar în ea.

BCU IAŞI - CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Ţinând cont de orientarea relativă a vectorilor $\vec{G}$, $\vec{F}_{cf}$ şi $d\vec{r}$ faţă de axele de coordonate din Fig. VII.3, putem scrie:

$$\vec{G} = (mg,\ 0,\ 0),\ \vec{F}_{cf} = (0,\ m\omega^2 y,\ 0),\ d\vec{r} = (dx,\ dy,\ dz)$$

şi atunci, relaţia (7.19) devine

$$dV = -mgdx - m\omega^2 y\, dy,$$

de unde, prin integrare nedefinită, obţinem:

$$V = -mgx - \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + V_0. \qquad (7.20)$$

Se observă că potenţialul nu depinde explicit de timp, ceea ce înseamnă că el coincide chiar cu energia potenţială a sistemului. Constanta arbitrară de integrare V_0 din relaţia (7.20) se determină prin alegerea convenabilă a nivelului de referinţă pentru energia potenţială. Evident, cel mai convenabil este ca $V_0 = 0$. Acest lucru are loc dacă

$$V(x=0,\ y=0) = 0.$$

Cu această alegere, energia potenţială a corpului devine:

$$V = V(x,\ y) = -mgx - \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 = -mga\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 \sin^2\theta =$$
$$= V(\theta) \equiv E_{pot}(\theta),$$

adică am obţinut acelaşi rezultat ca şi în cazul I (analiza într-un sistem de referinţă inerţial), însă mult mai direct şi mai simplu. Aşadar, lucrând într-un sistem de referinţă neinerţial, rezolvarea problemei este mult uşurată[5]. De aici încolo raţionamentele şi calculele decurg exact ca şi în cazul sistemului de referinţă inerţial.

[5] Atragem atenţia cititorilor că aceasta nu este o regulă generală. De multe ori, în cazul unor probleme dificile (complicate) este mult mai convenabil să lucrăm într-un sistem de referinţă inerţial, deoarece aici lucrurile sunt clare (nu trebuie să luăm în considerare decât forţele newtoniene, aplicate în mod efectiv, nu şi forţele de inerţie, care, uneori sunt mai dificil de identificat şi „mânuit"). Lucrul într-un referenţial neinerţial este, într-adevăr, de multe ori foarte util, căci, ca şi în cazul de faţă, poate conduce mult mai rapid la rezultatul problemei, însă necesită din partea rezolvitorului o anumită experienţă şi o anumită „îndemânare" în lucrul cu forţele de inerţie.

2. Un punct material greu P de masă m, încărcat electric cu sarcina q se poate mişca fără frecare în interiorul unui tub îndoit sub formă de elipsă, care se roteşte în vid în jurul axei mari cu viteza unghiulară constantă ω (vezi Fig. VII.4). În punctul cel mai de jos al elipsei se află fixată o sarcină electrică q'. Să se determine:

d) poziţiile de echilibru ale punctului material cu sarcina electrică q;

e) stabilitatea acestor poziţii de echilibru şi

f) perioada micilor oscilaţii efectuate de punctul material în jurul poziţiilor de echilibru stabil.

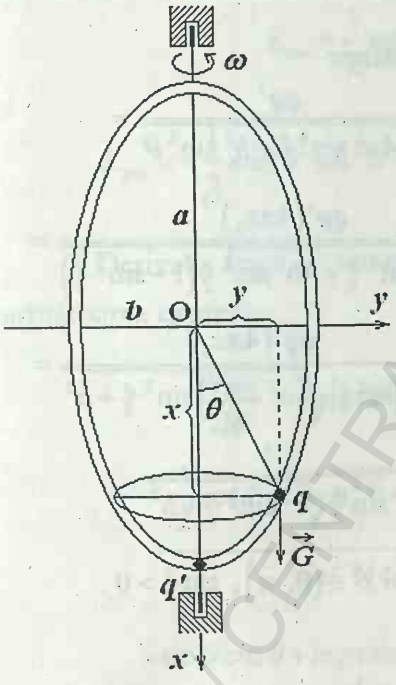


Fig. VII.4

Rezolvare

Întrucât această problemă este asemănătoare celei precedente, nu vom relua aici întreaga discuţie efectuată deja acolo, ci ne vom restrânge consideraţiile doar asupra aspectelor specifice cazului de faţă. Astfel, principala deosebire între cele două probleme este apariţia forţei electrostatice, care acţionează asupra particulei ale cărei poziţii de echilibru trebuie să le determinăm. De asemenea, facem de la bun început precizarea că vom neglija eventualele efecte magnetice, care pot apărea în sistem ca urmare a mişcării particulei cu sarcina electrică[6] q.

Vom lucra doar în sistemul de referinţă inerţial al laboratorului. Forţa electrostatică dintre cele două sarcini elec -

[6] Este ştiut faptul că o sarcină electrică q în mişcare circulară uniformă cu viteza unghiulară ω pe un cerc cu raza constantă r este echivalentă cu un curent electric $i = q\omega/2\pi$, ce produce o „foiţă magnetică" cu un moment magnetic dipolar $|\vec{\mu}| = qr^2\omega/2$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

trice îşi va manifesta efectul doar asupra energiei potenţiale. Deoarece câmpul forţelor electrostatice este tot un câmp potenţial (chiar conservativ) de forţe, la fel ca şi câmpul gravitaţional, sistemul rămâne unul natural. Energia cinetică a punctului material cu sarcina electrică q este aceeaşi ca în problema precedentă,

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\right)+\frac{1}{2}m\omega^2b^2\sin^2\theta,$$

iar la energia potenţială gravitaţională

$$V_g=-mga\cos\theta$$

trebuie să adunăm contribuţia de tip electrostatic

$$V_{el}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{\sqrt{4a^2\sin^4\frac{\theta}{2}+b^2\sin^2\theta}}=$$

$$=\frac{qq'(4\pi\varepsilon_0)^{-1}}{\sqrt{4a^2\sin^4\frac{\theta}{2}+4b^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{qq'(4\pi\varepsilon_0)^{-1}}{\sqrt{4a^2\sin^4\frac{\theta}{2}+4b^2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}}=$$

$$=\frac{qq'(4\pi\varepsilon_0)^{-1}}{\sqrt{4a^2\sin^4\frac{\theta}{2}+4b^2\sin^2\frac{\theta}{2}-4b^2\sin^4\frac{\theta}{2}}}=\frac{qq'(4\pi\varepsilon_0)^{-1}}{2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\sqrt{\left(a^2-b^2\right)\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2}}=$$

$$=\frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2}}=\frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2}},$$

unde am ţinut cont de faptul că pe intervalul $\theta\in(0,\ \pi]$, $\sin\frac{\theta}{2}>0$.

Atunci, lagrangeanul problemei este

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\right)+\frac{1}{2}m\omega^2b^2\sin^2\theta+$$

$$+mga\cos\theta-\frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2}}$$

şi se observă că nu depinde explicit de timp. Acest lucru înseamnă că ecuaţiile Lagrange de speţa a II-a admit integrala primă

$$\dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = const.,$$

această constantă fiind chiar energia totală a corpului, care se conservă. Avem deci,

$$const. = E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right) -$$

$$-\frac{1}{2}m\omega^2 b^2\sin^2\theta - mga\cos\theta + \frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2}}.$$

De aici, prin identificare[7], rezultă:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)$$

şi

$$E_{pot} = -\frac{1}{2}m\omega^2 b^2\sin^2\theta - mga\cos\theta + \frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2}}. \quad (7.21)$$

Derivata întâi a energiei potenţiale a sistemului, $E_{pot}(\theta)$, are următoarea expresie:

$$\frac{dE_{pot}}{d\theta} = -m\omega^2 b^2\sin\theta\cos\theta + mga\sin\theta - \frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\times$$

$$\times\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2} + \frac{c^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sqrt{c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2}}}{\sin^2\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)} = -m\omega^2 b^2\times$$

$$\times\sin\theta\cos\theta + mga\sin\theta - \frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\frac{2c^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+b^2\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{3/2}}.$$

Soluţiile ecuaţiei $\frac{dE_{pot}}{d\theta} = 0$, adică

[7] Termenii care conţin o viteză generalizată (care este derivata totală în raport cu timpul a unei coordonate generalizate) la pătrat sunt termeni de energie cinetică „veritabilă", toţi ceilalţi termeni reprezentând energia potenţială „efectivă" a sistemului.

BUJIAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$m\omega^2 b^2 \sin\theta\cos\theta - mga\sin\theta + \frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\frac{2c^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+b^2\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{3/2}}=0,$$

dau pozițiile de echilibru ale corpului. Avem:

$$m\omega^2 b^2 \sin\theta\cos\theta - mga\sin\theta + \frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\frac{2c^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+b^2\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{3/2}}=$$

$$=\sin\theta\left[m\omega^2 b^2\cos\theta - mga + \frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\frac{2c^2\sin\frac{\theta}{2}+b^2\csc\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{3/2}}\right]=0,$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases}\sin\theta=0,\\ m\omega^2 b^2\cos\theta - mga + \dfrac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{2c^2\sin\frac{\theta}{2}+b^2\csc\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{3/2}}=0.\end{cases}$$

Din prima ecuație a acestui sistem rezultă pozițiile de echilibru

$$\theta_1^{(1)}=0 \text{ și } \theta_2^{(1)}=\pi,$$

dintre care doar a doua este acceptabilă fizic, iar a doua ecuație a sistemului se mai scrie:

$$8k\,m\sin^3\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{3/2}\left(\omega^2 b^2\cos\theta - ga\right)+qq'\left(2c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)=0, \tag{7.22}$$

unde am folosit notația $k \overset{not.}{=} 4\pi\varepsilon_0$. Ținând cont de egalitatea $\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$, ecuația (7.22) devine

$$8k\,m\sin^3\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{3/2}\left[\omega^2 b^2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-ga\right]+$$
$$+qq'\left(2c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)=0,$$

sau,

$$64k^2m^2\sin^6\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^3\left[ga-\omega^2 b^2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right]^2-$$
$$-(qq')^2\left(2c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^2=0, \tag{7.23}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care este o ecuaţie trigonometrică în necunoscuta $0<\theta\le\pi$. Aşadar, trebuie să determinăm soluţiile reale $\theta_i^{(2)}$ $(i=1,\ 2,...)$ cuprinse în intervalul $(0,\ \pi]$ ale ecuaţiei (7.23). Această ecuaţie nu poate fi rezolvată analitic, singura soluţie fiind rezolvarea ei numerică. Chiar şi în acest caz rezolvarea este extrem de dificilă, datorită multitudinii valorilor pe care le pot lua mărimile constante care intervin, anume, a, b, q, q', m şi ω.

Să observăm mai întâi faptul că soluţiile ecuaţiei (7.23) nu sunt afectate se semnele celor două sarcini electrice. Deoarece discuţia în cazul general este extrem de complicată, ne vom restrânge atenţia doar asupra analizei după valorile pe care le pot lua masa m a particulei cu sarcina electrică q şi viteza unghiulară de rotaţie a elipsei, ω. În acest scop vom utiliza soft-ul specializat în calcule analitice şi numerice Mathematica 4.0. Principala dificultate constă în a determina acele valori ale lui ω pentru care ecuaţia (7.23) admite soluţii reale $\theta_i^{(2)}$ $(i=1,\ 2,...)$ cuprinse în intervalul $\theta_i^{(2)}\in(0,\ \pi]$. Mathematica 4.0 oferă însă o modalitate simplă de a rezolva această problemă, utilizând reprezentarea grafică a dependenţei dintre ω (privită ca variabilă independentă sau, mai bine spus, ca parametru) şi θ (privită ca variabila dependentă), dependenţă care este dată sub formă implicită, prin intermediul ecuaţiei (7.23). Prezentăm mai jos rezultatele pentru o serie de valori semnificative ale masei m şi vitezei unghiulare ω. Pentru calculele concrete am considerat următoarele valori numerice pentru mărimile constante care intervin: $k=4\pi\varepsilon_0=10^{-9}/9$; $a=0{,}2\ m$; $b=0{,}15\ m$; $q=10^{-3}C$ şi $q'=5\cdot10^{-3}C$.

1) $m=1\ \mu g=10^{-6}kg$

Liniile de comandă care permit reprezentarea grafică a dependenţei (date sub formă implicită) dintre ω şi θ sunt următoarele:

```
Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];
```

BCU "I. GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI LIBRARY

```
k = 10^-9/9;
a = 0.2;
b = 0.15;
c = Sqrt[a^2-b^2];
g = 9.8;
m = 0.000001;
q = 10^-3;
q1 = 5*10^-3;

NSolve[64*k^2*m^2*(Sin[Theta/2]^2)^3*(c^2*(Sin[Theta/2]^2)+b^2)^3
*(g*a - ω^2*b^2*(1 - 2*(Sin[Theta/2]^2)))^2 - (q*q1)^2*(2*c^2*
(Sin[Theta/2]^2) + b^2)^2 == 0, Theta];

Plot[Evaluate[ Theta /. %], {ω, 1000000, 30000000}]
```

iar dependența $\theta = \theta(\omega)$ este reprezentată grafic în Fig. VII.5.

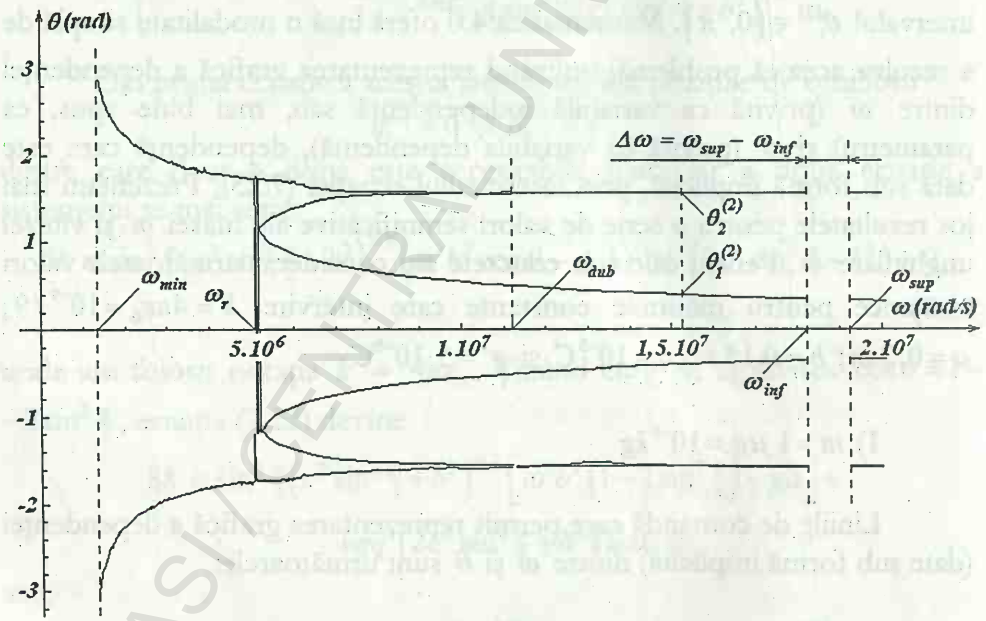


Fig. VII.5

După cum se poate observa din Fig. VII.5, există o valoare minimă a vitezei unghiulare $\omega = \omega_{\min}$, sub care ecuația nu are nici o soluție reală.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Această valoare poate fi determinată observând că pentru $\omega \to \omega_{min}$, $\theta^{(2)} \to \pi$. Rezolvând atunci ecuaţia (7.23) pentru $\theta = \pi$, cu ajutorul liniilor de comandă de mai jos, se găseşte valoarea $\omega_{min} = 1340475,662\ rad/s$:

```
64*k^2*m^2*(Sin[Pi/2]^2)^3*(c^2*(Sin[Pi/2]^2)+b^2)^3*(g*a-ω^2*
b^2*(1-2*(Sin[Pi/2]^2)))^2-(q*q1)^2*(2*c^2*(Sin[Pi/2]^2)+b^2)^2 // N
```

care furnizează ecuaţia:

$$-8.265625000000007 \times 10^{-14} + 5.056790123456793 \times 10^{-35} \left(1.9600000000000002 + 0.0225\,\omega^2\right)^2 = 0$$

şi care, rezolvată,

```
Solve[-8.265625000000007`*^-14+5.056790123456793`*^-35
(1.9600000000000002`+0.0225`ω^2)^2==0, ω]
```

dă soluţiile:

```
{{ω → -1.3404756618129585`*^6},{ω → 0.`-1.3404756618779437`*^6i},
{ω → 0.`+1.3404756618779437`*^6i},{ω → +1.3404756618129585`*^6}}
```

singura soluţie acceptabilă în cazul nostru fiind $\omega_{min} = 1340475,662$.

Se mai observă că, începând cu o valoare situată aproximativ în jurul lui $\omega_r \approx 5,067 \times 10^6\ rad/s$ (vezi Fig. VII.5 şi, mai detaliat, Fig. VII.7) variaţia lui θ cu ω devine mult mai rapidă. De la această valoare în sus analiza trebuie făcută pe domenii de variaţie mult mai înguste ale lui ω. De asemenea, se observă că apar şi domenii aparent[8] „vide" de soluţii numerice reale ca acela evidenţiat în Fig. VII.5 şi situat între valorile ω_{inf} şi ω_{sup} ale vitezei unghiulare. În plus, observăm că de la valoarea $\omega = \omega_{dub}$ în sus, în domeniul valorilor pozitive ale lui θ, graficul „se regularizea-

[8] Apariţia acestor domenii se datorează utilizării operaţiei de inversare a funcţiilor în cadrul instrucţiunii „Solve", ceea ce are ca efect posibilitatea nedeterminării (omiterii) unor soluţii numerice. Pentru a vedea mai exact care este situaţia în aceste regiuni trebuie să studiem existenţa eventualelor poziţii de echilibru nedeterminate (omise) ale sistemului, din aproape în aproape, pe domenii de variaţie ale lui ω mult mai restrânse.

BUCUREŞTI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

ză/stabilizează", în afara domeniilor „vide" de soluţii reale având câte două valori/soluţii, θ_1^2 (care tinde asimptotic la zero pe măsură ce ω creşte) şi θ_2^2 (care tinde asimptotic la $\pi/2$ pe măsură ce ω creşte) (vezi Fig. VII.6) pentru fiecare valoare a lui $\omega > \omega_{dub}$. Deci, în acest domeniu există două poziţii de echilibru ale particulei, date de $\theta_1^{(2)}$ şi $\theta_2^{(2)}$.

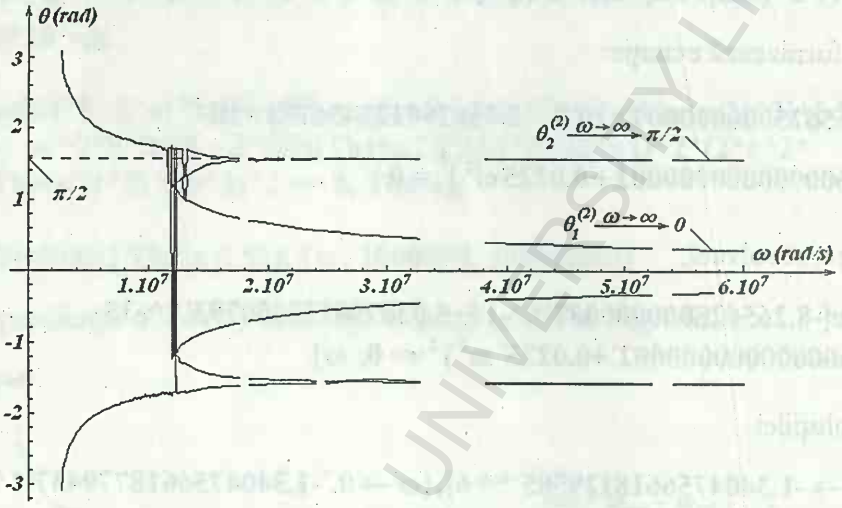


Fig. VII.6

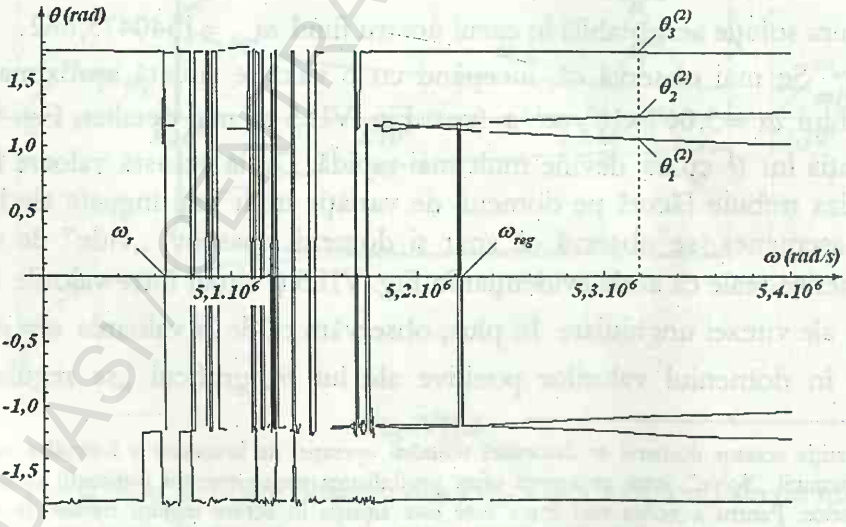


Fig. VII.7

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În domeniul de variaţie foarte rapidă (situat între valorile $\omega_r \approx 5,067\times10^6 rad/s$ şi ω_{reg}) (vezi Fig. VII.7, în care este reprezentată dependenţa $\theta = \theta(\omega)$ pentru un interval „îngust" de variaţie a lui ω, situat între valorile $\omega_1 = 5\times10^6 rad/s$ şi $\omega_2 = 5,4\times10^6 rad/s$) studiul poziţiilor de echilibru ale sistemului trebuie făcut „punctual". Acest „punctual" înseamnă de fapt că trebuie să analizăm dependenţa $\theta = \theta(\omega)$ pe intervale şi mai mici de variaţie ale vitezei unghiulare ω. De exemplu, dacă vom considera intervalul

$$\omega \in \left[5,12225\times10^6,\ 5,12250\times10^6\right] rad/s,$$

se observă că graficul devine „curat", evidenţiind două soluţii ale ecuaţiei (7.23) şi, în consecinţă, două poziţii de echilibru pentru particulă (vezi Fig. VII.8). De asemenea, din Fig. VII.7 observăm că există intervale pe care avem trei poziţii de echilibru, $\theta_1^{(2)}$, $\theta_2^{(2)}$ şi $\theta_3^{(2)}$ (pe lângă cea determinată prin calcul analitic şi dată de $\theta_2^{(1)} = \pi$).

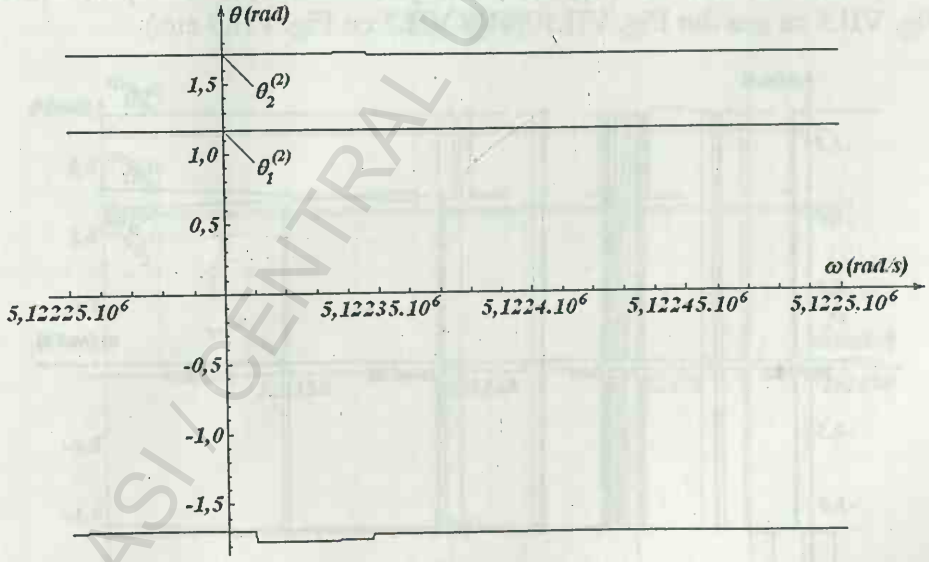


Fig. VII.8

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2) $m = 1\,g = 10^{-3}\,kg$

Urmând aceeaşi cale cu cea utilizată în cazul precedent, pentru $\omega_{\min}$ se obţine valoarea $\omega_{\min} = 42389{,}561\,rad/s$; deci, dacă $\omega < \omega_{\min}$ sistemul nu are nici o poziţie de echilibru suplimentară (pe lângă cea determinată analitic, $\theta_2^{(1)} = \pi$), acest lucru reieşind şi din Fig. VII.10, în care este reprezentată grafic dependenţa $\theta = \theta(\omega)$ pe un domeniu foarte larg de variaţie a vitezei unghiulare ω. După cum se poate constata din această reprezentare grafică, nu există deosebiri majore (calitativ vorbind) între acest caz şi cel precedent; şi aici apare o viteză unghiulară limită, $\omega_{\min}$, intervale aparent „vide" de soluţii reale, domenii cu două şi respectiv trei valori ale lui θ pentru o aceeaşi valoare a lui ω etc. Aşadar, întreaga analiză se face în aceeaşi manieră ca pentru $m = 10^{-6}\,kg$. Ceea ce diferă totuşi faţă de situaţia precedentă este ordinul de mărime al valorilor lui ω, pentru care apar comportări net diferite în ceea ce priveşte numărul de poziţii de echilibru ale sistemului. Acest lucru se poate observa cu uşurinţă comparând reprezentările grafice corespunzătoare (de exemplu, cea din Fig. VII.5 cu cea din Fig. VII.10, Fig. VII.7 cu Fig. VII.9 etc.)

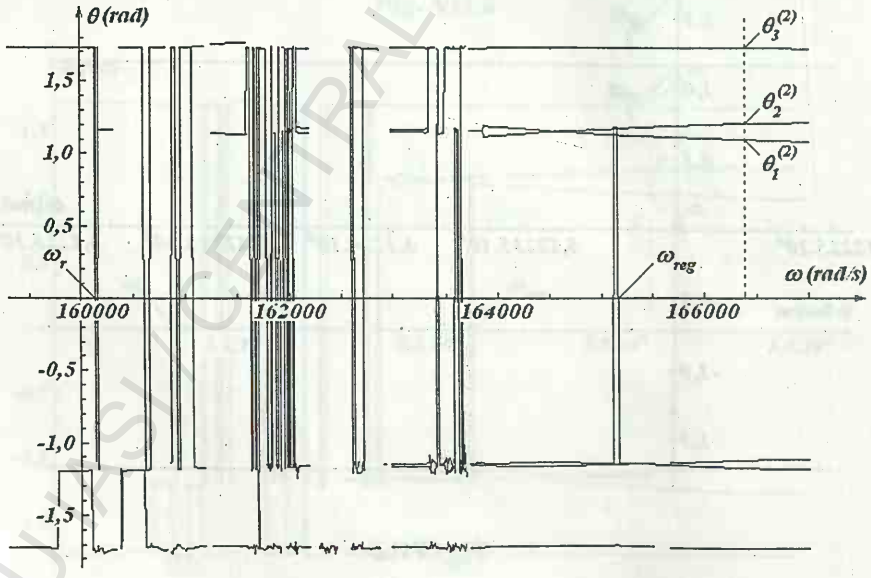


Fig. VII.9

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Putem astfel constata că o creştere cu trei ordine de mărime a masei a produs o reducere corespunzătoare cu două ordine de mărime a vitezei unghiulare.

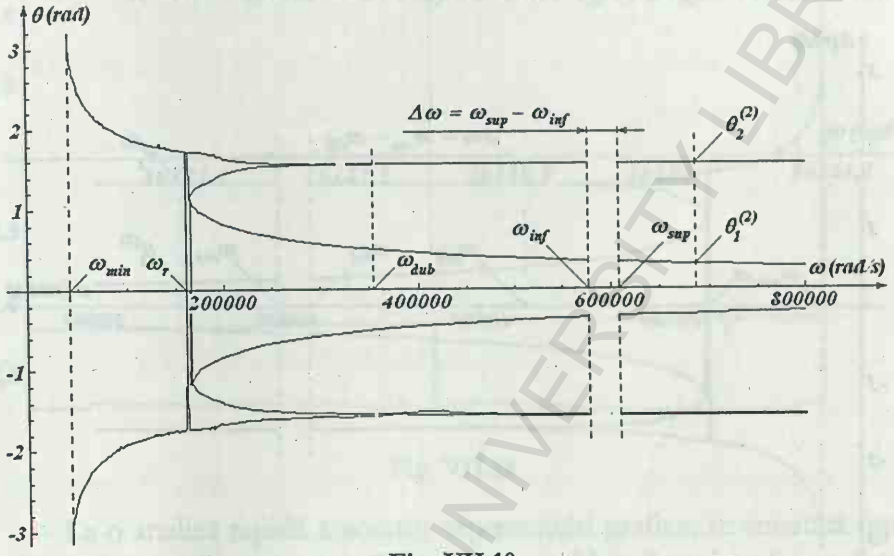


Fig. VII.10

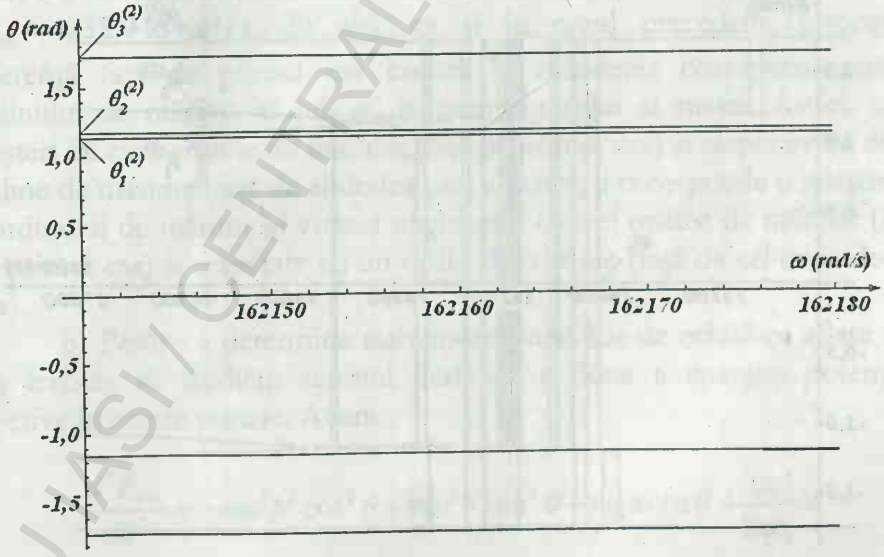


Fig. VII.11

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3) $m = 100g = 10^{-1} kg$

În acest caz, reprezentările grafice corespunzătoare sunt date în următoarele trei figuri (Fig. VII.12, Fig. VII.13 și Fig. VII.14).

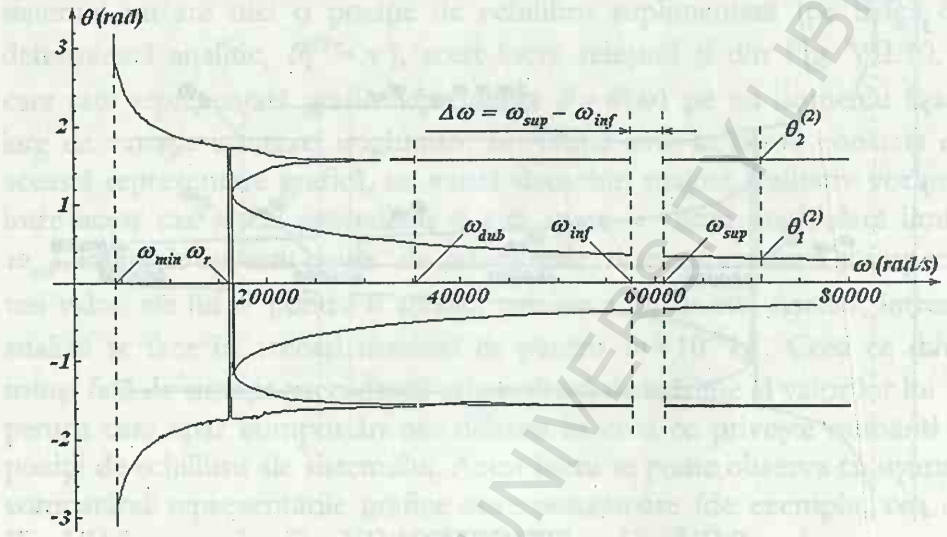


Fig. VII.12

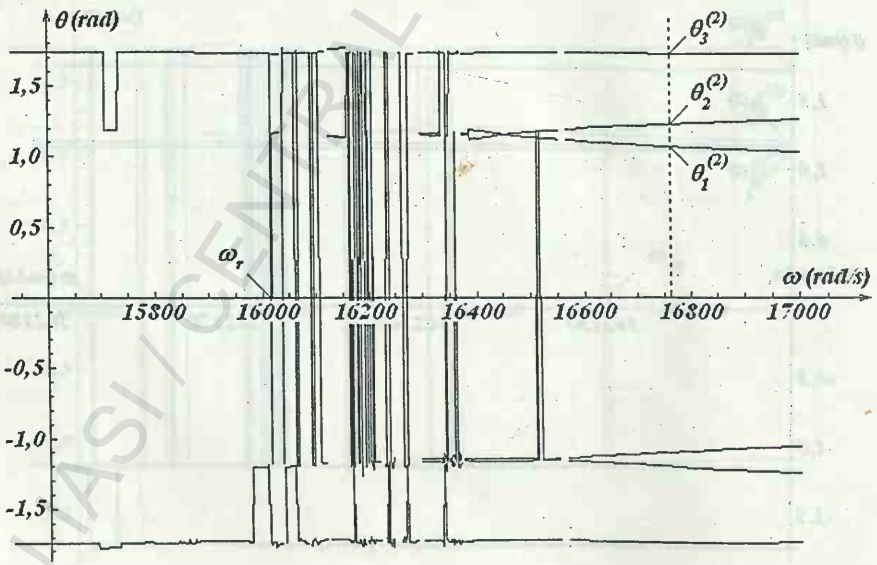


Fig. VII.13

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

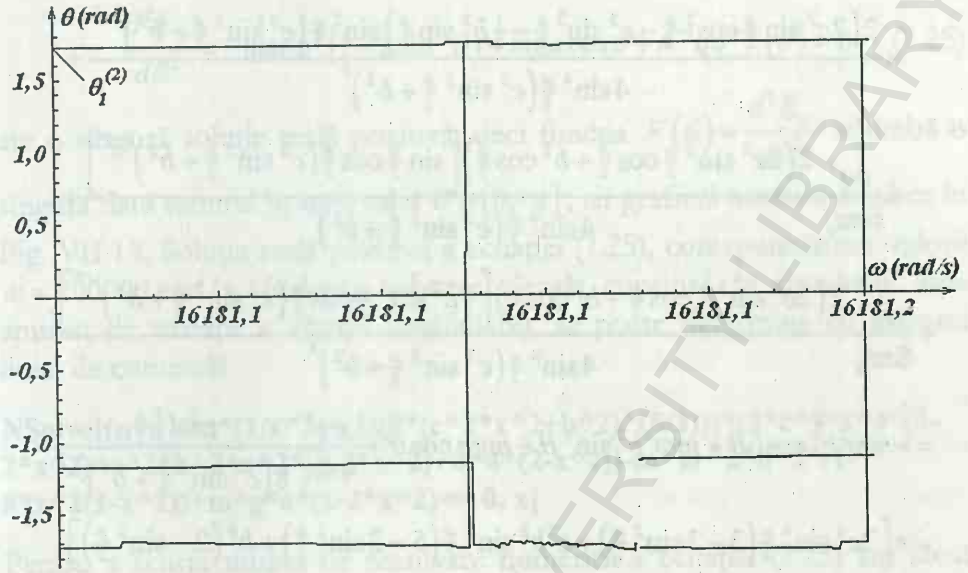


Fig. VII.14

La o analiză rapidă a acestor reprezentări grafice, se constată faptul că dependenţa calitativă a lui θ de viteza unghiulară ω îşi păstrează şi în acest caz aceleaşi caracteristici. Valoarea minimă a lui ω este în acest caz $\omega_{\min} = 4238{,}946\ rad/s$. Şi aici, ca şi în cazul precedent, principala diferenţă faţă de primul caz constă în reducerea corespunzătoare a ordinului de mărime al lui ω, la creşterea celui al masei. Astfel, unei creşteri cu cinci ordine de mărime (faţă de primul caz) şi respectiv cu două ordine de mărime (faţă de al doilea caz) a masei, îi corespunde o micşorare a ordinului de mărime al vitezei unghiulare cu trei ordine de mărime (faţă de primul caz) şi respectiv cu un ordin de mărime (faţă de cel de-al doilea caz).

b) Pentru a determina stabilitatea poziţiilor de echilibru aflate mai sus trebuie să studiem semnul derivatei a doua a energiei potenţiale efective în aceste puncte. Avem

$$\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2} = -m\omega^2b^2\cos^2\theta + m\omega^2b^2\sin^2\theta + mga\cos\theta - \frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\times$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

$$\times\frac{2\left(2c^2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}-c^2\sin^3\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}b^2\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{3/2}}{4\sin^4\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^3}+$$

$$+\frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\frac{2\left(2c^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+b^2\cos\frac{\theta}{2}\right)\left[\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{3/2}\right]}{4\sin^4\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^3}+$$

$$+\frac{qq'}{8\pi\varepsilon_0}\frac{2\left(2c^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+b^2\cos\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{3}{2}c^2\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{1/2}\right]}{4\sin^4\frac{\theta}{2}\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^3}=$$

$$=-m\omega^2b^2\cos^2\theta+m\omega^2b^2\sin^2\theta+mga\cos\theta+\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin^{-3}\frac{\theta}{2}}{8\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{5/2}}\times$$

$$\times\left[2c^4\sin^4\frac{\theta}{2}\left(3-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+c^2b^2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(5-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+b^4\left(2-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

Dacă notăm

$$f(\theta)\overset{not.}{=}\frac{\sin^{-3}\frac{\theta}{2}}{8\left(c^2\sin^2\frac{\theta}{2}+b^2\right)^{5/2}}\times$$

$$\times\left[2c^4\sin^4\frac{\theta}{2}\left(3-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+c^2b^2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(5-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+b^4\left(2-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

atunci derivata a doua în raport cu θ a energiei potenţiale devine

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2}=-m\omega^2b^2\cos^2\theta+m\omega^2b^2\sin^2\theta+mga\cos\theta+\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}f(\theta)=$$

$$=-m\omega^2b^2\left(1-2\sin^2\theta\right)+mga\cos\theta+k^{-1}qq'f(\theta).\tag{7.24}$$

Pentru a studia semnul acestei expresii vom apela tot la soft-ul Mathematica 4.0. După cum se poate constata, semnul acestei expresii depinde semnificativ atât de valoarea masei, cât şi de cea a vitezei unghiulare, pentru valori date ale celorlalte mărimi. Astfel, pentru $m=1g$, dacă $\omega_{\min}<\omega<\omega^*=585310,223\ rad/s$ ecuaţia

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -m\omega^2b^2\left(1-2\sin^2\theta\right)+mga\cos\theta+k^{-1}qq'f\left(\theta\right)=0 \quad (7.25)$$

are o singură soluţie reală pozitivă, deci funcţia $F\left(\theta\right)=\frac{d^2E_p}{d\theta^2}$ schimbă o singură dată semnul în intervalul $\theta\in\left(0,\ \pi\right]$, iar graficul acesteia arată ca în Fig. VII.15. Soluţia reală pozitivă a ecuaţiei (7.25), corespunzătoare valorii $\omega=200000\ rad/s$ (valoare arbitrar aleasă, cuprinsă în intervalul susamintit de variaţie a vitezei unghiulare), se poate determina cu ajutorul liniei de comandă

NSolve[(q*q1/k)*(1/x^3)*(1/(8*(c^2*x^2+b^2)^(5/2)))*(2*c^4*x^4*(3-2*x^2)+c^2*b^2*x^2*(5-2*x^2)+b^4*(2-x^2))-m*ω^2*b^2*(1-8*x^2(1-x^2))+m*g*a*(1-2*x^2)== 0, x]

Pentru a scurta timpul de rezolvare numerică a ecuaţiei (7.25) am făcut schimbarea de variabilă $\sin\frac{\theta}{2}\overset{not.}{=}x$. Soluţia acceptabilă din punct de vedere fizic a ecuaţiei în necunoscuta x este $x=0,9299087994345975$, căreia îi corespunde unghiul θ_0 dat de linia de comandă

2ArcSin[0.9299087994345975] //N

care dă

$\theta_0=2,3883295953886625\ rad=0,7602289216775441\ \pi\ rad\cong 0,76\ \pi\ rad$.

Următoarele linii de comandă permit reprezentarea grafică a funcţiei $F\left(\theta\right)$ în intervalul $\theta\in\left(0,\ \pi\right]$:

```
Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];

k = 10^-9/9;
a = 0.2;
b = 0.15;
c = Sqrt[a^2-b^2];
g = 9.8;
```

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

```
m = 0.001;
q = 10^-3;
q1 = 5*10^-3;
ω = 2*10^5;

Plot[(q*q1/k)*(1/Sin[th/2]^3)*(1/(8*(c^2*Sin[th/2]^2+b^2)
^(5/2)))*(2*c^4*Sin[th/2]^4*(3-2*Sin[th/2]^2)+c^2*b^2*
Sin[th/2]^2*(5-2*Sin[th/2]^2)+b^4*(2-Sin[th/2]^2))-m*ω^2
*b^2*(1-2*Sin[th]^2)+m*g*a*Cos[th],{th,0,Pi}]
```

După cum rezultă din Fig. VII.15, pozițiile de echilibru (date de soluțiile acceptabile din punct de vedere fizic ale ecuației (7.23)) care aparțin intervalului $\theta \in (0,\ \theta_0)$ sunt poziții de *echilibru stabil*, iar cele cuprinse în intervalul $\theta \in (\theta_0,\ \pi]$ sunt poziții de *echilibru instabil*. Pentru $\omega > \omega^*$ ecuația (7.25) admite trei soluții reale pozitive, toate acceptabile din punct de vedere fizic. Cu alte cuvinte, în acest caz, în intervalul $\theta \in (0,\ \pi]$ funcția $F(\theta)$ schimbă semnul de trei ori (vezi Fig. VII.16, în care este reprezentată funcția $F(\theta)$ pentru valoarea arbitrar aleasă $\omega = 6\times 10^6\, rad/s$).

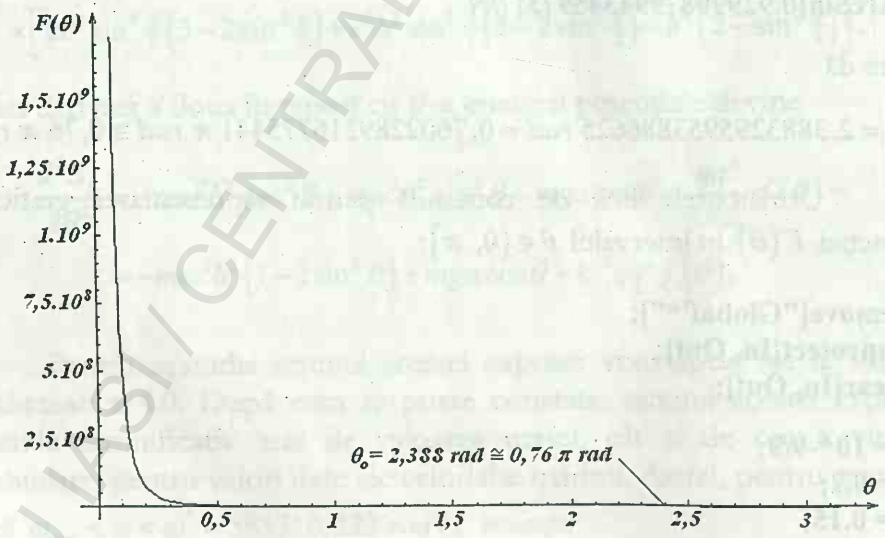


Fig. VII.15

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

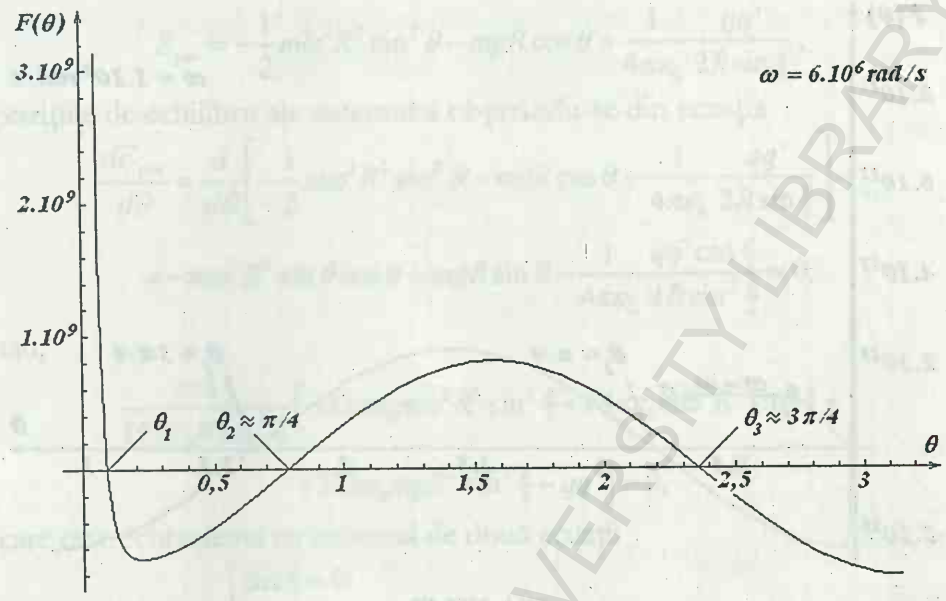


Fig. VII.16

În consecinţă, poziţiile de echilibru – soluţii ale ecuaţiei (7.23) – care satisfac relaţia $\theta \in (0,\ \theta_1) \cup (\theta_2,\ \theta_3)$ sunt poziţii de *echilibru stabil* (derivata a doua a energiei potenţiale efective este pozitivă), iar cele care aparţin intervalului $\theta \in (\theta_1,\ \theta_2) \cup (\theta_3,\ \pi]$ sunt poziţii de *echilibru instabil.* Din analiza numerică rezultă faptul că pe măsură ce viteza unghiulară creşte $(\omega \to \infty)$, valoarea cea mai mică a soluţiilor ecuaţiei (7.25) se micşorează din ce în ce mai mult, tinzând la zero $(\theta_1 \to 0)$ (vezi Fig. VII.17); deci, la viteze unghiulare foarte mari avem poziţii de *echilibru stabil* cuprinse doar în intervalul $\theta \in (\theta_2,\ \theta_3) \approx \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$.

c) Evident, mici oscilaţii pot avea loc doar în jurul poziţiilor de echilibru stabil. Deoarece expresia energiei cinetice a sistemului este aceeaşi cu cea obţinută în problema precedentă, pentru a determina perioada micilor oscilaţii, se utilizează formula dedusă acolo:

BCU Cluj / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

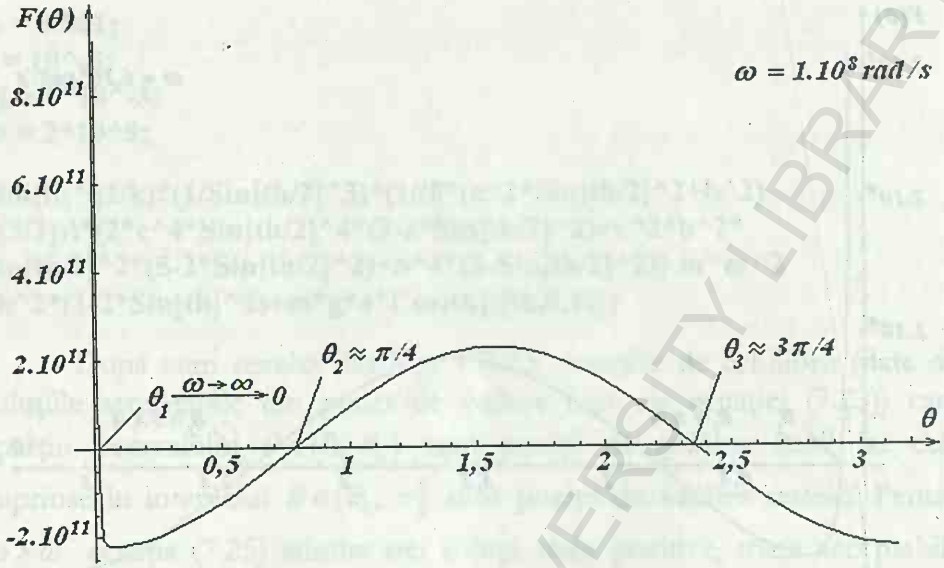


Fig. VII.17

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m\left(a^2 \sin^2 \theta_{es} + b^2 \cos^2 \theta_{es}\right)}{\left.\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{es}}}},$$

în care se înlocuiesc valorile lui θ corespunzătoare stărilor de echilibru stabil, determinate la punctele a) și b) ale problemei.

Caz particular: $a = b = R$ (elipsa degenerează într-un cerc de rază R). În această situație, avem

$$V_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{2R \sin\frac{\theta}{2}},$$

iar funcția Lagrange devine

$$L = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta + mgR \cos\theta - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{2R \sin\frac{\theta}{2}}.$$

În acest caz, energia potențială efectivă a sistemului va fi (vezi relația (7.21)):

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E_{pot} = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2\theta - mgR\cos\theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{2R\sin\frac{\theta}{2}},$$

poziţiile de echilibru ale sistemului obţinându-se din ecuaţia

$$\frac{dE_{pot}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[-\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2\theta - mgR\cos\theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{2R\sin\frac{\theta}{2}}\right] =$$

$$= -m\omega^2 R^2 \sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'\cos\frac{\theta}{2}}{4R\sin^2\frac{\theta}{2}} = 0,$$

sau,

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{16\pi\varepsilon_0 R\sin^2\frac{\theta}{2}}\left[-32\pi\varepsilon_0 m\omega^2 R^3 \sin^3\frac{\theta}{2} + 64\pi\varepsilon_0 m\omega^2 R^3 \sin^5\frac{\theta}{2} + \right.$$

$$\left. + 32\pi\varepsilon_0 mgR^2 \sin^3\frac{\theta}{2} - qq'\right] = 0,$$

care este echivalentă cu sistemul de două ecuaţii

$$\begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} = 0, \\ 32m\pi\varepsilon_0 R^2 \sin^3\frac{\theta}{2}\left(g - \omega^2 R\cos\theta\right) - qq' = 0. \end{cases} \tag{7.26}$$

Soluţia acceptabilă fizic a primei ecuaţii din acest sistem este $\theta_1 = \pi$, iar cea de-a doua ecuaţie nu are soluţie analitică. Pentru a o rezolva vom apela din nou la soft-ul Mathematica 4.0. De această dată însă ne vom opri atenţia doar asupra unui singur caz, anume pentru $m = 1g$, $R = 0,2m$, $q = 10^{-3}C$ şi $q' = 5\times10^{-3}C$. Următoarele linii de comandă permit reprezentarea grafică a dependenţei $\theta = \theta(\omega)$, dată sub formă implicită de ecuaţia (7.26 – 2) şi prezentată în Fig. VII.18:

```
Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];

k = 10^-9/9;
R = 0.2;
g = 9.8;
m = 0.001;
q = 10^-3;
q1 = 5*10^-3;
```

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

```
NSolve[8*k*m*R^2*Sin[th/2]^3*(g-omega^2*R*Cos[th])-q*q1== 0, th];
g1=Plot[Evaluate[th /. %],{omega, 20000, 1000000}];
g2=Plot[Pi/2,{omega, 20000, 1000000}];
Show[g1,g2]
```

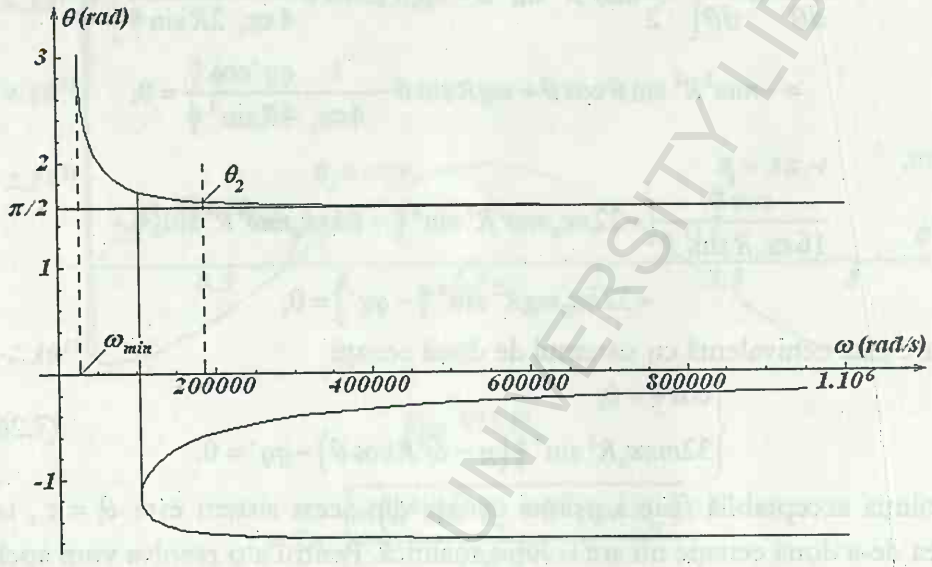


Fig. VII.18

Valoarea minimă a vitezei unghiulare, $\omega_{min} = 26516,503\ rad/s$ (sub care ecuația (7.26 – 2) nu are nici o soluție reală) poate fi determinată cu ajutorul liniilor de comandă:

```
8*k*m*R^2*Sin[Pi/2]^3*(g-ω^2*R*Cos[Pi])-q*q1 //N
-5.×10^-6+3.55556×10^-14(9.8+0.2ω^2)

NSolve[-5.`*^-6+3.555555555555556`*^-14(9.8`+0.2`ω^2),ω]
{{ω→-26516.503370542654`},{ω→26516.503370542654`}}
```

După cum se poate observa din Fig. VII.18, pentru orice valoare $\omega > \omega_{min}$ a vitezei unghiulare, ecuația (7.26 – 2) are o singură soluție reală acceptabilă din punct de vedere fizic, $\pi/2 < \theta_2 < \pi$. În concluzie, în total, sistemul are două poziții de echilibru, date de soluția analitică $\theta_1 = \pi$, și

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

respectiv, de soluţia numerică $\pi/2<\theta_2<\pi$. Stabilitatea acestor poziţii de echilibru poate fi studiată cu ajutorul derivatei a doua în raport cu θ a energiei potenţiale,

$$\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}=\frac{d}{d\theta}\left[-m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta+mgR\sin\theta-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'\cos\frac{\theta}{2}}{4R\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]=$$

$$=m\omega^2R^2\left(1-2\cos^2\theta\right)+mgR\cos\theta+\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1+\cos^2\frac{\theta}{2}}{8R\sin^3\frac{\theta}{2}}.$$

Pentru a studia semnul acestei expresii în intervalul $0<\theta\le\pi$ vom apela (ca şi în cazul elipsei) la reprezentarea grafică a funcţiei

$$D(\theta)\equiv\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}=m\omega^2R^2\left(1-2\cos^2\theta\right)+mgR\cos\theta+\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1+\cos^2\frac{\theta}{2}}{8R\sin^3\frac{\theta}{2}}.$$

Şi în acest caz există o valoare a vitezei unghiulare, $\omega^*=379162{,}149\ rad/s$, sub care ecuaţia $D(\theta)=0$ are o singură soluţie acceptabilă din punct de vedere fizic; cu alte cuvinte, pentru $\omega<\omega^*$ funcţia $D(\theta)$ îşi schimbă o singură dată semnul în intervalul $0<\theta\le\pi$ (graficul funcţiei $D(\theta)$ trece o singură dată prin zero). De exemplu, pentru $\omega=10^5\ rad/s$ ecuaţia $D(\theta)=0$ are singura soluţie acceptabilă din punct de vedere fizic (vezi Fig. VII.19),

$\theta_0=2{,}4051723392579922\ rad=0{,}7655901335616131\ \pi\ rad\cong0{,}77\ \pi\ rad$.
Pentru a determina această soluţie am utilizat următoarele linii de comandă în Mathematica 4.0:

NSolve[m*100000^2*R^2*(1-2*x^2)+m*g*R*x*q*q1*((3+x)/2)*(1/(8*k*R*((1-x)/2)^(3/2)))==0,x]

care dă soluţiile

{{$x\to0.770893+0.394635i$},{$x\to0.770893-0.394635i$},{$x\to-0.740878$}}

doar ultima fiind acceptabilă din punct de vedere fizic. Cu ajutorul liniei de comandă

ArcCos[-0.740877560929887`] //N

aceasta conduce la valoarea $\theta_0 = 2,4051723392579922\ rad$. Orice poziție de echilibru $0 < \theta \leq \pi$ – soluție acceptabilă din punct de vedere fizic a ecuației (7.26 – 2) – este o poziție de *echilibru stabil* dacă $\theta \in (0,\ \theta_0)$, și respectiv, de *echilibru instabil*, dacă $\theta \in (\theta_0,\ \pi]$.

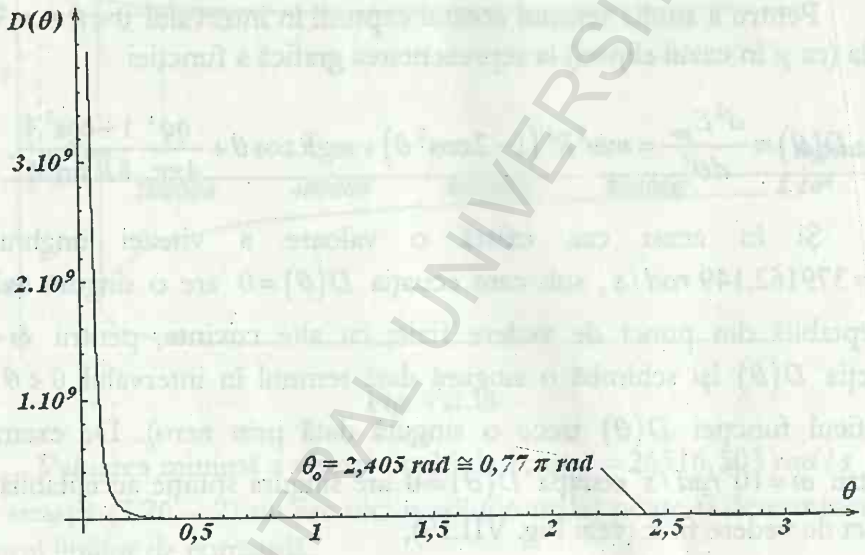


Fig. VII.19

Dacă $\omega > \omega^*$, atunci ecuația $D(\theta) \equiv \dfrac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} = 0$ are trei soluții reale, toate cu semnificație fizică pentru problema de față. De exemplu, dacă $\omega = 5 \times 10^6 rad/s$, atunci graficul funcției $D(\theta)$ arată ca în Fig. VII.20, care evidențiază câte două subintervale pentru valorile pozitive, respectiv negative, ale unghiului θ – soluție a ecuației $D(\theta) = 0$. După cum se poate observa din Fig. VII.20, dacă $\theta \in (0,\ \theta_1) \cup (\theta_2,\ \theta_3)$, atunci poziția de echilibru respectivă este o poziție de *echilibru stabil*, iar dacă

BCU "ASE" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\theta \in (\theta_1, \theta_2) \cup (\theta_3, \pi]$, atunci respectiva poziţie de echilibru este una de *echilibru instabil.*

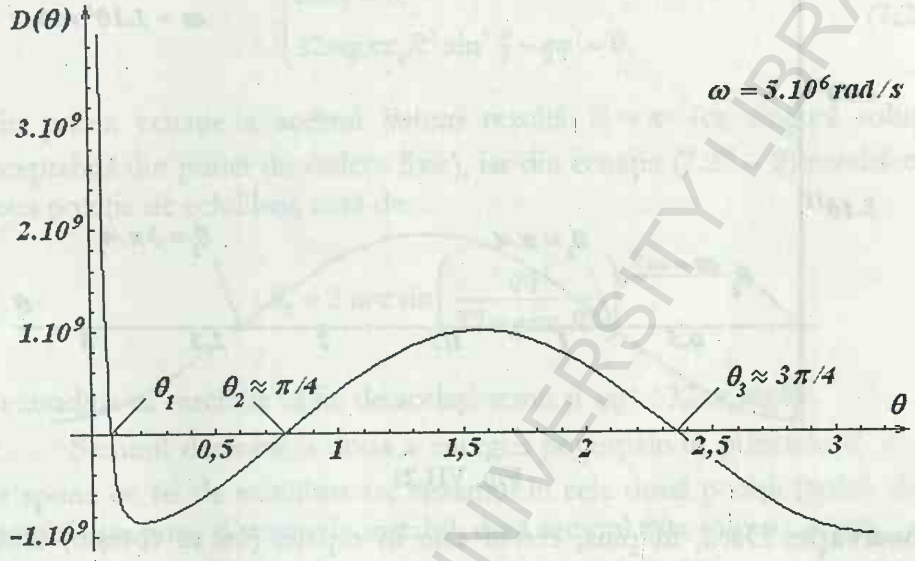


Fig. VII.20

Din analiza numerică rezultă faptul că la limita $\omega \to \infty$, $\theta_1 \to 0$ (vezi Fig. VII.21); deci, la viteze unghiulare foarte mari, la fel ca în cazul elipsei, avem poziţii de *echilibru stabil* cuprinse doar în intervalul $\theta \in (\theta_2, \theta_3) \approx \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Pentru a determina perioada micilor oscilaţii, în acest caz se utilizează formula[9]:

$$\tau = 2\pi R \sqrt{\frac{m}{\left.\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{es}}}},$$

în care se înlocuiesc valorile lui θ corespunzătoare stărilor de echilibru stabil pentru această situaţie (cerc de rază R).

[9] Obţinută din rezultatul corespunzător elipsei, în care se pune $a = b = R$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

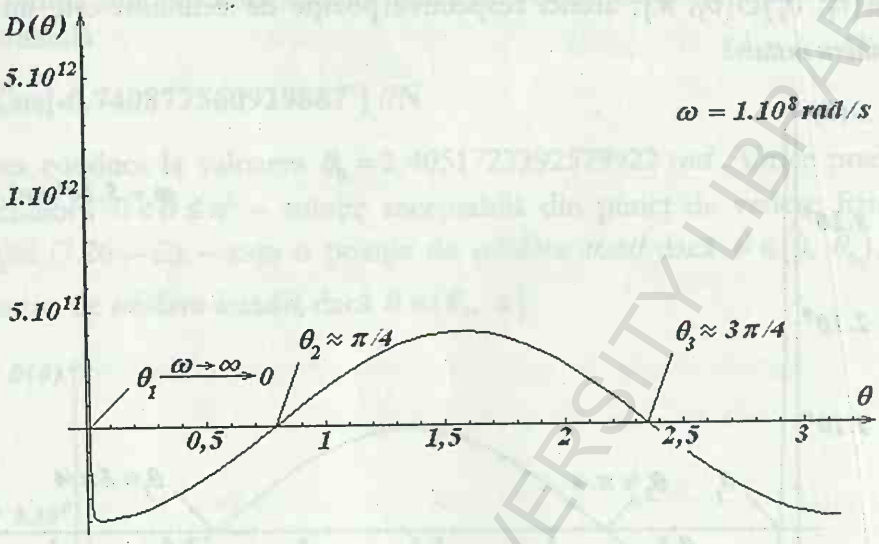


Fig. VII.21

Observație: Dacă, în plus, cercul este în repaus (nu se rotește) atunci problema se simplifică și mai mult și, punând în relațiile corespunzătoare cercului în rotație $\omega = 0$, pentru cazul considerat avem:

$$L = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{2R\sin\frac{\theta}{2}}.$$

În acest caz, energia potențială efectivă a sistemului va fi

$$E_{pot} = -mgR\cos\theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{2R\sin\frac{\theta}{2}},$$

pozițiile de echilibru ale sistemului obținându-se din ecuația

$$\frac{dE_{pot}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[-mgR\cos\theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{2R\sin\frac{\theta}{2}}\right] = mgR\sin\theta - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'\cos\frac{\theta}{2}}{4R\sin^2\frac{\theta}{2}} = 0,$$

sau,

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{16\pi\varepsilon_0 R\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(32\pi\varepsilon_0 mgR^2\sin^3\frac{\theta}{2} - qq'\right) = 0,$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care este echivalentă cu sistemul de două ecuaţii:

$$\begin{cases} \cos\frac{\theta}{2}=0, \\ 32mg\pi\varepsilon_0 R^2\sin^3\frac{\theta}{2}-qq'=0. \end{cases} \tag{7.27}$$

Din prima ecuaţie a acestui sistem rezultă $\theta_1=\pi$ (ca singură soluţie acceptabilă din punct de vedere fizic), iar din ecuaţia (7.27 – 2) rezultă o a doua poziţie de echilibru, dată de

$$\theta_2=2\,arc\sin\left(\frac{qq'}{32mg\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^{1/3},$$

cu condiţia ca sarcinile să fie de acelaşi semn şi $qq'<32\pi\varepsilon_0 mgR^2$.

Semnul derivatei a doua a energiei potenţiale în punctele θ_1 şi θ_2 ne spune ce fel de echilibru are sistemul în cele două poziţii (stabil, dacă semnul este plus, şi respectiv instabil, dacă semnul este minus). Avem,

$$\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}=\frac{d}{d\theta}\left[mgR\sin\theta-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'\cos\frac{\theta}{2}}{4R\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]=mgR\cos\theta+$$

$$+\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 R}\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}=mgR\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 R}\frac{2-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}},$$

ceea ce conduce la

$$\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi}=-mgR+\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 R} \tag{7.28}$$

şi

$$\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_2}=mgR\left(1-2\sin^2\frac{\theta_2}{2}\right)+\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 R}\frac{2-\sin^2\frac{\theta_2}{2}}{\sin^3\frac{\theta_2}{2}}=$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= mgR\left[1-2\left(\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}\right]+\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 R}\frac{2-\left(\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}}{\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}}=$$

$$= mgR\left[1-2\left(\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}\right]+mgR\left[2-\left(\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}\right]=$$

$$= 3mgR-3mgR\left(\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3} = 3mgR\cos^2\frac{\theta_2}{2} > 0. \tag{7.29}$$

Din relaţia (7.28) rezultă că dacă sarcinile sunt de semne diferite, sau dacă sunt de acelaşi semn şi $qq' < 32\pi\varepsilon_0 mgR^2$, atunci $\theta_1 = \pi$ este o poziţie de *echilibru instabil*, iar dacă sarcinile sunt de acelaşi semn şi $qq' > 32\pi\varepsilon_0 mgR^2$, atunci $\theta_1 = \pi$ este poziţie de *echilibru stabil*. De asemenea, relaţia (7.29) ne arată că poziţia de echilibru dată de $\theta = \theta_2 = 2\,arc\sin\left(\frac{qq'}{32mg\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^{1/3}$, dacă există, este o poziţie de echilibru stabil.

În ceea ce priveşte perioada micilor oscilaţii din jurul poziţiilor de echilibru stabil, aceasta este dată de

$$\tau = 2\pi R\sqrt{\frac{m}{\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{es}}}}.$$

Conform rezultatelor obţinute mai sus, dacă sarcinile sunt de acelaşi semn şi $qq' > 32\pi\varepsilon_0 mgR^2$, atunci în jurul poziţiei de echilibru stabil $\theta_1 = \pi$ au loc mici oscilaţii cu perioada

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\tau = 2\pi R\sqrt{\frac{m}{\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi}}} \overset{(Px.8)}{=} 2\pi R\sqrt{\frac{m}{-mgR+\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 R}}} =$$

$$= 2\pi R\sqrt{\frac{32\pi\varepsilon_0 mR}{qq'-32\pi\varepsilon_0 mgR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{R}{g}}{\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}-1}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\frac{1}{\sqrt{\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}-1}} = \tau_0\frac{1}{\sqrt{\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}-1}},$$

unde

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

iar dacă sarcinile sunt de acelaşi semn şi $qq' < 32\pi\varepsilon_0 mgR^2$, atunci în jurul poziţiei de echilibru stabil $\theta_2 = 2\arcsin\left(qq'/32mg\pi\varepsilon_0 R^2\right)^{1/3}$ au loc mici oscilaţii cu perioada

$$\tau = 2\pi R\sqrt{\frac{m}{\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi}}} \overset{(Px.8)}{=} 2\pi R\sqrt{\frac{1}{3gR-3gR\left(\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}}} =$$

$$= 2\pi R\sqrt{\frac{1}{3gR\left[1-\left(\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}\right]}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\frac{1}{\sqrt{3\left[1-\left(\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}\right]}} =$$

$$= \tau_0\frac{1}{\sqrt{3\left[1-\left(\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 mgR^2}\right)^{2/3}\right]}}.$$

Observaţie: În cazul particular când $qq' = 32\pi\varepsilon_0 mgR^2$ poziţia de echilibru dată de $\theta_2 = 2\arcsin\left(qq'/32mg\pi\varepsilon_0 R^2\right)^{1/3}$ va coincide cu cea dată de $\theta_1 = \pi$. În plus, în această situaţie, avem:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_2=\pi}=\left(3mgR\cos^2\frac{\theta_2}{2}\right)_{\theta_2=\pi}=0,$$

deci, pentru a determina stabilitatea poziţiei de echilibru $\theta_2=\theta_1=\pi$ în acest caz special $\left(qq'=32\pi\varepsilon_0 mgR^2\right)$ trebuie să calculăm derivatele de ordin superior ale energiei potenţiale efective, mai exact, până la ordinul la care valoarea în punctul $\theta=\pi$ a acestei derivate este diferită de zero. Avem,

$$\frac{d^3E_{pot}}{d\theta^3}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right)=\frac{d}{d\theta}\left[mgR\left(1-2\sin^2\tfrac{\theta}{2}\right)+\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 R}\frac{2-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\right]=$$

$$=-2mgR\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}+\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 R}\frac{-\sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{3}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(2-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^6\frac{\theta}{2}}=$$

$$=-mgR\sin\theta-\frac{qq'}{64\pi\varepsilon_0 R}\frac{\cos\frac{\theta}{2}\left(6-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\frac{\theta}{2}},$$

ceea ce conduce la

$$\left.\frac{d^3E_{pot}}{d\theta^3}\right|_{\theta=\pi}=\left(-mgR\sin\theta-\frac{qq'}{64\pi\varepsilon_0 R}\frac{\cos\frac{\theta}{2}\left(6-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\right)_{\theta=\pi}=0.$$

Aceasta înseamnă că trebuie să calculăm şi

$$\frac{d^4E_{pot}}{d\theta^4}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^3E_{pot}}{d\theta^3}\right)=-\frac{d}{d\theta}\left[mgR\sin\theta+\frac{qq'}{64\pi\varepsilon_0 R}\frac{\cos\frac{\theta}{2}\left(6-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\right]=$$

$$=-mgR\cos\theta-\frac{qq'}{64\pi\varepsilon_0 R}\frac{\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(6-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\sin^4\frac{\theta}{2}}{\sin^8\frac{\theta}{2}}+$$

$$+\frac{qq'}{64\pi\varepsilon_0 R}\frac{2\sin^3\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(6-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^8\frac{\theta}{2}}=-mgR\cos\theta+\frac{qq'}{64\pi\varepsilon_0 R}\times$$

$$\times\frac{\left(6-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin^3\frac{\theta}{2}}+\frac{qq'}{64\pi\varepsilon_0 R}\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(6-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^5\frac{\theta}{2}},$$

care, în punctul $\theta=\pi$ (şi pentru $qq'=32\pi\varepsilon_0 mgR^2$) ia valoarea

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\left.\frac{d^4E_{pot}}{d\theta^4}\right|_{\substack{\theta=\pi,\\ qq'=32\pi\varepsilon_0 mgR^2}} = \left(-mgR\cos\theta + \frac{qq'}{64\pi\varepsilon_0 R}\frac{\left(6-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin^3\frac{\theta}{2}} + \frac{qq'}{64\pi\varepsilon_0 R}\times\right.$$

$$\left.\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(6-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^5\frac{\theta}{2}}\right)_{\substack{\theta=\pi,\\ qq'=32\pi\varepsilon_0 mgR^2}} = mgR + \frac{5}{4}\left(\frac{qq'}{32\pi\varepsilon_0 R}\right)_{qq'=32\pi\varepsilon_0 mgR^2} = \frac{9}{4}mgR > 0,$$

adică, în acest caz special $\left(qq' = 32\pi\varepsilon_0 mgR^2\right)$ poziţia de echilibru dată de $\theta = \pi$ este o poziţie de *echilibru stabil*, însă micile oscilaţii în jurul ei *nu mai sunt armonice.*

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul VIII

Probleme de mecanica fluidelor

1. Un lichid ideal incompresibil, de densitate ρ, se află într-un vas cilindric vertical, care se roteşte în jurul axei cilindrului cu viteza unghiulară constantă ω. În repaus, înălţimea la care se ridică lichidul în vas este h. Presupunând că lichidul se roteşte odată cu vasul, ca un solid, să se determine

a) forma suprafeţei lichidului în rotaţie;
b) presiunea în fiecare punct din interiorul lichidului;
c) presiunea exercitată de lichid în orice punct de pe fundul vasului;
d) forţa şi presiunea totală cu care lichidul acţionează asupra fundului vasului.

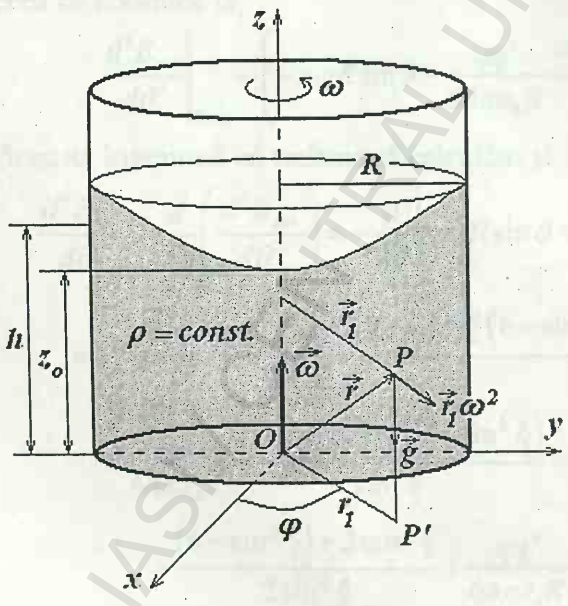


Fig. VIII.1

Rezolvare

a) Vom ataşa un sistem de referinţă cilindrului în rotaţie, având axa Oz de-a lungul verticalei ascendente, ca în Fig. VIII.1. Faţă de acest reper, componentele vitezei unei particule din interiorul lichidului sunt

$$v_x = -\omega y,\ v_y = \omega x,\ v_z = 0,$$

deoarece,

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \overset{formal}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \omega x\vec{j} - \omega y\vec{i} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

Fiind un fluid ideal, acesta este descris de ecuația lui Euler,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{8.1}$$

unde $\vec{F}$ este forța masică specifică; în cazul nostru,

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta m} = \frac{\vec{g}\Delta m}{\Delta m} = \vec{g} = -g\,\vec{k},$$

iar $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ (nu există variație în timp a vitezei). În aceste condiții, proiectând pe axe ecuația vectorială (8.1) obținem

$$Ox: \quad (\vec{v} \cdot \nabla)v_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{8.2}$$

$$Oy: \quad (\vec{v} \cdot \nabla)v_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{8.3}$$

$$Oz: \quad (\vec{v} \cdot \nabla)v_z = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{8.4}$$

Avem,

$$(\vec{v} \cdot \nabla)v_x = \left(-\omega y\frac{\partial}{\partial x} + \omega x\frac{\partial}{\partial y}\right)(-\omega y) = -\omega^2 x$$

şi

$$(\vec{v} \cdot \nabla)v_y = \left(-\omega y\frac{\partial}{\partial x} + \omega x\frac{\partial}{\partial y}\right)(\omega x) = -\omega^2 y,$$

care, introduse în (8.2) şi (8.3) conduc la următoarele ecuații:

$$\omega^2 x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{8.5}$$

$$\omega^2 y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{8.6}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar ecuația (8.4) – având în vedere că $v_z = 0$ – se mai scrie astfel:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0. \tag{8.7}$$

Soluția generală a sistemului de ecuații (8.5)÷(8.7) este

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right) - gz + C, \tag{8.8}$$

unde C este o constantă arbitrară de integrare. Într-adevăr, din (8.5) obținem

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + f_1(y, z), \tag{8.9}$$

din ecuația (8.6) se găsește că

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\omega^2 y^2 + f_2(x, z), \tag{8.10}$$

iar din ecuația (8.7) rezultă:

$$\frac{p}{\rho} = -gz + f_3(x, y). \tag{8.11}$$

Având în vedere relațiile (8.9)÷(8.11), în care f_i, $\left(i = \overline{1,3}\right)$ sunt funcții arbitrare de argumentele lor, pentru $\frac{p}{\rho}$ rezultă soluția (8.8).

Formula presiunii (8.8) poate fi dedusă și altfel, lucrând într-un sistem de referință neinerțial. În acest sens vom considera un reper care se rotește odată cu lichidul, cu viteza unghiulară ω, în jurul axei Oz. Deoarece față de acest referențial accelerația lichidului $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v}$ este nulă (sistemul de referință se mișcă solidar cu lichidul) ecuația lui Euler se scrie

$$0 = \vec{F}_{tot} - \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{F}_g + \vec{F}_{cf} - \frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{8.12}$$

unde $\vec{F}_g = -g\vec{k}$ este forța masică specifică gravitațională, iar $\vec{F}_{cf} = \omega^2\vec{r}_1 = \omega^2\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\right)$ este forța masică specifică centrifugă (forța centrifugă este forță aplicată în reperul neinerțial considerat). Înmulțind

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

scalar ecuația (8.12) cu deplasarea elementară $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ în punctul P, se găsește:

$$0 = \left(\vec{F}_g + \vec{F}_{cf} - \frac{1}{\rho}\nabla p\right)\cdot d\vec{r} = -gdz + \omega^2\left(xdx + ydy\right) - \frac{1}{\rho}dp = \\ = d\left(-gz\right) + d\left(\frac{1}{2}\omega^2 r_1^2\right) + d\left(-\frac{1}{\rho}p\right), \tag{8.13}$$

unde am utilizat reprezentarea formală a gradientului, $\nabla\bullet \overset{formal}{=} \frac{d\bullet}{d\vec{r}}$ și am ținut cont că $r_1^2 = x^2 + y^2$. Am găsit deci că

$$d\left(\frac{1}{\rho}p\right) = d\left(\frac{1}{2}\omega^2 r_1^2\right) + d\left(-gz\right).$$

Integrând nedefinit această ecuație obținem:

$$\frac{1}{\rho}p = \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right) - gz + C, \tag{8.14}$$

unde C este o constantă arbitrară de integrare. Evident, rezultatul obținut pe această cale coincide cu cel determinat anterior (vezi relația (8.8)). Întrucât presiunea lichidului pe suprafața lui liberă este nulă, rezultă că această suprafață este paraboloidul de rotație având drept axă chiar axa de simetrie Oz a vasului cilindric și ecuația

$$0 = \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) - gz + C, \tag{8.15}$$

sau, altfel scris,

$$z = \frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2\right) + C', \tag{8.15'}$$

unde $C' = \frac{C}{g}$ este o nouă constantă.

b) Constanta de integrare C din relația (8.15) se poate determina din condiția de egalitate a volumelor de lichid în repaus și în mișcare, știind că suprafața liberă este paraboloidul (8.15).

Pentru lichidul în repaus putem scrie: $V = \pi R^2 h$, iar pentru lichidul în mișcare avem

BCU "LUCIAN BLAGA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$V=\iiint_{(V)} r_1 dr_1 d\varphi dz=\int_0^R r_1 dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\omega^2}{2g}\left(x^2+y^2\right)+\frac{C}{g}} dz=\int_0^R r_1 dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\omega^2}{2g}r_1^2+\frac{C}{g}} dz=$$

$$=2\pi\int_0^R r_1 dr_1\left(\frac{\omega^2}{2g}r_1^2+\frac{C}{g}\right)=2\pi\frac{\omega^2}{2g}\left(\frac{r_1^4}{4}\right)_0^R+2\pi\frac{C}{g}\left(\frac{r_1^2}{2}\right)_0^R=\frac{\pi\omega^2R^4}{4g}+\frac{\pi CR^2}{g}.$$

Egalitatea celor două volume:

$$\pi R^2 h=\frac{\pi\omega^2R^4}{4g}+\frac{\pi CR^2}{g},$$

furnizează pentru constanta C expresia:

$$C=gh-\frac{\omega^2R^2}{4}.$$

Așadar, presiunea în orice punct din interiorul lichidului în rotație este

$$p=\frac{\rho\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)-\rho gz+\rho C=\frac{\rho\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)-\rho gz+\rho\left(gh-\frac{\omega^2R^2}{4}\right),$$

sau,

$$p=\rho g\left(h-z\right)+\frac{\rho\omega^2}{2}\left(x^2+y^2-\frac{R^2}{2}\right). \tag{8.16}$$

c) Presiunea lichidului în orice punct de pe fundul vasului se obține imediat din relația (8.16), în care punem condiția $z=0$. Rezultă:

$$p=p(x,y)=\rho gh+\frac{\rho\omega^2}{2}\left(x^2+y^2-\frac{R^2}{2}\right). \tag{8.17}$$

d) Forța totală cu care lichidul acționează asupra fundului vasului este

$$F\big|_{z=0,\,S=\pi R^2}=\iint_{(S)} dF=\iint_{(S)} p(x,y)dS=\iint_{(S)} p(x,y)dxdy=\iint_{(S)} p(r_1)r_1dr_1d\varphi=$$

$$=\int_0^R p(r_1)\,r_1dr_1\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\int_0^R\left[\rho gh+\frac{\rho\omega^2}{2}\left(r_1^2-\frac{R^2}{2}\right)\right]r_1dr_1=$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= 2\pi\rho\left(\int_0^R ghr_1 dr_1 + \int_0^R \frac{\omega^2}{2} r_1^3 dr_1 - \int_0^R \frac{\omega^2 R^2}{4} r_1 dr_1\right) = 2\pi\rho\left[\left(\frac{ghr_1^2}{2}\right)_0^R + \left(\frac{\omega^2 r_1^4}{8}\right)_0^R - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\omega^2 R^2 r_1^2}{8}\right)_0^R\right] = 2\pi\rho\left(\frac{ghR^2}{2} + \frac{\omega^2 R^4}{8} - \frac{\omega^2 R^4}{8}\right) = \pi R^2 \rho g h = Mg, \tag{8.18}$$

unde $M = \rho V = \rho Sh = \rho\pi R^2 h$ este masa totală a lichidului din vas. Aşadar, forţa totală cu care lichidul acţionează asupra fundului vasului este egală cu greutatea lichidului din vas. Presiunea totală pe care lichidul o exercită asupra fundului vasului este

$$P = p\big|_{z=0,\, S=\pi R^2} = \frac{F\big|_{z=0,\, S=\pi R^2}}{S} = \frac{Mg}{\pi R^2} = \rho g h. \tag{8.19}$$

2. Utilizând expresia forţei hidrodinamice de presiune a unui lichid ideal incompresibil pe suprafaţa laterală a unei conducte:

$$\vec{F}_p = -\left(\iint_{S_{\text{intrare}}} \vec{T} dS + \iint_{S_{\text{ieşire}}} \vec{T} dS\right) + \iiint_V \rho \vec{F} d\tau, \tag{8.20}$$

unde $\vec{T} = p\vec{n} + \rho\vec{v}v_n$, $\vec{n}$ fiind versorul normalei exterioare, să se calculeze forţa hidrodinamică de presiune, $\vec{F}_p$, asupra unui cot de conductă aflat în poziţie orizontală (forţa de smulgere), prin care curge în regim staţionar un lichid ideal incompresibil.

Rezolvare

Deoarece conducta este în poziţie orizontală, forţa masică specifică $\vec{F} = \vec{g}$ are proiecţie nulă pe această direcţie, iar relaţia (8.20) se scrie

$$\vec{F}_p = -\iint_{S_{\text{intrare}}} \vec{T} dS - \iint_{S_{\text{ieşire}}} \vec{T} dS. \tag{8.21}$$

În plus, ţinând cont că parametrii lichidului se distribuie uniform într-o secţiune a conductei şi că secţiunea conductei este constantă $\left(S_{\text{intrare}} = S_{\text{ieşire}} = S\right)$, avem:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{F}_p = -\iint\limits_{S_{\text{intrare}}} \vec{T}dS - \iint\limits_{S_{\text{ieşire}}} \vec{T}dS = -\left(p+\rho v^2\right)S\vec{n}_{\text{intrare}} - \left(p+\rho v^2\right)S\vec{n}_{\text{ieşire}} =$$
$$= -\left[\left(p+\rho v^2\right)S\vec{n}_1 + \left(p+\rho v^2\right)S\vec{n}_2\right] = -\left(p+\rho v^2\right)\left(\vec{n}_1+\vec{n}_2\right)S, \tag{8.22}$$

unde am ţinut cont că $p_1 = p_2 = p$ şi $v_1 = v_2 = v$, indicii 1 şi 2 corespunzând secţiunilor de intrare şi respectiv de ieşire a lichidului din cotul de conductă (vezi Fig. VIII.2). Faptul că $v_1 = v_2 = v$ rezultă din ecuaţia de continuitate, scrisă pentru volumul de lichid cuprins între cele două secţiuni (de intrare şi de ieşire) ale cotului de conductă:

$$S_1 v_{\text{intrare}} = S_2 v_{\text{ieşire}} \Leftrightarrow Sv_1 = Sv_2 = Sv \Leftrightarrow v_1 = v_2 = v. \tag{8.23}$$

Egalitatea celor două presiuni ($p_1 = p_2 = p$) reiese din legea lui Bernoulli,

$$p + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 + \rho V^* = const., \tag{8.24}$$

în care V^* este câmpul scalar din care derivă forţa masică specifică, $\vec{F} = -grad\, V^*(\vec{r},\, t)$. În cazul nostru, alegând axa Oz de-a lungul verticalei ascendente, $V^* = gz$ şi legea lui Bernoulli devine

$$p + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 + \rho gz = const. \tag{8.24'}$$

Având în vedere poziţia orizontală a conductei ($z_1 = z_2$) şi faptul că $v_1 = v_2$ (vezi relaţia (8.23)), din relaţia (8.24'), scrisă pentru cele două puncte corespunzătoare secţiunilor de intrare şi respectiv de ieşire a fluidului din cotul de conductă,

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_1|^2 + \rho gz_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_2|^2 + \rho gz_2 = const., \tag{8.25}$$

rezultă că $p_1 = p_2 = p$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

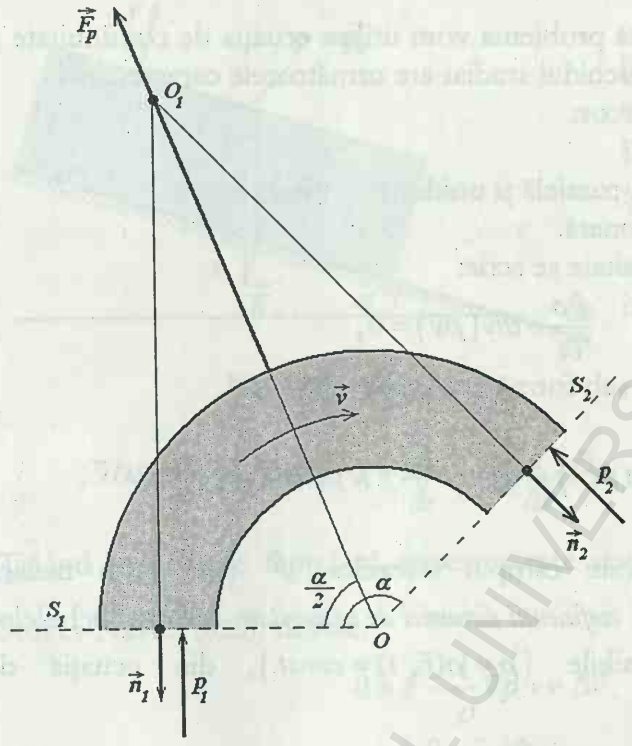


Fig. VIII.2

După cum se poate observa din Fig. VIII.2, cele două normale exterioare la secțiunile S_1 și S_2 se întâlnesc în punctul O_1. Rezultanta $\vec{F}_p$ a forțelor hidrodinamice de presiune are ca suport direcția OO_1. Valoarea acesteia (proiecția ei pe direcția OO_1) este

$$\left|\vec{F}_p\right| = F_p = -\left(p+\rho v^2\right)\times$$
$$\times S\, pr_{OO_1}\left(\vec{n}_1+\vec{n}_2\right) =$$
$$= -\left(p+\rho v^2\right)S\times$$
$$\times\left[-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$
$$= 2S\left(p+\rho v^2\right)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

3. Un strat de lichid vâscos de grosime h este mărginit superior de o suprafață liberă, iar inferior de un plan fix, care este înclinat cu unghiul α față de orizontală. Se cere:

1) să se determine viteza de mișcare a lichidului sub acțiunea propriei greutăți;
2) să se calculeze debitul masic printr-o secțiune transversală a stratului de lichid.

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

1) Pentru a rezolva problema vom utiliza ecuaţia de continuitate şi ecuaţiile Stokes-Navier. Lichidul studiat are următoarele caracteristici:

a) este omogen şi vâscos;
b) este incompresibil;
c) mişcarea este plan-paralelă şi unidimensională;
d) curgerea este staţionară.

Ecuaţia de continuitate se scrie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0,$$

iar ecuaţia Stokes-Navier sub formă vectorială este

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] = \rho\vec{F} - grad\ p + (\lambda+\mu)\,grad(div\ \vec{v}) + \mu\Delta\vec{v},$$

unde $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ este câmpul vitezelor, $\vec{F}$ este forţa masică specifică, iar λ şi μ sunt *coeficienţii dinamici de vâscozitate*. În cazul lichidelor omogene şi incompresibile $(\rho = \rho(\vec{r}, t) = const.)$, din ecuaţia de continuitate rezultă:

$$div\ \vec{v} = 0,$$

iar ecuaţia Stokes-Navier devine

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] = \rho\vec{F} - grad\ p + \mu\Delta\vec{v},$$

sau, dacă împărţim prin $\rho \neq 0$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}grad\ p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\,\Delta\vec{v}, \qquad (8.26)$$

unde $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ este *coeficientul de vâscozitate cinematică* al lichidului.

Deoarece lichidul curge doar în direcţia axei Ox (vezi Fig. VIII.3) şi mişcarea este staţionară, rezultă că viteza lui are doar componenta $v_x \equiv u$ diferită de zero şi în plus

$$\vec{v}(x, y, z, t) \equiv \vec{i}\ v_x(x, y) = \vec{i}\ u(x, y).$$

BCU "I.C. BRĂTIANU" / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

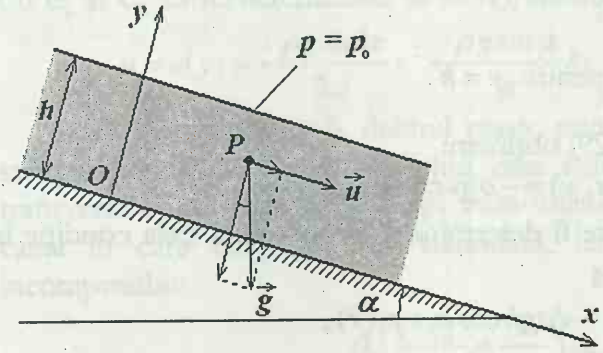


Fig. VIII.3

Atunci, din ecuaţia de continuitate scrisă pentru lichide omogene şi incompresibile ($div\,\vec{v}=0$) rezultă:

$$div\,\vec{v}=\frac{\partial v_x(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

adică $u=u(y)$. Aceasta înseamnă că

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=v_x\frac{\partial}{\partial x}\vec{v}=v_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{i}\;u(y)\right)=0.$$

Ţinând cont şi de faptul că mişcarea este staţionară $\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0\right)$, ecuaţia Stokes-Navier (8.26) devine:

$$0=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\,\Delta\vec{v},$$

sau,

$$0=\rho\vec{F}-\nabla p+\mu\Delta\vec{v}. \qquad (8.27)$$

Proiectând această ecuaţie vectorială pe cele două axe ale reperului xOy ataşat lichidului (vezi Fig. VIII.3) obţinem:

$$Ox:\quad 0=\rho g\sin\alpha-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{d^2u}{dy^2} \qquad (8.28)$$

şi

$$Oy:\quad 0=-\rho g\cos\alpha-\frac{\partial p}{\partial y}. \qquad (8.29)$$

În acest fel, problema noastră devine o problemă de ecuaţiile fizicii matematice, şi anume, trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii (8.28) + (8.29), în domeniul $D=\{x,\,y\,|-\infty<x<+\infty,\;0<y<h\}$, cu condiţiile la limită:

i) $u(y)=0$ pentru $y=0$;

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ii) $\frac{du}{dy}=0$ pentru $y=h$;

iii) $p(x,y)=p_0=const.$ pentru $y=h$.

Integrând ecuaţia (8.29) obţinem:

$$p=p(x,\,y)=-\rho g y\cos\alpha+p_1(x).$$

Funcţia arbitrară $p_1(x)$ poate fi determinată din cea de a treia condiţie la limită. Impunând-o, găsim că

$$p_0=-\rho gh\cos\alpha+p_1(x),$$

de unde,

$$p_1(x)=p_0+\rho gh\cos\alpha=const.$$

Deci,

$$\begin{aligned}p=p(x,\,y)=-\rho g y\cos\alpha+p_1(x)=-\rho g y\cos\alpha+p_0+\\+\rho gh\cos\alpha=p_0+\rho g\left(h-y\right)\cos\alpha.\end{aligned}\tag{8.30}$$

Cu aceasta în (8.28) obţinem:

$$0=\rho g\sin\alpha+\mu\frac{d^2u}{dy^2},$$

adică,

$$\frac{d^2u}{dy^2}=-\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}.$$

Integrând de două ori, găsim succesiv:

$$\frac{du}{dy}=-\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}y+C_1,$$

şi

$$u=-\frac{\rho g\sin\alpha}{2\mu}y^2+C_1y+C_2;\tag{8.31}$$

unde C_1 şi C_2 sunt două constante arbitrare de integrare, ce pot fi determinate din condiţiile i) şi ii). Astfel, avem:

$$\begin{cases}0=C_2,\\ 0=-\dfrac{\rho g\sin\alpha}{\mu}h+C_1,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad C_1=\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}h.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cu C_1 şi C_2 astfel determinate în (8.31), rezultă:

$$u = u(y) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} y^2 + \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} hy = \frac{\rho g}{2\mu}(2h - y) y \sin\alpha . \quad (8.32)$$

2) Pentru a calcula debitul masic printr-o secţiune transversală a stratului de lichid (masa de lichid care străbate unitatea de suprafaţă transversală[1] în unitatea de timp) vom utiliza definiţia acestei mărimi în cazul în care curgerea este staţionară, iar lichidul este omogen şi incompresibil:

$$Q_m = \frac{q_m}{L_z h} = \frac{1}{L_z h} \int_0^h dq_m ,$$

unde

$$dq_m = \frac{dm}{\Delta t} = \frac{\rho dV}{\Delta t} = \frac{\rho\, u(y) \Delta t\, L_z dy}{\Delta t} = \rho\, u(y) L_z dy$$

este masa „elementară" de lichid care străbate suprafaţa transversală „elementară" de lăţime oarecare (dimensiune de-a lungul axei Oz) L_z şi înălţime (dimensiune de-a lungul axei Oy) dy, în unitatea de timp. Ţinând cont de relaţia (8.32), pentru Q_m obţinem:

$$Q_m = \frac{q_m}{L_z h} = \frac{1}{L_z h} \int_0^h \rho\, u(y) L_z dy = \frac{1}{L_z h} \int_0^h \frac{\rho^2 g}{2\mu} L_z (2h - y) y \sin\alpha dy =$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\rho^2 g}{2\mu} (2h - y) y \sin\alpha dy = \frac{\rho^2 g \sin\alpha}{h\mu} \left[\left(\frac{h}{2} y^2 \right)_0^h - \left(\frac{1}{6} y^3 \right)_0^h \right] =$$

$$= \frac{\rho^2 g \sin\alpha}{h\mu} \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{6} \right) = \frac{\rho^2 g h^2 \sin\alpha}{3\mu} . \quad (8.33)$$

4. Să se studieze mişcarea unui lichid vâscos şi greu, care curge sub acţiunea propriei greutăţi, într-un canal de secţiune dreptunghiulară de

[1] Faţă de direcţia de deplasare a lichidului; cu alte cuvinte, suprafaţa este orientată perpendicular pe axa Ox.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

lăţime $2a$ şi înălţime h, ştiind că acest canal este înclinat faţă de orizontală cu unghiul α şi că distribuţia vitezelor la suprafaţa lichidului respectă o lege parabolică de tipul $u(y, h) = u_m\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$, unde u_m este viteza maximă a lichidului la suprafaţă, în mijlocul canalului (vezi Fig. VIII.4).

Rezolvare

Pentru a rezolva problema facem apel la ecuaţia de continuitate,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0 \tag{8.34}$$

şi ecuaţiile Stokes-Navier,

$$\rho\left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)v_i\right] = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(div\,\vec{v}) + \mu\,\Delta v_i, \quad \left(i = \overline{1,3}\right). \tag{8.35}$$

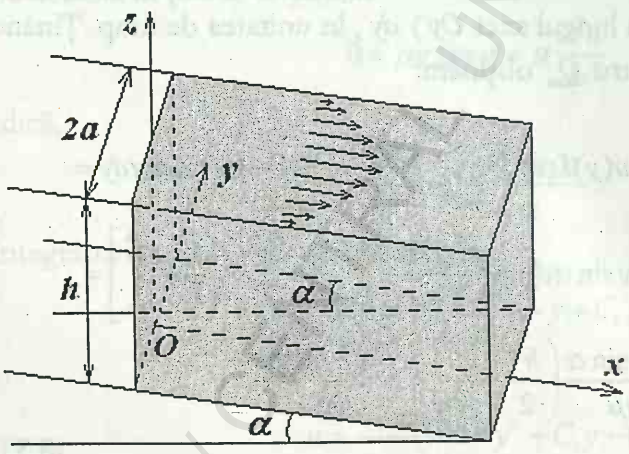


Fig. VIII.4

În ceea ce priveşte forţa masică specifică avem:

$$F_x = g\sin\alpha,\ F_y = 0,$$

$$F_z = -g\cos\alpha,$$

iar pentru viteză (ţinând cont că mişcarea lichidului are loc doar de-a lungul axei Ox) putem scrie:

$$v_x \overset{not.}{=} u,\ v_y = v_z = 0.$$

Întrucât lichidul este omogen şi incompresibil, $\rho = \rho(\vec{r}, t) = const.$, iar din ecuaţia de continuitate rezultă: $div\,\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow u = u(y, z)$, $-\infty < x < \infty$. Dând valori indicelui i din relaţia (8.35)

succesiv, de la unu la trei, ținând cont că $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x}\vec{v} =$

$= u\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{i}\ u(y,\ z)\right) = 0$ și că mișcarea este staționară $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0\right)$, obținem:

$$i = 1: \quad 0 = \rho g \sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{8.36}$$

$$i = 2: \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{8.37}$$

și

$$i = 3: \quad 0 = -\rho g \cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{8.38}$$

Din ecuația (8.37) rezultă că $p = p(x,\ z)$, iar din (8.38) avem:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad p = -\rho g z \cos\alpha + p_1(x). \tag{8.39}$$

Cum pentru $z = h$, $p = p_0$, din relația (8.39) rezultă:

$$p_0 = -\rho g h \cos\alpha + p_1(x),$$

de unde,

$$p_1(x) = p_0 + \rho g h \cos\alpha = const.$$

În aceste condiții, ecuația (Px.3) devine:

$$0 = \rho g \sin\alpha + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

sau, dacă introducem notația $k \overset{not.}{=} -\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k,\ -a < y < a,\ 0 < z < h, \tag{8.40}$$

adică o ecuație de tip Poisson pentru funcția $u = u(y,\ z)$, cu condițiile la limită:

i) $u(y,\ 0) = 0$, $-a \le y \le a$;

ii) $u(-a,\ z) = 0$, $u(a,\ z) = 0$, $0 \le z \le h$;

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iii) $u(y,\ h)=u_m\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right),\ -a\le y\le a,$

unde u_m este viteza maximă la suprafaţa lichidului (la mijlocul canalului, pe direcţia Oy).

Mişcarea lichidului fiind simetrică faţă de planul xOz, este suficient să fie studiată numai în domeniul $0<y<a$ al planului yOz. Pentru aceasta, vom introduce mai întâi noi coordonate, adimensionale, prin relaţiile:

$$u=u_mU,\ y=aY,\ z=aZ,\ \frac{h}{a}=l \text{ şi } k=\frac{u_m}{a^2}K.$$

Cu acestea, problema (8.40) cu condiţiile la limită i)÷iii) devine:

$$\frac{\partial^2U}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial Z^2}=K,\ 0<Y<1,\ 0<Z<l, \tag{8.41}$$

adică o ecuaţie de tip Poisson pentru funcţia $U=U(Y,\ Z)$, cu condiţiile la limită:

(i) $U(Y,\ 0)=0,\ 0\le Y\le 1;$

(ii) $U(1,\ Z)=0,\ 0\le Z\le l;$

(iii) $U(Y,\ l)=1-Y^2,\ 0\le Y\le 1.$

Avem deci de rezolvat o problemă de ecuaţiile fizicii matematice, mai exact, o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul doi, de tip Poisson, cu condiţii la limită precizate. Deoarece condiţiile la limită sunt de speţa I, avem de rezolvat problema lui Dirichlet pentru ecuaţia lui Poisson.

Pentru ecuaţia (8.41) cu condiţiile la limită (i)÷(iii) vom căuta o soluţie de forma:

$$U(Y,Z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)\zeta_n(Z). \tag{8.42}$$

Întrucât

$$\frac{\partial^2U}{\partial Y^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)\zeta_n(Z)$$

şi

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)\frac{d^2\zeta_n(Z)}{dZ^2},$$

ecuația (8.41) ne dă:

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)\left[\frac{d^2\zeta_n(Z)}{dZ^2}-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2\zeta_n(Z)\right]=K\,. \quad (8.43)$$

Pentru a extrage de aici o ecuație diferențială pentru funcțiile $\zeta_n(Z)$ vom scrie membrul drept al relației (8.43) sub următoarea formă:

$$K=K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right). \quad (8.43')$$

Acest lucru este posibil deoarece avem:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos((2n-1)\xi)}{2n-1}=\begin{cases}1, \text{ pentru } 0\le\xi<\frac{\pi}{2},\\ 0, \text{ pentru } \xi=\frac{\pi}{2}.\end{cases} \quad (8.44)$$

Pentru a demonstra această relație vom utiliza următoarele serii uniform şi absolut convergente pentru $|z|<1$:

$$\frac{1}{1+iz}=1-iz-z^2+iz^3+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-iz}=1+iz-z^2-iz^3+\ldots$$

şi

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{2n-2},$$

unde $z=\xi+i\eta$ este un număr complex, iar $i=\sqrt{-1}$. De aici, prin integrare, obținem:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int \frac{1}{1+iz}\,dz\Big[=-i\ln(1+iz)\Big]=\int\left(1-iz-z^2+iz^3+z^4-\ldots\right)dz=$$

$$=\int dz-i\int z\,dz-\int z^2dz+i\int z^3dz+\int z^4dz-\ldots=z-i\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+i\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\ldots,$$

$$\int \frac{1}{1-iz}\,dz\Big[=i\ln(1-iz)\Big]=\int\left(1+iz-z^2-iz^3+z^4+\ldots\right)dz=$$

$$=\int dz+i\int z\,dz-\int z^2dz-i\int z^3dz+\int z^4dz+\ldots=z+i\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-i\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\ldots$$

şi

$$\int \frac{1}{1+z^2}\,dz\Big[=arctg\ z\Big]=\int\left(1-z^2+z^4-z^6+\ldots\right)dz=$$

$$=\int dz-\int z^2dz+\int z^4dz-\int z^6dz+\ldots=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}.$$

Adunând acum primele două integrale rezultă:

$$\int \frac{1}{1+iz}\,dz+\int \frac{1}{1-iz}\,dz=-i\ln(1+iz)+i\ln(1-iz)=-i\Big[\ln(1+iz)-\ln(1-iz)\Big]=$$

$$=-i\ln\frac{1+iz}{1-iz}=\left(z-i\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+i\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\ldots\right)+\left(z+i\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-i\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\ldots\right)=$$

$$=2\left(z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\ldots\right),$$

de unde,

$$\frac{-i}{2}\ln\frac{1+iz}{1-iz}=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}\left(=arctg\ z\right). \qquad (8.45)$$

Să alegem acum $z=e^{i\xi}$. Avem atunci:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{1+ie^{i\xi}}{1-ie^{i\xi}}=\frac{1+i(\cos\xi+i\sin\xi)}{1-i(\cos\xi+i\sin\xi)}=\frac{1-\sin\xi+i\cos\xi}{1+\sin\xi-i\cos\xi}=$$

$$=\frac{(1-\sin\xi+i\cos\xi)(1+\sin\xi+i\cos\xi)}{(1+\sin\xi-i\cos\xi)(1+\sin\xi+i\cos\xi)}=\frac{1+2i\cos\xi-\sin^2\xi-\cos^2\xi}{(1+\sin\xi)^2+\cos^2\xi}=$$

$$=\frac{2i\cos\xi}{2(1+\sin\xi)}=\frac{i\cos\xi}{1+\sin\xi}=\frac{\cos\xi}{1+\sin\xi}e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Dacă notăm

$$f(z)=\frac{1+ie^{i\xi}}{1-ie^{i\xi}}=\frac{\cos\xi}{1+\sin\xi}e^{i\frac{\pi}{2}},$$

având în vedere că

$$\ln f(z)=\ln\left|f(z)\right|+i\arg f(z),$$

unde,

$$\arg f(z)=arctg\frac{\mathrm{Im}\left[f(z)\right]}{\mathrm{Re}\left[f(z)\right]}=\frac{\pi}{2},$$

relația (8.45) devine:

$$-\frac{i}{2}\ln f(z)=-\frac{i}{2}\ln\left(\frac{\cos\xi}{1+\sin\xi}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{i}{2}\ln\left(\frac{\cos\xi}{1+\sin\xi}\right)-\frac{i}{2}\ln e^{i\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{i}{4}\ln\left(\frac{\cos\xi}{1+\sin\xi}\right)^2+\frac{\pi}{4}.$$

Atunci putem scrie:

$$-\frac{i}{4}\ln\left(\frac{\cos\xi}{1+\sin\xi}\right)^2\pm\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{i\xi(2n-1)}}{2n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{\cos(2n-1)\xi}{2n-1}+i\frac{\sin(2n-1)\xi}{2n-1}\right],\qquad(8.46)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

semnul plus corespunzând cazului $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, iar semnul minus intervalului $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Identificând în relația (8.46) părțile reale și imaginare, obținem următoarele formule:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)\xi}{2n-1}=\begin{cases}\frac{\pi}{4}, \text{ pentru } 0\le\xi<\frac{\pi}{2},\\ 0, \text{ pentru } \xi=\pm\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

adică relația (8.44) și

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(2n-1)\xi}{2n-1}=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\cos\xi}{1+\sin\xi}\right)^{2}.$$

Cu aceasta, demonstrația relației (8.44) este încheiată, iar formula (8.43') rezultă din (8.44) punând $\xi=\frac{\pi}{2}Y$. Înlocuind (8.43') în (8.43) obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)\left[\frac{d^2\zeta_n(Z)}{dZ^2}-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2\zeta_n(Z)\right]=$$

$$=K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right),$$

de unde, egalând coeficienții lui $\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)$ din cei doi membri, rezultă pentru $\zeta_n(Z)$ următoarele ecuații diferențiale ordinare:

$$A_n\zeta_n^{\cdot\cdot}(Z)-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}A_n\zeta_n(Z)=\frac{(-1)^{n-1}4K}{(2n-1)\pi},\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right),$$

sau,

$$\zeta_n^{\cdot\cdot}(Z)-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\zeta_n(Z)=\frac{(-1)^{n-1}4K}{(2n-1)\pi A_n},\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right), \qquad (8.47)$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu condițiile la limită: $\zeta_n(0)=0$ și $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)\zeta_n(l)=1-Y^2$.

Pentru fiecare valoare a lui $n\in\mathbb{N}^*$, soluția generală a oricărei ecuații neomogene (8.47) se scrie ca suma dintre soluția generală $\left(\zeta_n^{(o)}\right)$ a ecuației omogene atașate,

$$\zeta_n''(Z)-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\zeta_n(Z)=0,\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right) \tag{8.48}$$

și o soluție particulară a ecuației neomogene corespunzătoare:

$$\zeta_n(Z)=\zeta_n^{(o)}+\zeta_n^{(p)},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Ecuațiile omogene (8.48) au soluții de forma:

$$\zeta_n^{(o)}=B_n\ sh\frac{(2n-1)\pi Z}{2}+C_n\ ch\frac{(2n-1)\pi Z}{2},$$

iar o soluție particulară a ecuației neomogene corespunzătoare trebuie aleasă de forma unei constante (termenul de neomogenitate fiind o constantă), pentru fiecare valoare a lui $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$:

$$\zeta_n^{(p)}=P_n=const_n. \tag{8.49}$$

Constantele P_n, $n\in\mathbb{N}^*$ se determină din condiția ca soluțiile (8.49) să verifice ecuațiile neomogene (8.47):

$$-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}P_n=\frac{(-1)^{n-1}4K}{(2n-1)\pi A_n},$$

de unde,

$$P_n=\frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3\pi^3 A_n}.$$

Deci, soluțiile generale ale ecuațiilor (8.47) sunt

$$\zeta_n(Z)=B_n\ sh\frac{(2n-1)\pi Z}{2}+C_n\ ch\frac{(2n-1)\pi Z}{2}+\frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3\pi^3 A_n}, \tag{8.50}$$

constantele arbitrare de integrare B_n și C_n, $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ urmând a fi determinate din condițiile la limită:

$$\zeta_n(0)=0$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)\zeta_n(l) = 1-Y^2.$$

Astfel, impunând condiţia la limită $\zeta_n(0)=0$, obţinem:

$$\zeta_n(0) = C_n + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n} = 0,$$

de unde,

$$C_n = -\frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n} = \frac{(-1)^{n-1} 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n}, \tag{8.51}$$

iar $\zeta_n(Z)$ devine:

$$\zeta_n(Z) = B_n\, sh\frac{(2n-1)\pi Z}{2} + \frac{(-1)^{n-1} 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n}\, ch\frac{(2n-1)\pi Z}{2} +$$

$$+\frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n} = B_n\, sh\frac{(2n-1)\pi Z}{2} + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n}\left[1 - ch\frac{(2n-1)\pi Z}{2}\right]. \tag{8.52}$$

Pentru a determina constantele arbitrare B_n vom utiliza condiţia la limită:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)\zeta_n(l) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{B_n\, sh\frac{(2n-1)\pi l}{2} + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n}\left[1 - ch\frac{(2n-1)\pi l}{2}\right]\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n B_n\, sh\frac{(2n-1)\pi l}{2} + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3}\left[1 - ch\frac{(2n-1)\pi l}{2}\right]\right\}\times \tag{8.53}$$

$$\times\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) = 1-Y^2,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în care îl vom exprima pe $1-Y^2$ ca o serie de acelaşi tip cu cea din membrul stâng. În acest scop, având în vedere faptul că seria (8.44), adică,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)\xi}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

este uniform şi absolut convergentă, aceasta poate fi integrată termen cu termen şi obţinem:

$$\int\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)\xi}{2n-1}\right]d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\left[(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)\xi}{2n-1}\right]d\xi\right\}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)\xi}{(2n-1)^2}=\int\frac{\pi}{4}d\xi=\frac{\pi}{4}\xi+K_1,$$

unde K_1 este o constantă arbitrară de integrare, ce poate fi determinată din condiţia ca relaţia de mai sus să fie valabilă pentru orice valoare a lui ξ, deci şi pentru $\xi=0$. Impunând această condiţie în relaţia de mai sus obţinem simplu $K_1=0$ şi atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)\xi}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}\xi.$$

Integrând nedefinit încă o dată, găsim:

$$\int\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)\xi}{(2n-1)^2}\right]d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\left[(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)\xi}{(2n-1)^2}\right]d\xi\right\}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)\xi}{(2n-1)^3}=\int\frac{\pi}{4}\xi d\xi=\frac{\pi}{8}\xi^2+K_2,$$

sau,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)\xi}{(2n-1)^3}=-\frac{\pi}{8}\xi^2+K_3, \qquad (8.54)$$

unde $K_3=-K_2$ este o nouă constantă arbitrară de integrare, ce poate fi determinată la fel ca mai sus. Punând deci $\xi=0$ în relaţia (8.54) obţinem:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$K_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$

și atunci,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)\xi}{(2n-1)^3} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} - \xi^2\right), \quad 0 \le \xi \le \frac{\pi}{2}. \tag{8.55}$$

Dacă aici luăm pe ξ de forma $\xi = \frac{\pi}{2} Y$ obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}\left(1 - Y^2\right),$$

de unde,

$$1 - Y^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 32}{(2n-1)^3 \pi^3} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right),$$

care, introdusă în (8.53) conduce la

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n B_n \, sh \frac{(2n-1)\pi l}{2} + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3} \left[1 - ch \frac{(2n-1)\pi l}{2} \right] \right\} \times$$

$$\times \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 32}{(2n-1)^3 \pi^3} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right).$$

Identificând coeficienții lui $\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)$ din cei doi membri ai relației de mai sus, avem:

$$A_n B_n \, sh \frac{(2n-1)\pi l}{2} + \frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3 \pi^3} \left[1 - ch \frac{(2n-1)\pi l}{2} \right] = \frac{(-1)^{n-1} 32}{(2n-1)^3 \pi^3},$$

de unde,

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$B_n = \frac{\dfrac{(-1)^{n-1}32}{(2n-1)^3\pi^3} + \dfrac{(-1)^{n-1}16K}{(2n-1)^3\pi^3}\left[1-ch\dfrac{(2n-1)\pi l}{2}\right]}{A_n\, sh\dfrac{(2n-1)\pi l}{2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{(-1)^{n-1}16}{(2n-1)^3\pi^3}\left[2+K\left(1-ch\dfrac{(2n-1)\pi l}{2}\right)\right]}{A_n\, sh\dfrac{(2n-1)\pi l}{2}}.$$

Cu aceste constante în relația (8.52) găsim:

$$\zeta_n(Z) = \frac{\dfrac{(-1)^{n-1}16}{(2n-1)^3\pi^3}\left[2+K\left(1-ch\dfrac{(2n-1)\pi l}{2}\right)\right]}{A_n\, sh\dfrac{(2n-1)\pi l}{2}} sh\frac{(2n-1)\pi Z}{2} +$$

$$+\frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3\pi^3 A_n}\left[1-ch\frac{(2n-1)\pi Z}{2}\right] = \frac{1}{A_n}\frac{sh\dfrac{(2n-1)\pi Z}{2}}{sh\dfrac{(2n-1)\pi\, l}{2}}\times$$

$$\times\frac{(-1)^{n-1}16}{(2n-1)^3\pi^3}\left[2+K\left(1-ch\frac{(2n-1)\pi l}{2}\right)\right]+\frac{1}{A_n}\frac{(-1)^n 16K}{(2n-1)^3\pi^3}\times$$

$$\times\left[1-ch\frac{(2n-1)\pi Z}{2}\right].$$

Dacă introducem notațiile:

$$\beta(Z) \overset{not.}{=} 1-ch\frac{(2n-1)\pi Z}{2} \text{ şi } \gamma(Z) \overset{not.}{=} sh\frac{(2n-1)\pi Z}{2},$$

$\zeta_n(Z)$ se va scrie mai simplu:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\zeta_n(Z)=\frac{1}{A_n}\frac{(-1)^{n-1}16}{(2n-1)^3\pi^3}\left\{\left[2+K\beta(l)\right]\frac{\gamma(Z)}{\gamma(l)}-K\beta(Z)\right\}. \quad (8.56)$$

Înlocuind pe $\zeta_n(Z)$ din relaţia (8.56) în relaţia (8.42) se obţine în cele din urmă:

$$U(Y,Z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}16}{(2n-1)^3\pi^3}\left\{\left[2+K\beta(l)\right]\frac{\gamma(Z)}{\gamma(l)}-K\beta(Z)\right\}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right),$$

sau, dacă introducem o nouă notaţie prin $\delta(Y)\overset{not.}{=}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)$,

$$U(Y,Z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}16\,\delta(Y)}{(2n-1)^3\pi^3}\left\{\left[2+K\beta(l)\right]\frac{\gamma(Z)}{\gamma(l)}-K\beta(Z)\right\}. \quad (8.57)$$

Pentru a determina pe $u=u(y,z)$, vom rescrie sub formă explicită relaţia (8.57) şi vom reveni la mărimile dimensionale $u=u_mU$, $y=aY$, $z=aZ$, $\frac{h}{a}=l$ şi $k=\frac{u_m}{a^2}K$. Avem

$$U(Y,Z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}16}{(2n-1)^3\pi^3}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi Y}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{\left[2+K\left(1-ch\frac{(2n-1)\pi l}{2}\right)\right]\frac{sh\frac{(2n-1)\pi Z}{2}}{sh\frac{(2n-1)\pi l}{2}}-K\left(1-ch\frac{(2n-1)\pi Z}{2}\right)\right\},$$

de unde,

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$u(y,\,z)=u_m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}16}{(2n-1)^3\,\pi^3}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2a}\right)\times$$

$$\times\left\{\left[2+\frac{ka^2}{u_m}\left(1-ch\frac{(2n-1)\pi h}{2a}\right)\right]\frac{sh\dfrac{(2n-1)\pi z}{2a}}{sh\dfrac{(2n-1)\pi h}{2a}}-\frac{ka^2}{u_m}\left(1-ch\frac{(2n-1)\pi z}{2a}\right)\right\},$$

sau încă,

$$u(y,\,z)=u_m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}16}{(2n-1)^3\,\pi^3}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2a}\right)\times$$

$$\times\left\{\left[2-\frac{\rho g a^2\sin\alpha}{\mu\,u_m}\left(1-ch\frac{(2n-1)\pi h}{2a}\right)\right]\frac{sh\dfrac{(2n-1)\pi z}{2a}}{sh\dfrac{(2n-1)\pi h}{2a}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho g a^2\sin\alpha}{\mu\,u_m}\left(1-ch\frac{(2n-1)\pi z}{2a}\right)\right\}. \tag{8.58}$$

Considerând cazul particular în care $a=h=1\,m$, $\mu=\rho\sin\alpha$, $u_m=1\,m/s$ şi luând $g=10\,m/s^2$, relaţia (8.57) devine:

$$u(y,\,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}32}{(2n-1)^3\,\pi^3}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{\left[1-5\left(1-ch\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)\right]\frac{sh\dfrac{(2n-1)\pi z}{2}}{sh\dfrac{(2n-1)\pi}{2}}+5\left(1-ch\frac{(2n-1)\pi z}{2}\right)\right\},$$

iar în Fig. VIII.5 sunt redate curbele de egală viteză în acest caz. Acestea au fost obţinute cu ajutorul soft-ului Mathematica 4.0 utilizând următoarele linii de comandă:

BCU "I. C. BRĂTIANU" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

```
Remove["Global`*"];
Unprotect[In, Out];
Clear[In, Out];

k = (-1)^(n-1)*32/((2*n-1)^3*Pi^3);
e1 = Cos[((2*n-1)*Pi*y)/2];
e2 = 1-Cosh[((2*n-1)*Pi)/2];
e3 = Sinh[((2*n-1)*Pi*z)/2];
e4 = Sinh[((2*n-1)*Pi)/2];
e5 = 1-Cosh[((2*n-1)*Pi*z)/2];

NSolve[∑_{n=1}^{∞}(k *e1*((1-5*e2)*(e3/e4)+5*e5)) == 0.4, z];
G1 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
NSolve[∑_{n=1}^{∞}(k *e1*((1-5*e2)*(e3/e4)+5*e5)) == 0.6, z];
G2 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
NSolve[∑_{n=1}^{∞}(k *e1*((1-5*e2)*(e3/e4)+5*e5)) == 0.8, z];
G3 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
NSolve[∑_{n=1}^{∞}(k *e1*((1-5*e2)*(e3/e4)+5*e5)) == 1., z];
G4 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
NSolve[∑_{n=1}^{∞}(k *e1*((1-5*e2)*(e3/e4)+5*e5)) == 1.2, z];
G5 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
NSolve[∑_{n=1}^{∞}(k *e1*((1-5*e2)*(e3/e4)+5*e5)) == 1.4, z];
G6 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
NSolve[∑_{n=1}^{∞}(k *e1*((1-5*e2)*(e3/e4)+5*e5)) == 1.6, z];
G7 = Plot[Evaluate[ z /. %], {y, 0, 1}, Frame->True, PlotRange->All];
Show[G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7]
```

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

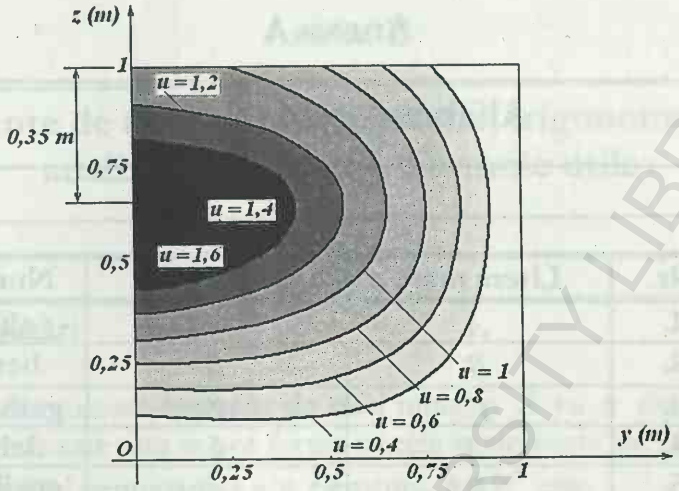


Fig. VIII.5

Din Fig. VIII.5 se poate observa că viteza de curgere sub acțiunea propriei greutăți a lichidului vâscos are valoarea maximă la adâncimea de aproximativ 0,35 *m*.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Anexa A

Alfabetul grec (vechi)

Nr.	Litera mare	Litera mică	Nume
1.	A	α	alfa
2.	B	β	beta
3.	Γ	γ	gamma
4.	Δ	δ	delta
5.	E	ε	epsilon
6.	Z	ζ (variantă: ς)	dzeta
7.	H	η	eta
8.	Θ	θ (variantă: ϑ)	theta
9.	I	ι	iota
10.	K	κ	kappa
11.	Λ	λ	lambda
12.	M	μ	miu
13.	N	ν	niu
14.	Ξ	ξ	csi
15.	O	o	omicron
16.	Π	π	pi
17.	P	ρ	rho
18.	Σ	σ	sigma
19.	T	τ	tau
20.	Υ	υ	ipsilon
21.	Φ	φ (variantă: ϕ)	fi
22.	X	χ	hi
23.	Ψ	ψ	psi
24.	Ω	ω (variantă: ϖ)	omega

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Anexa B

Elemente de analiză combinatorie, trigonometrie şi analiză matematică. Formule utile

B.1. Permutări

Definiţie: Se numesc *permutări* ale unei mulţimi A cu n elemente toate mulţimile ordonate care se pot forma cu cele n elemente ale lui A.

- Numărul permutărilor a n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$ este

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n! . \tag{B.1}$$

Prin definiţie $0! = 1$. Numărul $n!$ se citeşte „n factorial".

Exemplu: Numărul permutărilor a trei elemente, a, b şi c $(abc, acb, bac, bca, cab, cba)$ este $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

- Numărul permutărilor cu repetiţie a n elemente, în care fiecare element se poate repeta până la n ori este

$$\overline{P_n} = n^n . \tag{B.2}$$

Exemplu: Cu elementele a, b şi c putem forma permutările cu repetiţie:

aaa, aab, aac, aba, aca, baa, caa, abc, acb,
bbb, bba, bbc, bab, bcb, abb, cbb, bac, bca,
ccc, cca, ccb, cac, cbc, acc, bcc, cab, cba,

adică $\overline{P_3} = 3^3 = 27$ permutări.

- Numărul permutărilor a n elemente, dintre care α_1 sunt egale între ele, α_2 sunt egale între ele, ..., α_r sunt egale între ele, este egal cu

$$\widetilde{P}_n = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_r!}, \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = n\right). \tag{B.3}$$

Exemplu: Pentru $n = 5$ şi $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$ avem

aaabb, aabab, aabba, abaab, ababa,
abbaa, baaab, baaba, babaa, bbaaa,

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică $\widetilde{P}_5 = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = \dfrac{4\cdot 5}{2} = 10$.

- Proprietăți ale factorialelor:
  - $n! = (n-1)!n$; $n! = (n-2)!(n-1)n$;
  - $n! = \dfrac{(n+1)!}{n+1}$; $n! = \dfrac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)}$.
- Formulele lui Stirling:
  - $n! \cong \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$;
  - $\ln n! \simeq n \ln\left(\dfrac{n}{e}\right) = n \ln n - n$.

Prima formulă a lui Stirling ne permite să calculăm o valoare aproximativă pentru $n!$ la *valori mari* ale lui n. De exemplu, pentru $n = 10$ avem $10! = 3\,628\,800$, iar formula $n! \cong (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$ ne dă $10! \cong 3\,598\,696$, adică ni-l dă pe $10!$ cu eroarea relativă

$$\delta(10!) = \frac{\Delta(10!)}{10!} = \frac{3\,628\,800 - 3\,598\,696}{3\,628\,800} \cong 0{,}0083 = 0{,}8\ \%,$$

deci, mai mică de 1 %.

B.2. Aranjamente

Definiție: Se numesc *aranjamente* a n elemente luate câte m, $(m \le n)$ ale unei mulțimi A cu n elemente, toate submulțimile ordonate cu câte m elemente care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A.

Aranjamentele a n elemente luate câte m se notează cu A_n^m.

- Numărul aranjamentelor a celor n elemente luate câte m este

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad (n \ge m). \qquad \text{(B.4)}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Exemplu: Numărul aranjamentelor a patru elemente a, b, c şi d luate câte două este $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 4 = 12$, adică

$$ab,\ ac,\ ad,$$
$$bc,\ bd,\ ba,$$
$$cd,\ ca,\ cb,$$
$$da,\ db,\ dc.$$

- Proprietăţi:
  - $A_n^n = P_n$;
  - $A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$;
  - $A_n^{n-1} = A_n^n$;
  - $A_n^0 = 1$.

- Numărul *aranjamentelor cu repetiţie* a n elemente luate câte m este

$$\overline{A_n^m} = n^m. \qquad \text{(B.5)}$$

Exemplu: Pentru trei elemente a, b şi c, aranjamentele lor cu repetiţie, de câte două elemente sunt în număr de $\overline{A_3^2} = 3^2 = 9$, adică:

$$aa,\ ab,\ ac,$$
$$bb,\ bc,\ ba,$$
$$cc,\ ca,\ cb.$$

- Numărul funcţiilor injective definite pe o mulţime cu m elemente cu valori într-o altă mulţime cu n elemente $(n \geq m)$ este egal cu A_n^m.
- Numărul funcţiilor bijective n elemente cu valori într-o altă mulţime cu n elemente este egal cu $A_n^n = n!$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B.3. Combinări

Definiție: Se numesc combinări a n elemente luate câte m, $(m \le n)$ ale unei mulțimi A cu n elemente toate submulțimile cu câte m elemente, care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A.

Combinările a n elemente luate câte m se notează cu C_n^m.

- Numărul combinărilor a n elemente luate câte m este

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!}. \qquad \text{(B.6)}$$

Exemplu: Numărul combinărilor a patru elemente a, b, c și d luate câte trei este $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4$, adică

$$abc \quad abd \quad bcd \quad cda.$$

- Proprietăți. Pentru $0 \le m \le n$ avem:
  - $C_n^1 = n$;
  - $C_n^m = C_n^{n-m}$;
  - $C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1$;
  - $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;
  - $C_n^m = C_{n+1}^{m-1} + C_{n+2}^{m-1} + ... + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$.
- Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n.
- Numărul combinărilor cu repetiție a n elemente luate câte m este

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)...(n+m-1)}{m!}. \qquad \text{(B.7)}$$

Exemplu: Cu trei elemente a, b și c se pot forma următoarele combinări cu repetiție de câte două elemente: aa, bb, cc, ab, ac, bc. Deci $n=3$, $m=2$ și $\overline{C_3^2} = C_4^2 = 6$ combinări cu repetiție.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B.4. Elemente de trigonometrie. Formule utile

Unități de măsură pentru unghiuri. Transformarea gradelor sexazecimale în radiani

Unitățile de măsură pentru unghiuri și arce sunt:

- *gradul sexagesimal* ($^\circ$), cu submultiplii săi: *minutul sexagesimal* ($'$) și *secunda sexagesimală* ($''$);
- *radianul* (rad);
- *unghiul drept* (dr) și
- *gradul centesimal* (^{g}), cu submultiplii săi: *minutul centesimal* (^{c}) și *secunda centesimală* (^{cc}):

$1^\circ = 60' = 3600''$; $1' = 60''$;

$1^g = 100^c = 10\,000^{cc}$; $1^c = 100^{cc}$;

$90^\circ = \pi/2$ rad $= 100^g = 1$ dr.

Relații importante între aceste unități pentru unghiuri:

$1^\circ = 0,017453$ rad; $1' = 0,000291$ rad; $1'' = 0,000005$ rad;

1 rad $= 57^\circ 17' 45'' = 0,6366198$ dr $= 63,66198^g$;

$30^\circ = \pi/6$ rad; $45^\circ = \pi/4$ rad; $60^\circ = \pi/3$ rad; $90^\circ = \pi/2$ rad;

$180^\circ = \pi$ rad; $270^\circ = 3\pi/2$ rad; $360^\circ = 2\pi$ rad;

$\pi = 3,14159265358979323846264 34...$

Definiția funcțiilor trigonometrice ale unui unghi ascuțit într-un triunghi dreptunghic

Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A, b și c sunt lungimile catetelor și a lungimea ipotenuzei, atunci:

$\sin B = b/a$; $\cos B = c/a$	$\sec B = 1/\cos B = a/c$
$\operatorname{tg} B = b/c$; $\operatorname{cotg} B = c/b$	$\operatorname{cosec} B = 1/\sin B = a/b$
$\sin C = c/a$; $\cos C = b/a$	$\sec C = 1/\cos C = a/b$
$\operatorname{tg} C = c/b$; $\operatorname{cotg} C = b/c$	$\operatorname{cosec} C = 1/\sin C = a/c$

BCU "MIHAI EMINESCU" IAȘI UNIVERSITY LIBRARY

Exprimarea rațională a funcțiilor trigonometrice ale unui unghi cu ajutorul tangentei jumătății unghiului $tg(u/2)=t$

$$\sin u=2t\left(1+t^2\right);\qquad \cos u=\left(1-t^2\right)/\left(1+t^2\right);\qquad tg\ u=2t/\left(1-t^2\right);$$

$$\operatorname{cotg} u=\left(1-t^2\right)/(2t);\quad \sec u=\left(1+t^2\right)/\left(1-t^2\right);\quad \operatorname{cosec} u=\left(1+t^2\right)/(2t).$$

Liniarizarea unor puteri ale sinusului şi cosinusului

$$\sin^2 u=(1-\cos 2u)/2;$$

$$\sin^3 u=(3\sin u-\sin 3u)/4;$$

$$\sin^4 u=(3-4\cos 2u+\cos 4u);$$

$$\sin^5 u=(10\sin u-5\sin 3u+\sin 5u)/16;$$

$$\cos^2 u=(1+\cos 2u)/2;$$

$$\cos^3 u=(3\cos u+\cos 3u)/4;$$

$$\cos^4 u=(3+4\cos 2u+\cos 4u)/8;$$

$$\cos^5 u=(10\cos u+5\cos 3u+\cos 5u)/16;$$

$$\sin^7 u=(35\sin u-21\sin 3u+7\sin 5u-\sin 7u)/64;$$

$$\cos^7 u=(35\cos u-21\cos 3u+7\cos 5u-\cos 7u)/64;$$

$$\sin^8 u=(35-56\cos 2u+28\cos 4u-8\cos 6u+\cos 8u)/128;$$

$$\cos^8 u=(35+56\cos 2u+28\cos 4u+8\cos 6u+\cos 8u)/128.$$

Semnele valorilor funcțiilor trigonometrice fundamentale

Cadranul \ Fucția	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{ctg} u$
I $(0<u<\pi/2)$	+	+	+	+
II $(\pi/2<u<\pi)$	+	-	-	-
III $(\pi<u<3\pi/2)$	-	-	+	+
IV $(3\pi/2<u<2\pi)$	-	+	-	-

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Formule de reducere la un unghi ascuțit

Fucția\Argumentul	$v=\frac{\pi}{2}\pm u$	$v=\pi\pm u$	$v=\frac{3\pi}{2}\pm u$	$v=2\pi-u$	$v=-u$
$\sin v$	$\cos u$	$\mp\sin u$	$-\cos u$	$-\sin u$	$-\sin u$
$\cos v$	$\mp\sin u$	$-\cos u$	$\pm\sin u$	$\cos u$	$\cos u$
$\operatorname{tg} v$	$\mp\operatorname{cotg} u$	$\pm\operatorname{tg} u$	$\mp\operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{tg} u$	$-\operatorname{tg} u$
$\operatorname{ctg} v$	$\mp\operatorname{tg} u$	$\pm\operatorname{cotg} u$	$\mp\operatorname{tg} u$	$-\operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{cotg} u$

Expresiile funcțiilor $\sin^2 u$, $\cos^2 u$, $\operatorname{tg}^2 u$ şi $\operatorname{ctg}^2 u$ în funcție de pătratul unei funcții trigonometrice fundamentale

	$\sin^2 u$	$\cos^2 u$	$\operatorname{tg}^2 u$	$\operatorname{ctg}^2 u$
$\sin^2 u$		$1-\cos^2 u$	$\frac{\operatorname{tg}^2 u}{1+\operatorname{tg}^2 u}$	$\left(1+\operatorname{ctg}^2 u\right)^{-1}$
$\cos^2 u$	$1-\sin^2 u$		$\left(1+\operatorname{tg}^2 u\right)^{-1}$	$\frac{\operatorname{ctg}^2 u}{1+\operatorname{ctg}^2 u}$
$\operatorname{tg}^2 u$	$\frac{\sin^2 u}{1-\sin^2 u}$	$\frac{1-\cos^2 u}{\cos^2 u}$		$1/\operatorname{ctg}^2 u$
$\operatorname{ctg}^2 u$	$\frac{1-\sin^2 u}{\sin^2 u}$	$\frac{\cos^2 u}{1-\cos^2 u}$	$1/\operatorname{tg}^2 u$	

Valorile funcțiilor trigonometrice fundamentale ale câtorva unghiuri importante

Cadran	Unghiul u	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{cotg} u$
I	$0°$	0	1	0	nu e definită
	$15°=\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
	$18°=\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
	$30°=\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
	$36°=\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

	Unghiul u	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{ctg} u$
I	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
	$72^\circ = \frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
	$75^\circ = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	1	0	nu e definită	0
II	$108^\circ = \frac{3\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
	$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
	$135^\circ = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1
	$150^\circ = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
	$162^\circ = \frac{9\pi}{10}$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{-4}$	$-\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
	$180^\circ = \pi$	0	-1	0	nu e definită
III	$210^\circ = \frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	$225^\circ = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	$240^\circ = \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

	Unghiul u	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{ctg} u$
III	$270° = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	nu e definită	0
IV	$300° = \frac{5\pi}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$
	$315° = \frac{7\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	$330° = \frac{11\pi}{6}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
	$360° = 2\pi$	0	1	0	nu e definită

Funcțiile trigonometrice exprimate cu ajutorul uneia dintre ele

Funcția cunoscută	Funcția necunoscută: $\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{ctg} u$	$\frac{\sec u}{1} = \frac{1}{\cos u}$	$\frac{\operatorname{cosec} u}{1} = \frac{1}{\sin u}$
$\sin u$	$\sin u$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\pm 1}$	$\frac{\pm \sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\pm \sin u}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}$	$\frac{1}{\sin u}$
$\cos u$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 u}}{\pm 1}$	$\cos u$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 u}}{\pm \cos u}$	$\frac{\pm \cos u}{\sqrt{1-\cos^2 u}}$	$\frac{1}{\cos u}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1-\cos^2 u}}$
$\operatorname{tg} u$	$\frac{\pm \operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}$	$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\operatorname{tg} u}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}{\pm 1}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}{\pm \operatorname{tg} u}$
$\operatorname{ctg} u$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 u}}$	$\frac{\pm \operatorname{ctg} u}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 u}}$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} u}$	$\operatorname{ctg} u$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 u}}{\pm \operatorname{ctg} u}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 u}}{\pm 1}$
$\sec u$	$\frac{\sqrt{\sec^2 u-1}}{\pm \sec u}$	$\frac{1}{\sec u}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 u-1}}{\pm 1}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{\sec^2 u-1}}$	$\sec u$	$\frac{\pm \sec u}{\sqrt{\sec^2 u-1}}$
$\operatorname{cosec} u$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} u}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u-1}}{\pm \operatorname{cosec} u}$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u-1}}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u-1}}{\pm 1}$	$\frac{\pm \operatorname{cosec} u}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u-1}}$	$\operatorname{cosec} u$

BCU IAȘI CENTRALA UNIVERSITARĂ

Funcțiile trigonometrice fundamentale ale unor sume și diferențe de unghiuri

$\sin(u\pm v)=\sin u\cos v\pm\cos u\sin v$	$\cos(u\pm v)=\cos u\cos v\mp\sin u\sin v$
$\operatorname{tg}(u\pm v)=\dfrac{\operatorname{tg}u\pm\operatorname{tg}v}{1\mp\operatorname{tg}u\ \operatorname{tg}v}$	$\operatorname{cotg}(u\pm v)=\dfrac{\operatorname{cotg}u\ \operatorname{cotg}v\mp 1}{\operatorname{cotg}v\pm\operatorname{cotg}u}$
$\sin(u+v+w)=\sin u\cos v\cos w+\sin v\cos w\cos u+\sin w\cos u\cos v-\sin u\sin v\sin w$	
$\cos(u+v+w)=\cos u\cos v\cos w-\sin u\sin v\cos w-\sin v\sin w\cos u-\sin u\sin w\cos v$	
$\operatorname{tg}(u+v+w)=\dfrac{\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v+\operatorname{tg}w-\operatorname{tg}u\ \operatorname{tg}v\ \operatorname{tg}w}{1-(\operatorname{tg}u\ \operatorname{tg}v+\operatorname{tg}v\ \operatorname{tg}w+\operatorname{tg}w\ \operatorname{tg}u)}$	
$\operatorname{cotg}(u+v+w)=\dfrac{\operatorname{cotg}u\ \operatorname{cotg}v\ \operatorname{cotg}w-\operatorname{cotg}u-\operatorname{cotg}v-\operatorname{cotg}w}{\operatorname{cotg}u\ \operatorname{cotg}v+\operatorname{cotg}v\ \operatorname{cotg}w+\operatorname{cotg}w\ \operatorname{cotg}u-1}$	

Câteva aplicații ale acestor formule:

$$\sin(90^\circ-u)=\cos u;\quad \cos(90^\circ-u)=\sin u;\quad tg(90^\circ-u)=\operatorname{cotg}u;$$
$$\operatorname{cotg}(90^\circ-u)=\operatorname{tg}u;\quad \sin(\pi-u)=\sin u;\quad \cos(\pi-u)=-\cos u;$$
$$\operatorname{tg}(\pi-u)=-\operatorname{tg}u;\quad \operatorname{cotg}(\pi-u)=-\operatorname{cotg}u.$$

Formule pentru transformarea unor produse de funcții trigonometrice fundamentale în sume de funcții trigonometrice corespunzătoare

$\sin u\cos v=\frac{[\sin(u+v)+\sin(u-v)]}{2}$	$\operatorname{tg}u\ \operatorname{tg}v=\frac{\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v}{\operatorname{cotg}u+\operatorname{cotg}v}$
$\cos u\cos v=\frac{[\cos(u+v)+\cos(u-v)]}{2}$	$\operatorname{cotg}u\ \operatorname{cotg}v=\frac{\operatorname{cotg}u+\operatorname{cotg}v}{\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v}$
$\sin u\sin v=\frac{\cos(u-v)-\cos(u+v)}{2}$	$\operatorname{cotg}u\ \operatorname{tg}v=\frac{\operatorname{cotg}u+\operatorname{tg}v}{\operatorname{tg}u+\operatorname{cotg}v}$
$4\sin u\sin v\sin w=\sin(u+v-w)+\sin(-u+v+w)+\sin(u-v+w)-\sin(u+v+w)$	
$4\sin u\cos v\cos w=\sin(u+v-w)-\sin(-u+v+w)+\sin(u-v+w)+\sin(u+v+w)$	
$4\sin u\sin v\cos w=-\cos(u+v-w)+\cos(-u+v+w)+\cos(u-v+w)-\cos(u+v+w)$	
$4\cos u\cos v\cos w=\cos(-u+v-w)+\cos(u-v+w)+\cos(u+v-w)+\cos(u+v+w)$	

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Funcțiile trigonometrice ale jumătății, dublului şi triplului unui unghi

i) Funcțiile trigonometrice fundamentale ale jumătății unghiului

Funcția căutată	Expresia ei
$\sin(u/2)$	$\pm\sqrt{(1-\cos u)/2}$
$\cos(u/2)$	$\pm\sqrt{(1+\cos u)/2}$
$\operatorname{tg}(u/2)$	$\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}{\operatorname{tg} u}=\frac{\sin u}{1+\cos u}=\frac{1-\cos u}{\sin u}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$
$\operatorname{cotg}(u/2)$	$\frac{1}{-\operatorname{cotg} u\pm\sqrt{\operatorname{cotg}^2 u+1}}=\frac{\sin u}{1-\cos u}=\frac{1+\cos u}{\sin u}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{1-\cos u}}$

ii) Funcțiile trigonometrice fundamentale ale dublului unghiului

Funcția căutată	Expresia ei
$\sin 2u$	$2\sin u\cos u=\pm 2\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}=\pm 2\cos u\sqrt{1-\cos^2 u}$
$\cos 2u$	$\cos^2 u-\sin^2 u=2\cos^2 u-1=1-2\sin^2 u$
$\operatorname{tg} 2u$	$(2\operatorname{tg} u)/(1-\operatorname{tg}^2 u)$
$\operatorname{cotg} 2u$	$(\operatorname{cotg}^2 u-1)/(2\operatorname{cotg} u)$
$\sec 2u$	$\sec^2 u/(2-\sec^2 u)$
$\operatorname{cosec} 2u$	$\pm(\operatorname{cosec}^2 u)/2\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u-1}$

iii) Funcțiile trigonometrice fundamentale ale triplului unghiului

Funcția căutată	Expresia ei
$\sin 3u$	$3\sin u\cos^2 u-\sin^3 u=3\sin u-4\sin^3 u$
$\cos 3u$	$\cos^3 u-3\cos u\sin^2 u=4\cos^3 u-3\cos u$
$\operatorname{tg} 3u$	$(3\operatorname{tg} u-\operatorname{tg}^3 u)/(1-3\operatorname{tg}^2 u)$
$\operatorname{cotg} 3u$	$(\operatorname{cotg}^3 u-3\operatorname{cotg} u)/(3\operatorname{cotg}^2 u-1)$

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITARĂ / LIBRARY

Alte formule utile:

$\sin 4u = 2\sin 2u \cdot \cos 2u$; $\cos 4u = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1$;

$\operatorname{tg} 4u = \left(4\operatorname{tg} u - 4\operatorname{tg}^3 u\right) \Big/ \left(1 - 6\operatorname{tg}^2 u + \operatorname{tg}^4 u\right)$;

$\operatorname{cotg} 4u = \left(\operatorname{cotg}^4 u - 6\operatorname{cotg}^2 u + 1\right) \Big/ \left(4\operatorname{cotg}^3 u - 4\operatorname{cotg} u\right)$.

Formule de transformare a unor sume de funcţii trigonometrice în produse (formule calculabile prin logaritmi)

$\sin u + \sin v = 2\sin\left((u+v)/2\right)\cos\left((u-v)/2\right)$;

$\sin u - \sin v = 2\sin\left(u - v/2\right)\cos\left((u+v)/2\right)$;

$\cos u + \cos v = 2\cos\left((u+v)/2\right)\cos\left((u-v)/2\right)$;

$\cos u - \cos v = 2\sin\left((u+v)/2\right)\sin\left((u-v)/2\right)$;

$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v = \left(\sin(u+v)\right) \Big/ \left(\cos u \cos v\right)$; $\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = \left(\sin(u-v)\right) \Big/ \left(\cos u \cos v\right)$;

$\operatorname{cotg} u + \operatorname{cotg} v = \left(\sin(v+u)\right) \Big/ \left(\sin u \sin v\right)$;

$\operatorname{cotg} u - \operatorname{cotg} v = \left(\sin(v-u)\right) \Big/ \left(\sin u \sin v\right)$;

$1 - \cos u = 2\sin^2(u/2)$; $1 + \cos u = 2\cos^2(u/2)$; $1 \pm \sin 2u = (\sin u \pm \cos u)^2$;

$1 \pm \sin u = \sin(\pi/2) \pm \sin u$; $1 \pm \operatorname{tg} u = \operatorname{tg}(\pi/4) \pm \operatorname{tg} u$;

$\sin u + \cos u = \sqrt{2}\sin(u + \pi/4) = \sqrt{2}\cos(u - \pi/4)$;

$\sin u - \cos u = \sqrt{2}\sin(u - \pi/4) = -\sqrt{2}\cos(u + \pi/4)$.

Identităţi pentru funcţiile trigonometrice ale unghiurilor A, B şi C ale unui triunghi oarecare

$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos(A/2) \cdot \cos(B/2) \cdot \cos(C/2)$;

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin(A/2) \cdot \sin(B/2) \cdot \sin(C/2)$;

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2;$$

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$;

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$;

BCU "Al. I. Cuza" IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$;

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$;

$\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C=2-2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$;

$\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$;

$\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C=4\cos 2A\cos 2B\cos 2C-1$;

$\operatorname{tg}(A/2)\cdot\operatorname{tg}(B/2)+\operatorname{tg}(B/2)\cdot\operatorname{tg}(C/2)+\operatorname{tg}(C/2)\cdot\operatorname{tg}(A/2)=1$;

$\operatorname{cotg}(A/2)+\operatorname{cotg}(B/2)+\operatorname{cotg}(C/2)=\operatorname{cotg}(A/2)\cdot\operatorname{cotg}(B/2)\cdot\operatorname{cotg}(C/2)$;

$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$, (Relația lui Cagnoli);

$\operatorname{cotg}A\ \operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}B\ \operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}C\ \operatorname{cotg}A=1$;

$2\cos A\cos B\cos C(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C)=$

$=\operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(B/2)\operatorname{tg}(C/2)(\sin A+\sin B+\sin C)^2$;

$4\sin^2 A\ \sin^2 B\ \sin^2 C=(\sin A+\sin B+\sin C)(-\sin A+\sin B+\sin C)\times$

$\times(\sin A-\sin B+\sin C)(\sin A+\sin B-\sin C)$.

Inegalități verificate de funcțiile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi oarecare si de alte elemente ale acestuia

$8\sin(A/2)\cdot\sin(B/2)\cdot\sin(C/2)\le 1$;

$4\left[\sin^2(A/2)+\sin^2(B/2)+\sin^2(C/2)\right]\ge 3$;

$8\cos(A/2)\cdot\cos(B/2)\cdot\cos(C/2)\le 3\sqrt{3}$; $\sin(A/2)<\cos(B/2)\cdot\cos(C/2)$;

$3\sqrt{3}\left[\operatorname{tg}(A/2)\cdot\operatorname{tg}(B/2)\cdot\operatorname{tg}(C/2)\right]\le 1$; $\operatorname{tg}(A/2)+\operatorname{tg}(B/2)+\operatorname{tg}(C/2)\ge\sqrt{3}$;

$8\cos A\cos B\cos C\le 1$; $8\sin A\sin B\sin C\le 3\sqrt{3}$;

$\operatorname{tg}^2(A/2)+\operatorname{tg}^2(B/2)+\operatorname{tg}^2(C/2)\ge 1$; $2(\sin A+\sin B+\sin C)\le 3\sqrt{3}$;

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$2 \le 2(\cos A + \cos B + \cos C) \le 3$; $\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C + \operatorname{tg}C \cdot \operatorname{tg}A \ge 9$;

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \sin A + \sin B + \sin C$; $p \ge 3R \cdot \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}$;

$a^2 + b^2 + c^2 \ge 3\sqrt{3}S$; $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$; $27Rr \le 2p^2$; $p \ge 3r\sqrt{3}$; $R \ge 2r$.

Relaţii între elementele unui triunghi oarecare

a) Teorema sinusurilor: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

b) Teorema cosinusurilor:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

c) Teorema tangentelor (relaţiile lui Neper):

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\left[(A-B)/2\right]}{\operatorname{tg}\left[(A+B)/2\right]}; \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\left[(B-C)/2\right]}{\operatorname{tg}\left[(B+C)/2\right]}; \quad \frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\left[(C-A)/2\right]}{\operatorname{tg}\left[(C+A)/2\right]};$$

$$\operatorname{tg}A = \frac{a\sin B}{c - a\cos B} = \frac{a\sin C}{b - a\cos C}; \quad \operatorname{tg}B = \frac{b\sin C}{a - b\cos C} = \frac{b\sin A}{c - b\cos A};$$

$$\operatorname{tg}C = \frac{c\sin A}{b - c\cos A} = \frac{c\sin B}{a - c\cos B}.$$

d) Teorema proiecţiilor:

$a = b\cos C + c\cos B$; $b = c\cos A + a\cos C$; $c = a\cos B + b\cos A$.

e) Formulele lui Karl Mollweide:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left[(A-B)/2\right]}{\sin(C/2)}; \quad \frac{b+c}{a} = \frac{\cos\left[(B-C)/2\right]}{\sin(A/2)}; \quad \frac{c+a}{b} = \frac{\cos\left[(C-A)/2\right]}{\sin(B/2)};$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left[(A-B)/2\right]}{\cos(C/2)}; \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin\left[(B-C)/2\right]}{\cos(A/2)}; \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin\left[(C-A)/2\right]}{\cos(B/2)}.$$

f) Alte relaţii importante:

- $\sin(a/2) = \sqrt{(p-b)(p-c)/bc}$; $\cos(A/2) = \sqrt{p(p-a)/bc}$;
  $\operatorname{tg}(A/2) = \sqrt{(p-b)(p-c)/p(p-a)}$ şi analoagele acestora;
- $a\cos A + B\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C$;
- $r = (p-a)\operatorname{tg}(A/2) = (p-b)\operatorname{tg}(B/2) = (p-c)\operatorname{tg}(C/2)$;
- $p - a = 4R\cos(A/2)\cdot\sin(B/2)\cdot\sin(C/2)$ şi analoagele acesteia;

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- $h_a = 2R\sin B\sin C$; $r_a = r + a\ \mathrm{tg}(A/2)$; $p = 4R\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2)$.
- $r = 4R\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2)$; $r = p\ \mathrm{tg}(A/2)\mathrm{tg}(B/2)\mathrm{tg}(C/2)$.

Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice în cazurile tip

Cazul	Datele	Necunoscutele	Formule de rezolvare			
I	$A=90^\circ, b, c$	B, a, C, S	$\mathrm{tg}\,B = b/c$ $\mathrm{cotg}\,B = c/b$	$\mathrm{tg}\,C = c/b$ $\mathrm{cotg}\,C = b/c$	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$ $a = b/\cos\hat{C}$	$S = bc/2$
II	$A=90^\circ, a, b$	B, c, C, S	$\sin B = b/a$ $C = 90^\circ - B$	$\cos C = b/a$ $B = 90^\circ - C$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $c = a\cos B$	$S = b\sqrt{a^2 - b^2}/2$ $S = (1/2)ab\sin\hat{C}$
III	$A=90^\circ, B, a$	C, c, b, S	$C = 90^\circ - B$	$b = a\sin B$ $b = a\cos C$	$c = a\sin C$ $c = a\cos B$	$S = (1/4)a^2\sin 2B$
IV	$A=90^\circ, B, b$	C, c, a, S	$C = 90^\circ - B$	$a = b/\sin B$ $a = b/\cos C$	$c = b\ \mathrm{tg}\,C$ $c = b\ \mathrm{cotg}\,B$	$S = (1/2)b^2\mathrm{cotg}\,B$

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvarea triunghiurilor oarecare în cazurile tip

Caz	Date	Necunoscute	Formule de rezolvare			
I	B,C,a	A,b,c,S	$A=\pi+\frac{B+C}{-1}$	$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$	$c=(a\sin C)/\sin A$	$S=(1/2)bc\sin A$
	A,B,a	C,b,c,S	$C=\pi+\frac{A+B}{-1}$	$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$	$c=(a\sin C)/\sin A$	$S=\frac{(a^2/2)\sin B\sin C}{\sin A}$.
II	C,a,b	A,B,c,S	$\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{C}{2};\\ A+B=180^\circ-C\end{cases}$		$c=(a\sin C)/\sin A$	$S=\frac{ab\sin C}{2}$
III	A,a,b	B,C,c,S	$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$	$C=\pi+\frac{A+B}{-1}$	$c=(a\sin C)/\sin A$ $c=b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$ $c=(b\sin C)/\sin B$	$S=(1/2)bc\sin A;$ $S=(b/a)\sin A\times$ $\times\left(b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}\right)$
IV	a,b,c	A,B,C,S	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $2p=a+b+c$.			
			$\operatorname{tg}(A/2)=\sqrt{(p-b)(p-c)/(p-a)}$; $\cos(B/2)=\sqrt{p(p-b)/ac}$; $\sin(c/2)=\sqrt{(p-a)(p-b)/ab}$			

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Observație: În cazul III putem avea drept soluție: două triunghiuri, un triunghi sau nici un triunghi, cu datele A, a, b.

Într-adevăr, apariția radicalului $\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$ în expresia lui c impune o discutare a semnului cantității de sub radical. Pe scurt, această discuție este:

- $A>90^\circ$

$a>b \Rightarrow$ un singur triunghi;
$a\le b \Rightarrow$ nici un triunghi.

- $A=90^\circ$

$a>b \Rightarrow$ un singur triunghi;
$a\le b \Rightarrow$ nici un triunghi.

- $A<90^\circ$

i) $a<b\sin A \Rightarrow$ nici un triunghi;

ii) $a=b\sin A \Rightarrow$ un triunghi dreptunghic, $B=90^\circ$;

iii) $a>b\sin A$: $\begin{cases} a>b \Rightarrow \text{ un singur triunghi;} \\ a=b \Rightarrow \text{ un singur triunghi isocel;} \\ a<b \Rightarrow \text{ două triunghiuri.} \end{cases}$

Produse. Sume. Inegalități și identități remarcabile

- $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\ \ldots\ \cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=n/2^{n-1}$;
- $\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdot\ \ldots\ \cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\sqrt{n}/2^{n-1}$;
- $\cos\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n}\cdot\ \ldots\ \cdot\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\sqrt{n}/2^{n-1}$;
- $\sin\frac{\pi}{4n}\cdot\sin\frac{3\pi}{4n}\cdot\ \ldots\ \cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\sqrt{2}/2^{n}$;
- $\cos\frac{\pi}{4n}\cdot\cos\frac{3\pi}{4n}\cdot\ \ldots\ \cdot\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\sqrt{2}/2^{n-1}$;
- $\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\ \ldots\ \cdot\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}/2^{n}$;
- $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\ \ldots\ \cdot\cos\frac{n\pi}{2n+1}=1/2^{n}$;

BCU IAȘI CENTRU UNIVERSITY LIBRARY

- $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\ \ldots\ \cdot\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=(-1)^n/2^{2n}$;
- $\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{4\pi}{2n+1}\cdot\ \ldots\ \cdot\cos\frac{2^n\pi}{2n+1}=\begin{cases}\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^n}, & \text{n impar;}\\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}, & \text{n par;}\end{cases}$
- $\cos(x/2)\cdot\cos\left(x/2^2\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\cos\left(x/2^n\right)=\sin x/\left[2^n\sin\left(x/2^n\right)\right]$;
- $(2\cos x-1)\cdot(2\cos 2x-1)\cdot\ldots\cdot\left(2\cos\left(2^{n-1}x\right)-1\right)=\frac{2\cos\left(2^n x\right)+1}{1+2\cos x}$;
  $1+2\cos x\neq 0$;
- $\sin x+\sin(x+h)+\ \ldots\ +\sin(x+nh)=\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}\sin\frac{2x+nh}{2}}{\sin(h/2)}$, $\sin(h/2)\neq 0$;
- $\cos x+\cos(x+h)+\ \ldots\ +\cos(x+nh)=\frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}\cos\frac{2x+nh}{2}}{\sin(h/2)}$,
  $\sin(h/2)\neq 0$;
- $\sin x+\sin 3x+\ \ldots\ +\sin(2n-1)x=\left(\sin^2 nx\right)/\sin x$, $\sin x\neq 0$;
- $\cos x+\cos 3x+\ \ldots\ +\cos(2n-1)x=\left[\sin(2nx)\right]/2\sin x$, $\sin x\neq 0$;
- $\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{cotg}2x+\ \ldots\ +\operatorname{tg}\left(2^{n-1}x\right)+\operatorname{cotg}\left(2^{n-1}x\right)=$
  $=2\left[\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}\left(2^n x\right)\right]$;
- $\operatorname{tg}x+(1/2)\operatorname{tg}(x/2)+(1/4)\operatorname{tg}(x/4)+\ \ldots\ +\left(1/2^n\right)\operatorname{tg}\left(x/2^n\right)=$
  $\left(1/2^n\right)\operatorname{cotg}\left(x/2^n\right)-2\operatorname{cotg}(2x)$;
- $1+a\cos x+a^2\cos 2x+\ \ldots\ +a^n\cos nx=\frac{a^{n+2}\cos nx-a^{n+1}\cos(n+1)x-a\cos x+1}{a^2-2a\cos x+1}$;
- $a\sin x+a^2\sin 2x+\ \ldots\ +a^n\sin nx=\frac{a^{n+2}\sin nx-a^{n+1}\sin(n+1)x+a\sin x}{a^2-2a\cos x+1}$;
- $\operatorname{arctg}(1/3)+\operatorname{arctg}(1/7)+\ \ldots\ +\operatorname{arctg}\left(1/(n^2+n+1)\right)=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n+1}\right)$,
  $n\in\mathbb{N}^*$;

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- $\operatorname{arctg}(1/2)+\operatorname{arctg}(1/8)+\ \ldots\ +\operatorname{arctg}\left(1/(2n^2)\right)=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2n+1}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$;
- $\cos(2\pi/7)+\cos(4\pi/7)+\cos(6\pi/7)=-1/2$;
- $\cos(\pi/19)+\cos(3\pi/19)+\ \ldots\ +\cos(17\pi/19)=1/2$;
- $\operatorname{arctg}(1/2)+\operatorname{arctg}(1/3)=\pi/4$;
- $4\operatorname{arctg}(1/5)-\operatorname{arctg}(1/239)=\pi/4$, (Machin);
- $\operatorname{arctg}(1/3)+\operatorname{arctg}(1/5)+\operatorname{arctg}(1/7)+\operatorname{arctg}(1/8)=\pi/4$;
- $8\operatorname{arctg}(1/10)-\operatorname{arctg}(1/239)-\operatorname{arctg}(1/515)=\pi/4$, (Meisel);
- $24\operatorname{arctg}(1/8)+8\operatorname{arctg}(1/57)+4\operatorname{arctg}(1/239)=\pi$;
- $|\sin x|\le|x|$, $|\sin nx|\le n|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;
- $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$, $\forall\, x, y\in\mathbb{R}$;
- $\sin(x+y+z)<\sin x+\sin y+\sin z$, $\forall\, x, y, z\in(0,\ \pi/2)$.

Funcții trigonometrice inverse

Relații între funcțiile trigonometrice inverse:

$$\begin{cases}\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arctg}\left(x/\sqrt{1-x^2}\right)=\operatorname{arccotg}\left(\sqrt{1-x^2}/x\right),\ 0<x<1;\\ \arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-x^2}/x\right)=\operatorname{arccotg}\left(x/\sqrt{1-x^2}\right),\ 0<x<1;\\ \operatorname{arctg}x=\arcsin\left(x/\sqrt{1+x^2}\right)=\arccos\left(1/\sqrt{1+x^2}\right)=\operatorname{arccotg}(1/x),\ x>0;\\ \operatorname{arccotg}x=\arcsin\left(1/\sqrt{1+x^2}\right)=\arccos\left(x/\sqrt{1+x^2}\right)=\operatorname{arctg}(1/x),\ x>0.\end{cases}$$

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI
F I Z I C Ă
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} 2\arcsin x = \arccos\left(1-2x^2\right), & 0<x<1; \\ 2\arccos x = \arccos\left(2x^2-1\right), & 0<x<1; \\ 2\ \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg}\left[\left(1-x^2\right)/(2x)\right], & x>0; \\ 2\ \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arccotg}\left[\left(x^2-1\right)/(2x)\right], & x>0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arcsin x = 2\arccos\left[\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)/2\right], & 0<x<1; \\ \arccos x = 2\arccos\left[\sqrt{(1+x)/2}\right], & 0<x<1; \\ \operatorname{arctg} x = 2\ \operatorname{arctg}\left[\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)/x\right], & x>0. \end{cases}$$

Formule de adunare:

$$\begin{cases} \arcsin x+\arcsin y = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy\right), & 0<x,\ y<1; \\ \arcsin x-\arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right), & 0<x,\ y<1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arccos x+\arccos y = \arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\right), & 0<x,\ y<1; \\ \arccos x-\arccos y = \arcsin\left(y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}\right), & 0<x,\ y<1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y = \operatorname{arccotg}\dfrac{1-xy}{x+y}, & x,\ y>0; \\ \operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, & x,\ y>0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{arccotg} x+\operatorname{arccotg} y = \operatorname{arccotg}\dfrac{xy-1}{x+y}, & x,\ y>0; \\ \operatorname{arccotg} x-\operatorname{arccotg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{y-x}{1+xy}, & x,\ y>0. \end{cases}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Condiții necesare și suficiente ca valorile funcțiilor trigonometrice fundamentale corespunzătoare la două unghiuri u și v să fie egale

Teoremă.

- $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + 2k\pi$ sau $u = \pi - v + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$;
- $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + 2k\pi$ sau $u = -v + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v \Leftrightarrow u = v + k\pi$, $u \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, $v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $k, m, n \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{cotg} u = \operatorname{cotg} v \Leftrightarrow u = v + k\pi$, $u \neq m\pi$, $v \neq n\pi$, $k, m, n \in \mathbb{Z}$

Ecuații trigonometrice fundamentale

Ecuația	Discuție după a	Mulțimea soluțiilor S
$\sin x = a$ $x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$	$-1 < a < 1$	$S = \{x \mid x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ sau $S = (\arcsin a + 2\mathbb{Z}\pi) \cup (\pi - \arcsin a + 2\mathbb{Z}\pi)$ sau $\begin{cases} x' = \arcsin a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x'' = \pi - \arcsin a + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z} \end{cases}$
	$\lvert a \rvert > 1$	$S = \varnothing$
	$a = -1$	$S = -\pi/2 + 2\mathbb{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \mathbb{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = \pi/2 + 2\mathbb{Z}\pi$
$\cos x = a$ $x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$	$-1 < a < 1$	$S = \{x \mid x = \pm \arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ sau $S = (\arccos a + 2\mathbb{Z}\pi) \cup (-\arccos a + 2\mathbb{Z}\pi)$ sau $\begin{cases} x' = \arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x'' = -\arccos a + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z} \end{cases}$
	$\lvert a \rvert > 1$	$S = \varnothing$
	$a = -1$	$S = \pi + 2\mathbb{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \pi/2 + \mathbb{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = 2\mathbb{Z}\pi$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\operatorname{tg} x = a$ $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$ $a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$S = \{x \mid x = \operatorname{arctg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ sau $S = \operatorname{arctg} a + \mathbb{Z}\pi$ sau $x = \operatorname{arctg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
	$a = -1$	$S = -\pi/4 + \mathbb{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \mathbb{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = \pi/4 + \mathbb{Z}\pi$
$\operatorname{cotg} x = a$ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ $a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$S = \{x \mid x = \operatorname{arccotg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ sau $S = \operatorname{arccotg} a + \mathbb{Z}\pi$ sau $x = \operatorname{arccotg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
	$a = -1$	$S = 3\pi/4 + \mathbb{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \pi/2 + \mathbb{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = \pi/4 + \mathbb{Z}\pi$

Exemple:

- $\sin x = -\sqrt{3/2}$, $x = (-1)^n(-\pi/3) + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. În intervalul $[0,\ 360^\circ]$ avem rădăcinile: $x_1 = 240^\circ$ şi $x_2 = 300^\circ$;

- $\cos x = 1/3$, $x' = \arccos(1/3) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sau $x'' = -\arccos(1/3) + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$;

- $\operatorname{tg} x = -4$, $x = -\operatorname{arctg} 4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

- $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$, $x = 5\pi/6 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

- $\cos x = -1/2$, $x = \pm[\arccos(-1/2)] + 2k\pi = \pm[\pi - \arccos(1/2)] + 2k\pi =$ $= \pm(2\pi/3) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. În intervalul $[0,\ 2\pi]$ avem rădăcinile (valorile principale): $x_1 = 2\pi/3$ şi $x_2 = 4\pi/3$;

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B.5. Formule din analiza matematică

Derivatele funcțiilor elementare

Funcția $y = f(x)$	Domeniul de definiție	Derivata y'	Mulțimea pe care y este derivabilă
$y = a,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = 0$	$\mathbb{R}$
$y = x$	$\mathbb{R}$	$y' = 1$	$\mathbb{R}$
$y = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = a$	$\mathbb{R}$
$y = x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$y' = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$y = ax^n,$ $(n \in \mathbb{N}), a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = nax^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$y = 1/x$	$\mathbb{R}^*$	$y' = -1/x^2$	$\mathbb{R}^*$
$y = x^{-n},\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$y' = -n/x^{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$y = x^\alpha,$ $\alpha > 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$[0,+\infty)$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$[0,+\infty)$
$y = x^\alpha,$ $\alpha < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$(0,+\infty)$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(0,+\infty)$
$y = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$y' = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$	$\mathbb{R}_+^*$
$y = \sqrt[n]{x},$ $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$	$\mathbb{R}_+$	$y' = 1/\left(n\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)$	$\mathbb{R}_+^*$
$y = \frac{ax+b}{cx+d},$ $a,b,c,d \in \mathbb{R},$ $ad - bc \neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$	$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$
$y = e^x$	$\mathbb{R}$	$y' = e^x$	$\mathbb{R}$
$y = ae^x,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = ae^x$	$\mathbb{R}$
$y = ae^{bx}, a,b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = abe^{bx}$	$\mathbb{R}$
$y = a^x, a > 0,$ $a \neq 1,\ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y' = a^x \ln a$	$\mathbb{R}$

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Funcția $y=f(x)$	Domeniul de definiție	Derivata y'	Mulțimea pe care y este derivabilă
$y=ba^x, a>0,$ $a\neq 1, a,b\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y'=ba^x\ln a$	$\mathbb{R}$
$y=ba^{cx}$, $a\neq 1,$ $a>0, a,b,c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y'=bca^{cx}\ln a$	$\mathbb{R}$
$y=\ln x$	$(0,+\infty)$	$y'=1/x$	$(0,+\infty)$
$y=\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$y'=1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$y=\log_a x, a\in\mathbb{R},$ $a>0,\ a\neq 1$	$(0,+\infty)$	$y'=1/(x\ln a)$	$(0,+\infty)$
$y=\sin x$	$\mathbb{R}$	$y'=\cos x$	$\mathbb{R}$
$y=\cos x$	$\mathbb{R}$	$y'=-\sin x$	$\mathbb{R}$
$y=\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi\right)$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=$ $=1+\operatorname{tg}^2 x$	$\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi\right)$
$y=\operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$	$y'=-1/\sin^2 x=$ $=-\left(1+\operatorname{cotg}^2 x\right)$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$y'=1/\sqrt{1-x^2}$	$(-1,1)$
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$y'=-1/\sqrt{1-x^2}$	$(-1,1)$
$y=\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$y'=1/(1+x^2)$	$\mathbb{R}$
$y=\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$	$y'=-1/(1+x^2)$	$\mathbb{R}$
$y=\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$y'=\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$y=\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$y'=\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$

Ținând cont de mulțimile pe care funcțiile elementare sunt derivabile, de regulile precedente de derivare a funcțiilor elementare și de regula de derivare a funcțiilor compuse:

BCU KSI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$y(x)=f\big(u(x)\big),\quad y'(x)=f'\big(u(x)\big)\cdot u'(x);$$
$$y(x)=f\big(u\big(v(x)\big)\big),\quad y'(x)=f'(u)u'(v)v'(x),$$

obținem formulele de derivare cuprinse în tabelul următor.

Derivate ale unor funcții compuse

Funcția $f(x)$	Derivata $f'(x)$	Funcția $f(x)$	Derivata $f'(x)$
u	u'	$Ca^u, C\in\mathbb{R}$, $a>0, a\neq 1$, $a\in\mathbb{R}$	$Cu'a^u\cdot\ln a$
$au,\ a\in\mathbb{R}$	au'	$\ln u,\ u>0$	u'/u
$u\pm v$	$u'\pm v'$	$\ln\lvert u\rvert,\ u\neq 0$	u'/u
uv	$u'v\pm uv'$	$\log_a u,\ u>0$, $a\in\mathbb{R}_+^*,\ a\neq 1$	$(u'\cdot\log_a e)/u$
uvw	$u'vw+uv'w+$ $+uvw'$	$\sin u$	$u'\cos u$
$1/v$	$-v'/v^2$	$\cos u$	$-u'\sin u$
u/v	$(u'v-uv')/v^2$	$\operatorname{tg} u$, $u\notin\mathbb{Z}\pi+\frac{\pi}{2}$	$u'/\cos^2 u$
$u^n,\ n\in\mathbb{Z}^*$	$nu^{n-1}\cdot u'$	$\operatorname{cotg} u$, $u\notin\mathbb{Z}\pi$	$-u'/\sin^2 u$
$au^n, n\in\mathbb{Z}^*$, $a\in\mathbb{R}$	$nau^{n-1}\cdot u'$	$\arcsin u$	$u'/\sqrt{1-u^2}$
$u^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$, $u>0$	$\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$	$\arccos u$	$-u'/\sqrt{1-u^2}$
$\sqrt{u},\ u>0$	$u'/(2\sqrt{u})$	$\operatorname{arctg} u$	$u'/(1+u^2)$
$\sqrt[n]{u}$, n impar, $u\neq 0$	$u'/(n\sqrt[n]{u^{n-1}})$	$\operatorname{arccotg} u$	$-u'/(1+u^2)$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Funcţia $f(x)$	Derivata $f'(x)$	Funcţia $f(x)$	Derivata $f'(x)$
$\sqrt[n]{u}$, n par, $u>0$	$u'\Big/\left(n\sqrt[n]{u^{n-1}}\right)$	u^v, $u>0$	$u^v\left(u'\frac{v}{u}+\right.$ $\left.+v'\ln u\right)$
e^u	$u'\cdot e^u$	x^v, $x>0$	$vx^{v-1}+$ $+x^v v'\cdot\ln x$
ae^u, $a\in\mathbb{R}$	$au'\cdot e^u$	x^x, $x>0$	$x^x(1+\ln x)$

În tabelul de mai sus am notat cu u, v, w diferite funcţii reale derivabile.

Derivata unui determinant

Fie $a_{ij}: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu I un interval, n^2 funcţii de clasă C^1 pe I şi $D(x)=\left|a_{ij}(x)\right|$. Atunci avem:

$$D'=\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x)\\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \cdots & a'_{2n}(x)\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}+$$

$$+\dots+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \cdots & a'_{nn}(x)\end{vmatrix}.$$

Exemplu: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$. Pentru a calcula derivata $f'(x)$ notăm: $u(x)\overset{not.}{=}2x\Big/\left(x^2+1\right)$, $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Atunci, $f(x)=\arcsin u(x)$. Funcţiile arcsin şi u fiind derivabile, rezultă că f este derivabilă. Din calculele „legitime" pe care le vom face va rezulta şi domeniul pe care f' există (este definită). Avem:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}};\ u'(x)=2\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=2\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2};$$

$$\sqrt{1-u^2(x)}=\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{\left(1-x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}}=\frac{\left|x^2-1\right|}{x^2+1}.$$

Acum,

$$f'=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\cdot\frac{\left(x^2+1\right)}{\left|x^2-1\right|},$$

sau

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{x^2+1}, & x<-1,\\ \dfrac{2}{x^2+1}, & -1<x<1,\\ \dfrac{-2}{x^2+1}, & x>1.\end{cases}$$

Astfel, f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,\,1\}$. Punctele $A\left(-1,\,-\pi/2\right)$ şi $B\left(1,\,\pi/2\right)$ sunt puncte unghiulare: $f_s'(-1)=-1;\ f_d'(-1)=1,\ f_s'(1)=1,$ $f_d'(1)=-1$.

Câteva derivate de ordin n:

$\left(\sin x\right)^{(n)}=\sin\left(x+n\pi/2\right),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N};$

$\left(\cos x\right)^{(n)}=\cos\left(x+n\pi/2\right),\ \forall x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N};$

$\left(1/x\right)^{n}=(-1)^n\cdot n!/x^{n+1},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ n\in\mathbb{N};$

$\left(ae^x\right)^{(n)}=ae^x,\ \forall x\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N};$

$\left(x^m\right)^{(n)}=A_m^n x^{m-n},\ \forall x\in\mathbb{R},\ 1\le n\le m;\ \left(x^m\right)^{(m)}=m!;$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\left(a^x\right)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$, $a>0$, $a\neq 1$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$;

$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $n\in\mathbb{N}^*$;

$(\operatorname{sh}x)^{(2n)} = \operatorname{sh}x$; $(\operatorname{sh}x)^{(2n-1)} = \operatorname{ch}x$, $x\in\mathbb{R}$, $n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$;

$(\operatorname{ch}x)^{(2n)} = \operatorname{ch}x$; $(\operatorname{ch}x)^{(2n-1)} = \operatorname{sh}x$, $x\in\mathbb{R}$, $n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$;

$\left(e^{ax}\right)^{(n)} = a^n \cdot e^{ax}$, $x\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$;

$(\sin\omega x)^{(n)} = \omega^n \cdot \sin(\omega x + n\pi/2)$;

$(\cos\omega x)^{(n)} = \omega^n \cdot \cos(\omega x + n\pi/2)$;

$\left(1/(x+a)\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot (n!)/(x+a)^{n+1}$.

Formula lui Leibniz

Fie $f, g: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții de n ori derivabile pe I. Atunci $f\,g$ este de n ori derivabile pe I și avem relația:

$$(f\,g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x)g'(x) + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1} f'(x)g^{(n-1)}(x) + C_n^n f(x)g^{(n)}(x), \quad \forall x\in I.$$

Exemplu: Să calculăm $\left(2xe^{2x}\right)^{(n)}$. Avem:

$$\left(2xe^{2x}\right)^{(n)} = \left(e^{2x}\cdot 2x\right)^{(n)} = \left(e^{2x}\right)^{(n)}\cdot 2x + C_n^1\left(e^{2x}\right)^{(n-1)}\cdot(2x)' =$$
$$= 2^{n+1}xe^{2x} + 2^n ne^{2x} = 2^n e^{2x}(2x+n).$$

Primitive imediate ale unor funcții elementare

Funcția $f(x)$	Domeniul de definiție	Integrala nedefinită $\int f(x)\,dx$
$f(x)=x^n$, $x\in\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Funcția $f(x)$	Domeniul de definiție	Integrala nedefinită $\int f(x)dx$
$f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R},\alpha\neq -1$	$\mathbb{R}_+^*$	$\int x^{\alpha}dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1)+C$
$f(x)=\sqrt[m]{x}$, $m\in\mathbb{N},m\geq 2$	$\mathbb{R}_+$	$\int \sqrt[m]{x}\,dx = \frac{m\sqrt[m]{x^{m+1}}}{m+1}+C$
$f(x)=a^x$, $a\in\mathbb{R}_+^*,\ a\neq 1$	$\mathbb{R}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$
$f(x)=e^x$	$\mathbb{R}$	$\int e^x dx = e^x+C$
$f(x)=1/x$	$\mathbb{R}_-^*$	$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x)+C$
$f(x)=1/x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\int \frac{dx}{x} = \ln(x)+C$
$f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$	$(-\infty,\ -a)\cup$ $\cup(a,\ +\infty)$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C$
$f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$	$(-a,a)$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a-x}{a+x}+C$
$f(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$	$\int \sin x\,dx = -\cos x+C$
$f(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$	$\int \cos x\,dx = \sin x+C$
$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$I\subset\mathbb{R}\setminus\{\mathbb{Z}\pi+\frac{\pi}{2}\}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x+C$
$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	$I\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x+C$
$f(x)=\operatorname{tg}x$	$I\subset\mathbb{R}\setminus\{\mathbb{Z}\pi+\frac{\pi}{2}\}$	$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert+C$
$f(x)=\operatorname{cotg}x$	$I\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$	$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert+C$
$f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$I\subset\mathbb{R}\setminus\{\mathbb{Z}\pi+\frac{\pi}{2}\}$	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x}+C$
$f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$I\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \frac{-1}{\sin x}+C$
$f(x)=\sin(ax)$, $a\in\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a}+C$

BCU CLUJ CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

Funcţia $f(x)$	Domeniul de definiţie	Integrala nedefinită $\int f(x)dx$
$f(x)=\cos(bx)$, $b\in\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\int\cos(bx)\,dx=\frac{\sin(bx)}{b}+C$
$f(x)=\sin^2 x$	$\mathbb{R}$	$\int\sin^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$
$f(x)=\cos^2 x$	$\mathbb{R}$	$\int\cos^2 x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$
$f(x)=1/\sin x$	$I\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$	$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert+C$
$f(x)=1/\cos x$	$I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{\mathbb{Z}\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$	$\int\frac{dx}{\cos x}=-\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+C$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$ $=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$	$I\subset(-\infty,-a)\cup$ $\cup(a,+\infty)$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+C$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$	$(-a,\ a)$	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=$ $=-\arccos x+C_1$
$f(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$\int\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arccos x+C$
$f(x)=\frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$	$(-a,\ a)$	$\int\frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arccos\left(\frac{x}{a}\right)+C=$ $=-\arcsin x+C_1$
$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)}$	$\mathbb{R}$	$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C=$ $=-\operatorname{arccotg}x+C_1$
$f(x)=\frac{-1}{(1+x^2)}$	$\mathbb{R}$	$\int\frac{-dx}{1+x^2}=\operatorname{arccotg}x+C=$ $=-\operatorname{arctg}x+C_1$
$f(x)=\frac{-1}{a^2+x^2}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\int\frac{-dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arccotg}\frac{x}{a}+C$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Funcția $f(x)$	Domeniul de definiție	Integrala nedefinită $\int f(x)dx$
$f(x)=e^{ax}\sin(bx)$, $a,\ b\in\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\int e^{ax}\cdot\sin(bx)\,dx=$ $=\frac{a\sin(bx)-b\cos(bx)}{a^2+b^2}e^{ax}+C$
$f(x)=e^{ax}\cos(bx)$, $a,\ b\in\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx=$ $=\frac{a\cos(bx)+b\sin(bx)}{a^2+b^2}e^{ax}+C$
$f(x)=\operatorname{sh}x$	$\mathbb{R}$	$\int \operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C$
$f(x)=\operatorname{ch}x$	$\mathbb{R}$	$\int \operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C$

Primitivele unor funcții compuse

1. $\int u^n(x)u'(x)\,dx=u^{n+1}(x)/(n+1)+C$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq -1$, $C\in\mathbb{R}$;
2. $\int u^\alpha(x)u'(x)\,dx=u^{\alpha+1}(x)/(\alpha+1)+C$, $\alpha\in R$, $\alpha\neq -1$, $u:I\to J\subset(0,\ +\infty)$;
3. $\int u'(x)/\sqrt[m]{u^{m-1}(x)}\,dx=m\cdot\sqrt[m]{u(x)}+C$, $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$, $u:I\to J\subset\mathbb{R}_+^*$;
4. $\int a^{u(x)}u'(x)\,dx=a^{u(x)}/\ln a+C$, $a\in\mathbb{R}_+^*$, $a\neq 1$;
5. $\int\left(u'(x)/u(x)\right)dx=\ln|u(x)|+C$, $u:I\to J\subset\mathbb{R}^*$;
6. $\int\left(u'(x)/\left(u^2(x)-a^2\right)\right)dx=(1/2a)\ln\left|\left(u(x)-a\right)/\left(u(x)+a\right)\right|$, $a\in\mathbb{R}_+^*$, $u(x)\neq\pm a$, $\forall x\in I$;
7. $\int\sin u(x)\cdot u'(x)\,dx=-\cos u(x)+C$;
8. $\int\cos u(x)\cdot u'(x)\,dx=\sin u(x)+C$;
9. $\int\left(u'(x)/\sin^2 u(x)\right)dx=-\operatorname{cotg}u(x)+C$, $u(x)\neq k\pi$, $x\in I$, $k\in\mathbb{Z}$;
10. $\int\left(u'(x)/\sin u(x)\right)dx=\ln\left|\operatorname{tg}\left(u(x)/2\right)\right|+C$, $u(x)\neq k\pi$, $x\in I$, $k\in\mathbb{Z}$;
11. $\int\left(u'(x)/\cos u(x)\right)dx=-\ln\left|\operatorname{tg}\left(u(x)/2-\pi/4\right)\right|+C$, $u(x)\neq k\pi+\pi/2$, $x\in I$, $k\in\mathbb{Z}$;

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

12. $\int \left(u'(x)/\cos^2 u(x)\right)\,dx = \operatorname{tg} u(x)+C,\ u(x)\neq k\pi+\pi/2,\ x\in I,\ k\in\mathbb{Z};$
13. $\int \operatorname{tg}u(x)\cdot u'(x)\,dx = -\ln\left|\cos u(x)\right|+C,\ u(x)\neq k\pi+\pi/2,\ x\in I,\ k\in\mathbb{Z};$
14. $\int \operatorname{cotg}u(x)\cdot u'(x)\,dx = \ln\left|\sin u(x)\right|+C,\ x\in I,\ u(x)\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$
15. $\int \left(\cos u(x)/\sin^2 u(x)\right)u'(x)\,dx = -1/\sin u(x)+C,\ x\in I,\ u(x)\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$
16. $\int \left(\sin u(x)/\cos^2 u(x)\right)u'(x)\,dx = 1/\cos u(x)+C,\ x\in I,\ u(x)\neq k\pi+\pi/2,\ k\in\mathbb{Z};$
17. $\int \left(1/\sqrt{a^2+u^2(x)}\right)u'(x)\,dx = \ln\left(u(x)+\sqrt{a^2+u^2(x)}\right)+C,\ a\in\mathbb{R}_+^*;$
18. $\int \left(1/\sqrt{u^2(x)-a^2}\right)u'(x)\,dx = \ln\left|u(x)+\sqrt{u^2(x)-a^2}\right|+C,\ a\in\mathbb{R}_+^*,\ u(I)\subset(-\infty,\ -a)\cup(a,\ +\infty);$
19. $\int \left(1/\sqrt{a^2-u^2(x)}\right)u'(x)\,dx = \arcsin\left(u(x)/a\right)+C,\ a\in\mathbb{R}_+^*,\ u(I)\subset(-a,\ a);$
20. $\int \left[u'(x)/\left(a^2+u^2(x)\right)\right]dx = (1/a)\operatorname{arctg}\left(u(x)/a\right)+C,\ a\in\mathbb{R}_+^*;$
21. $\int \cos^2 u(x)u'(x)\,dx = u(x)/2+\left[\sin\left(2u(x)\right)\right]/4+C;$
22. $\int \sin^2 u(x)u'(x)\,dx = u(x)/2-\left[\sin\left(2u(x)\right)\right]/4+C.$

Primitivele unor funcții raționale

- $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C,\ b^2-4ac>0;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{-\left(b^2-4ac\right)}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\left(b^2-4ac\right)}}+C,\ b^2-4ac<0;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = -\frac{1}{(n-1)\left(b^2-4ac\right)}\cdot\frac{2ax+b}{\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}} - \frac{2(2n-3)a}{(n-1)\left(b^2-4ac\right)}\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}}+C,\quad a\neq 0,\ n\in\mathbb{N};$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- $\int \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{\alpha}{2a(n-1)} \cdot \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2\beta a-\alpha b}{2a}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} + C,\ a\neq 0,\ n\in\mathbb{N}.$

Primitivele unor funcții exprimabile prin radicali

- $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C,\ a>0;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C,\ a<0;$
- $\int \frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{\alpha}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2\beta a-\alpha b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + C;$
- $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b^2-4ac}{8a\sqrt{a}} \times \ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C,\ a>0;$
- $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b^2-4ac}{8a\sqrt{-a}} \times \arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C,\ a<0;$
- $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C,\ x\in\mathbb{R};$
- $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,\ |x|<a.$

Integrale (definite) generalizate sau integrale improprii

Noțiunea de integrală definită (Riemann) se extinde și pentru funcții mărginite sau nemărginite, definite pe intervale compacte sau necompacte.

BCU "I. C. BRĂTIANU" UNIVERSITY LIBRARY

i. Cazul în care o limită a integralei este infinită

i.1. Fie $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice compact $[a,b]\subset[a,\infty]$, $a<b$. Integrala $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ se numeşte *integrală generalizată* sau *integrală improprie.*

i.2. Dacă limita:

$$I=\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\mathrm{d}x \qquad (*)$$

există şi este finită, deci dacă $I\in\mathbb{R}$, spunem că funcţia *f este integrabilă în sens generalizat* pe $[a,\infty)$ sau că *integrala improprie* $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *este convergentă* şi luăm:

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple:

a) $f(x)=1/(1+x^2)$, $x\in[0,+\infty)$. Avem:

$$\int_0^{\infty}\left[1/(1+x^2)\right]\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\int_0^N\left[1/(1+x^2)\right]\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\operatorname{arctg}N=\frac{\pi}{2};$$

b) $\int_1^{\infty}\left(1/x^n\right)\mathrm{d}x=1/(n-1)$, pentru $n>1$, $n\in\mathbb{R}$;

c) Alte exemple de integrale improprii convergente sunt integralele lui Fresnel din teoria luminii: $\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\sqrt{\pi/8}$ şi $\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\sqrt{\pi/8}$.

i.3. Dacă limita (*) nu există ori este infinită, atunci spunem că funcţia *f nu este integrabilă în sens generalizat* sau că integrala $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ este *divergentă.*

i.4. Există criterii care stabilesc condiţii suficiente pentru convergenţa integralelor de forma $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

i.5. Considerații asemănătoare cu cele de mai sus se pot face și pentru integralele de tipul $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ sau $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Astfel, integrala convergentă $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ joacă un rol însemnat în teoria probabilităților și în teoria ecuațiilor diferențiale.

ii. Cazul în care integrandul f devine infinit pentru $x \to b$ și $x < b$

ii.1. Fie $f:[a,\, b) \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice compact $[a,\, b-\varepsilon]$, cu $0 < \varepsilon < b-a$, pentru care $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} |f(x)| = \infty$.

Integrala $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ se numește *integrală generalizată* sau *integrală improprie.*

ii.2. Dacă limita:

$$L = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (**)$$

există și este finită (deci, dacă $L \in \mathbb{R}$) spunem că funcția f *este integrabilă în sens generalizat* pe $[a,\, b)$, sau că *integrala improprie* $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ *este convergentă* și luăm $\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$.

În acest caz, integrala convergentă se obișnuiește să fie notată cu $\int_{a}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$, sau $\int_{a}^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$. Exemplu: dacă $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,\, 1]$, avem:

$$\int_{0}^{1-} \left(1/\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left[\arcsin(1-\varepsilon)\right] = \pi/2.$$

ii.3. Dacă limita (**) nu există ori este infinită, atunci spunem că funcția f *nu este integrabilă în sens generalizat* sau că *integrala* $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ *este divergentă.*

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ii.4. Există criterii care dau condiţii suficiente pentru convergenţa integralelor de forma $\int_a^{b-} f(x)\mathrm{d}x$.

Exemplu: Dacă există un exponent $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$ pentru care

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} (b-x)^{\alpha} f(x) = M \in \mathbb{R}$$

este finită, atunci $\int_a^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă. Funcţia lui Euler de speţa întâi, $B(p, q) = \int_{0-}^{1-} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ este o integrală improprie convergentă pentru $p > 0$, $q > 0$, $(p, q \in \mathbb{R})$.

ii.5. Consideraţii asemănătoare cu cazul $\int_a^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ se pot face şi pentru $\int_{a+}^{b} f(x)\mathrm{d}x$, sau $\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$.

Câteva integrale improprii convergente:

$$\int_{a+}^{b-} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x = \pi; \qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2;$$

$$\int_0^{a-} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \pi/2; \qquad \int_0^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \pi/(2a); \qquad \int_0^{\infty} \frac{1}{a+bx^2}\mathrm{d}x = \pi/\left(2\sqrt{ab}\right);$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^n\mathrm{d}x = n!,\ n \in \mathbb{N}; \qquad \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \pi/2.$$

Formula lui Moivre

$(\cos u + i\sin u)^n = \cos(nu) + i\sin(nu)$, $\forall u \in \mathbb{R}$ şi $\forall n \in \mathbb{N}$.

Consecinţe ale formulei lui Moivre:

$\cos nu = \cos^n u - \mathrm{C}_n^2 \cos^{n-2} u \sin^2 u + \mathrm{C}_n^4 \cos^{n-4} u \sin^4 u - \ldots;$

$\sin nu = \mathrm{C}_n^1 \cos^{n-1} u \sin u - \mathrm{C}_n^3 \cos^{n-3} u \sin^3 u + \ldots;$

$\mathrm{tg}\, nu = \left(\mathrm{C}_n^1 \mathrm{tg}\, u - \mathrm{C}_n^3 \mathrm{tg}^3 u + \mathrm{C}_n^5 \mathrm{tg}^5 u - \ldots\right) / \left(1 - \mathrm{C}_n^2 \mathrm{tg}^2 u + \mathrm{C}_n^4 \mathrm{tg}^4 u - \ldots\right).$

Observaţie: Se demonstrează că formula lui Moivre este adevărată şi pentru n număr întreg negativ, respectiv $n \in \mathbb{Q}$.

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Extragerea rădăcinii de ordinul n dintr-un număr complex $z = r(\cos u + i \sin u)$;

$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = r^{1/n}\left\{\cos\left[(u+2k\pi)/n\right] + i\sin\left[(u+2k\pi)/n\right]\right\}$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$;

$\left(\sqrt[n]{1}\right)_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$;

$\left(\sqrt[n]{-1}\right)_k = \cos\left[(2k+1)\pi/n\right] + i\sin\left[(2k+1)\pi/n\right]$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$;

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left[\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)/2} + i\left(b/|b|\right)\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)/2}\right],\ b \neq 0.$$

Pentru simplitate, de obicei se utilizează notațiile: $\left(\sqrt[n]{1}\right)_k \overset{not.}{=} \varepsilon_k$ și $\left(\sqrt[n]{-1}\right)_k \overset{not.}{=} \omega_k$.

Exemple:

- Pentru $n = 3$ și $z = 1$ ($r = 1$ și $u = 0$) rădăcinile cubice complexe ale unității sunt: $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = j$, $\varepsilon_2 = j^2$, unde $j = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)/2$ și $j^2 = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)/2$. Afixele ε_0, ε_1 și ε_2 corespund vârfurilor unui triunghi echilateral, înscris într-un cerc de rază 1, cu centrul în originea reperului;
- Pentru $n = 2$ și $z = i$ ($r = 1$ și $u = \pi/2$) avem: $z_0 = -\sqrt{2}(1+i)/2$, $z_1 = \sqrt{2}(1+i)/2$.

Forma exponențială a numerelor complexe: $z = re^{iu}$

Proprietăți:

- $\overline{z} = re^{-iu}$;
- $zz' = rr'e^{i(u+u')}$, dacă $z = re^{iu}$ și $z' = r'e^{iu'}$;
- $(z'/z) = (r'/r)e^{i(u-u')}$, $r \neq 0$;
- $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i(u+2k\pi)n}$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$;
- $z^n = r^n e^{inu}$.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Formulele lui Euler

$$e^{+iu} = \cos u + i \sin u; \quad \cos u = \left(e^{iu} + e^{-iu}\right)/2;$$

$$e^{-iu} = \cos u - i \sin u; \quad \sin u = \left(e^{iu} - e^{-iu}\right)/2i.$$

Ecuaţiile în coordonate carteziene ale câtorva curbe remarcabile

Astroida	$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
Cardioida	$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$
Cisoida lui Diocles	$y^2 = x^3/(2a - x)$
Concoida lui Nicomede	$(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2 x^2$
Foliul lui Descartes	$y^3 + x^3 = 3axy$
Lănţişorul	$y = (e^x + e^{-x})/2$
Lemniscata lui Bernoulli	$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
Melcul lui Pascal	$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$
Roza cu patru ramuri	$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$
Strofoida dreaptă (cubica lui Descartes)	$y^2 = x^2(a + x)/(a - x)$
Parabola semicubică a lui W. Neil	$y = x^{3/2}$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Anexa C

Elemente de calcul vectorial. Aplicații

Metoda calculului vectorial se referă atât la studiul nemijlocit al vectorilor, consideraţi drept elemente geometrice, cât şi la crearea unui aparat matematic alcătuit din litere şi simboluri, care să uşureze operaţiile cu vectori. Utilizarea notaţiilor, chiar şi în cele mai simple operaţii, lărgeşte considerabil cadrul metodei vectoriale, făcând posibilă rezolvarea unui număr mare de probleme concrete. În cele ce urmează vom utiliza metoda analitică de studiu a vectorilor, plecând de la noţiunile fundamentale aferente. Pentru a aprofunda acest studiu vom prezenta unele aplicaţii concrete, care pot fi considerate ca fiind exemplificatoare.

C.1. Mărimi scalare şi vectoriale

Mărimile cu care ne întâlnim în general[1] în mecanică sunt clasificate în *mărimi scalare* (scalari) şi *mărimi vectoriale* (vectori).

Orice mărime fizică complet determinată prin cunoaşterea unui singur număr real (pozitiv sau negativ), ataşat mărimii respective la scara adoptată şi însoţit de unitatea de măsură caracteristică se numeşte *mărime fizică scalară.* Proprietatea fundamentală a mărimilor scalare este aceea că valoarea lor nu depinde de sistemul de coordonate în raport cu care se analizează comportarea acestora. De exemplu, masa, volumul, lucrul mecanic, temperatura, entropia, sarcina electrică etc. sunt mărimi fizice scalare şi uneori sunt numite, simplu, *scalari.*

Din categoria mărimilor fizice pentru care sunt necesare mai multe numere reale pentru a putea fi complet determinate, fac parte atât *mărimile*

[1] Mărimi cu ordin tensorial mai mare de unu apar cu precădere doar în cadrul mecanicii solidului rigid şi al mecanicii mediilor continue deformabile. Exemple de astfel de mărimi vor fi date în continuare.

BCU IAŞI "CENTRALĂ UNIVERSITARĂ" LIBRARY

fizice vectoriale [2] (cum ar fi: viteza liniară, acceleraţia, impulsul, intensitatea câmpului electric etc.) cât şi cele *tensoriale* [3] (de exemplu: tensorul momentelor de inerţie, $I_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$, tensorul tensiunilor într-un mediu continuu deformabil, T_{ik}, $(i, k = 1, 2, 3)$, tensorul deformaţiilor unui mediu continuu deformabil, e_{ik}, $(i, k = 1, 2, 3)$, tensorul densităţii fluxului de impuls al unui fluid în mişcare oarecare, Π_{ik}, $(i, k = 1, 2, 3)$ etc.)

Orice mărime care, pe lângă valoarea sa numerică, este caracterizată din punct de vedere geometric şi printr-o *orientare în spaţiu* (cum ar fi: forţa, viteza, acceleraţia etc.) se numeşte *mărime vectorială* sau simplu, *vector*. De exemplu, pentru a cunoaşte forţa (mecanică) ce acţionează asupra unui rigid, este necesar ca pe lângă intensitatea forţei (valoarea sa numerică), să cunoaştem atât direcţia pe care aceasta acţionează, cât şi sensul ei.

În spaţiul euclidian cu trei dimensiuni E_3, un *vector* este o entitate matematică care se reprezintă geometric printr-un segment de dreaptă orientat, şi care, din punct de vedere algebric este formată dintr-un ansamblu de trei scalari, numiţi *componentele vectorului*.

Un vector se notează fie printr-o singură literă cu săgeată deasupra ($\vec{F}$ - vectorul forţei), fie prin două litere cu săgeată ($\overrightarrow{AB}$ etc.). Punctul A reprezintă *originea* sau *punctul de aplicaţie* al vectorului, iar punctul B extremitatea sa. *Sensul* „de parcurs" este de la A la B, iar mărimea vectorului (*modulul*) este determinată de lungimea segmentului $\|AB\|$. Mărimea unui vector oarecare $\vec{A}$ se notează prin $|\vec{A}|$, sau mai simplu, prin A. Deci, un vector este definit prin următoarele elemente:

1. originea sau punctul de aplicaţie;
2. dreapta suport (direcţia);

---

[2] Care, din punct de vedere pur algebric, sunt de fapt mărimi tensoriale de ordinul întâi, la fel cum, din acelaşi punct de vedere, mărimile scalare nu sunt altceva decât mărimi tensoriale de ordinul zero.

[3] Aici, prin apelativul „mărimi tensoriale" au fost desemnate doar mărimile tensoriale de ordinul doi, cu toate că, în cadrul mecanicii există mărimi tensoriale chiar de ordinul patru. Un astfel de exemplu îl constituie tensorul elasticităţii unui mediu continuu deformabil cu proprietăţi elastice, C_{ijkl}, $(i, j, k, l = 1, 2, 3)$.

3. sensul vectorului;
4. mărimea sau modulul.

Vectorul cu modulul egal cu unitatea (într-un anumit sistem de unități) se numește *vector unitar*. Un vector unitar care are aceeași direcție și același sens cu un vector dat, $\vec{A}$ (sau o axă dată, Δ) se numește *versor* al vectorului $\vec{A}$ (respectiv, al axei Δ).

În funcție de caracterul punctului de aplicație, distingem trei categorii de vectori.

1. Un vector de mărime și orientare dată, dar cu punctul de aplicație arbitrar se numește *vector liber*. Ca exemple de astfel de mărimi vectoriale amintim accelerația gravitațională și inducția câmpului magnetic terestru, ambele considerate în condițiile laboratorului.
2. Un vector de mărime și orientare dată, având punctul de aplicație fixat într-un punct se numește *vector legat*. Exemple: viteza și/sau accelerația unui punct material, forța rezultantă care acționează asupra unei molecule dintr-un fluid, intensitatea câmpului electrostatic al unei sarcini electrice punctiforme etc. Acest tip de vector este legat de punctul care-l caracterizează.
3. Un vector de mărime și orientare dată, cu punctul de aplicație ce se poate „plimba" pe dreapta suport (fără ca celelalte elemente să se modifice) se numește *vector glisant* sau *vector alunecător*. O forță care acționează asupra unui solid rigid constituie un exemplu clasic în acest sens. Rezultatul acțiunii sale nu se va modifica dacă o translatăm de-a lungul dreptei suport. Un alt exemplu este vectorul vitezei unghiulare de rotație, $\vec{\omega}$, a unui solid rigid în jurul unei axe fixe. Punctul lui de aplicație poate fi ales oriunde de-a lungul axei de rotație.

Din punctul de vedere al elementelor care caracterizează un vector (origine, direcție, sens și modúl) a defini un *vector* înseamnă a indica mărimile care îl definesc complet. Cunoscând aceste mărimi se poate construi vectorul respectiv.

Există diferite metode pentru a caracteriza un vector: descriptive, geometrice, numerice ș.a. Din geometria analitică se cunoaște că pentru a caracteriza un *vector liber* este suficient să indicăm cele trei proiecții ale sale pe axele de coordonate ale unui reper în raport cu care este considerat

vectorul, sau echivalent, valoarea lui numerică împreună cu cele două unghiuri pe care el le formează cu oricare două dintre aceste axe (cel de-al treilea unghi poate fi determinat cu ajutorul primelor două, cu condiţia să se ştie dacă este ascuţit sau obtuz). Pentru a caracteriza un *vector glisant* este suficient să indicăm valoarea lui numerică, cele două unghiuri pe care le formează dreapta suport cu oricare două dintre axele de coordonate, precum şi două coordonate ale punctului de intersecţie dintre dreapta suport şi unul (oricare) din planele de coordonate. În cazul unui *vector legat*, pentru a-l defini complet sunt necesare şase mărimi: cele trei coordonate ale originii şi cele trei coordonate ale extremităţii lui, sau echivalent, cele trei coordonate ale originii şi cele trei proiecţii ale vectorului pe axele de coordonate etc.

C.2. Elemente de algebră vectorială

Poziţia în spaţiu a unui punct oarecare, P, poate fi definită printr-un vector care are punctul de aplicaţie în originea unui sistem de referinţă convenabil ales şi extremitatea în punctul P. Un asemenea vector se numeşte *vector de poziţie al punctului* P şi se notează, de obicei, cu $\vec{r}$. O dreaptă pe care s-a fixat un sens, ales ca pozitiv, se numeşte *axă*. Sensul opus se numeşte negativ. Sensul pozitiv se indică prin vârful unei săgeţi. Fie o axă (Δ) şi un vector oarecare $\vec{a}$ cu originea în A şi extremitatea în B. Se numeşte *proiecţie a vectorului* $\vec{a}$ pe axa (Δ), vectorul definit de proiecţiile ortogonale A', B' ale extremităţilor A şi B ale lui $\vec{a}$ pe axa (Δ) (vezi Fig. C1).

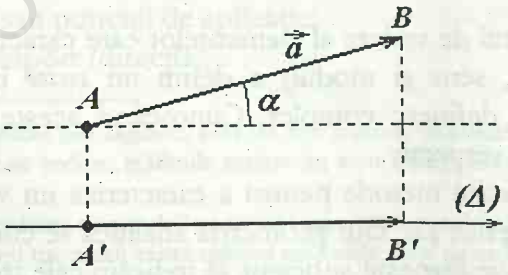


Fig. C1

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Notăm prin a_Δ mărimea scalară şi algebrică a proiecţiei vectorului $\vec{a}$ pe axa (Δ), semnul plus corespunzând cazului când proiecţia şi axa au acelaşi sens, iar semnul minus cazului când proiecţia şi axa au sensuri opuse. Se observă că $a_\Delta = a\cos\alpha$, adică proiecţia a_Δ este pozitivă, negativă, sau nulă, după cum unghiul α satisface relaţiile: $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$ sau $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Vom utiliza notaţia:

$$a_\Delta = pr_\Delta\, \vec{a}. \tag{C.1}$$

Dacă vectorul $\vec{a}$ este egal cu vectorul unitar $\vec{u}$, rezultă că

$$pr_\Delta\, \vec{a} = \cos\alpha. \tag{C.2}$$

Fie *Oxyz* un triedru ortogonal drept şi un vector oarecare, $\vec{a}$ cu originea în *A* şi extremitatea în *B* (vezi Fig. C2).

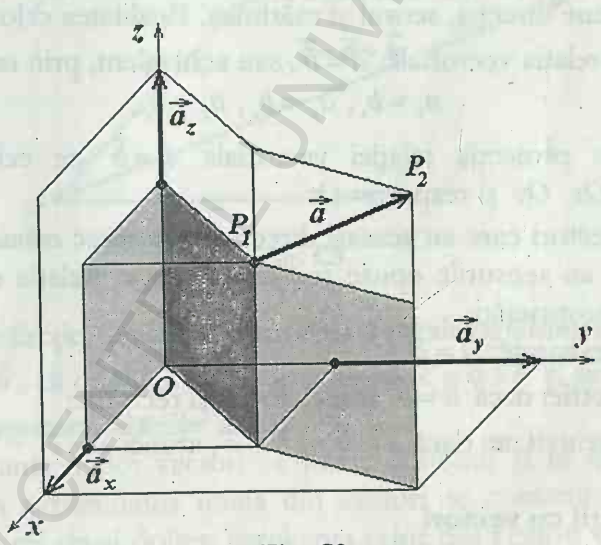


Fig. C2

Proiectând vectorul $\vec{a}$ pe axele reperului cartezian *Oxyz* se obţin segmentele orientate $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ şi $\vec{a}_z$. Mărimile algebrice ale acestor proiecţii, adică a_x, a_y şi respectiv a_z se numesc *componentele vectorului* $\vec{a}$. Din Fig. C2 rezultă mărimea componentelor vectorului $\vec{a}$:

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1, \tag{C.3}$$

unde x_1, y_1 și z_1 sunt coordonatele punctului A (coordonatele originii vectorului $\vec{a}$), iar x_2, y_2 și z_2 sunt coordonatele punctului B (ale extremității vectorului $\vec{a}$).

Doi (sau mai mulți vectori) care au mărimea și sensul comune, iar direcțiile lor sunt paralele, se numesc *echipolenți*. Vectorii echipolenți cu $\vec{a}$ se reprezintă prin aceleași relații (C.3), deci prin aceleași numere a_x, a_y și a_z.

Proiecțiile a_x, a_y și a_z se mai numesc *componentele vectoriale* ale lui $\vec{a}$. Prin proiecția unui vector (sau a unei relații vectoriale) pe o direcție vom înțelege componenta vectorului (a relației vectoriale) după acea direcție.

Relația de egalitate se poate defini numai între doi (sau mai mulți) vectori de același tip. De exemplu, doi vectori glisanți $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt egali dacă au comune direcția, sensul și mărimea. Egalitatea celor doi vectori se exprimă prin relația vectorială: $\vec{a} = \vec{b}$, sau echivalent, prin relațiile scalare:

$$a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z,$$

obținute prin proiecția relației vectoriale $\vec{a} = \vec{b}$ pe cele trei axe de coordonate: Ox, Oy și respectiv Oz.

Doi vectori care au aceeași direcție se numesc *coliniari*. Doi vectori coliniari care au sensurile opuse se numesc *opuși*. Relația de egalitate are următoarele proprietăți:

1. reflexivitate: $\vec{a} = \vec{a}$;
2. simetrie: dacă $\vec{a} = \vec{b}$ atunci $\vec{b} = \vec{a}$ și reciproc;
3. tranzitivitate: dacă $\vec{a} = \vec{b}$ și $\vec{b} = \vec{c}$, atunci $\vec{a} = \vec{c}$.

C.2.1. Operații cu vectori

Operațiile cel mai des întâlnite între vectorii liberi sunt:

- adunarea (scăderea),
- înmulțirea cu un scalar,
- produsul scalar,
- produsul vectorial,
- produsul mixt.

BCU "CONSTANTIN UNGUREANU" LIBRARY

Cu ajutorul operațiilor produs scalar și produs vectorial pot fi construite și alte expresii, mai complexe, cum ar fi: produsul scalar de produse vectoriale, dublul produs vectorial etc.

Adunarea vectorilor

Fie doi vectori liberi, $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Pentru „a construi" suma celor doi vectori, se consideră într-un punct arbitrar, originea comună O a doi vectori echipolenți cu $\vec{a}$ și respectiv cu $\vec{b}$ (vezi Fig. C3).

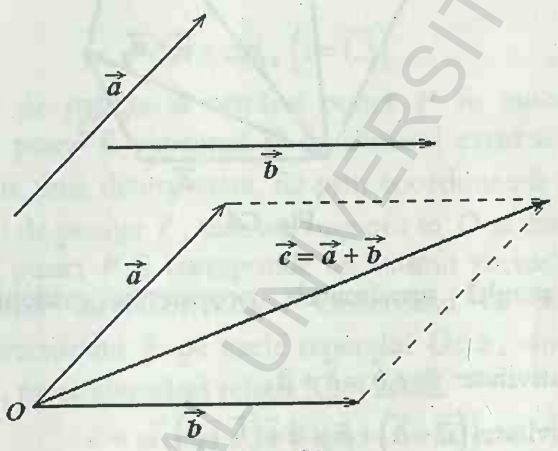


Fig. C3

Prin definiție, „vectorul diagonală a paralelogramului" construit pe vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, cu originea în O, se notează, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ și se numește *suma vectorială* sau *rezultanta vectorilor* $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Rezultanta a doi vectori se poate construi și în alt mod (*regula poligonului*). În extremitatea unuia din vectori se construiește un vector echipolent cu cel de-al doilea; rezultanta celor doi vectori va fi un vector cu originea în originea primului vector și extremitatea în extremitatea celui de-al doilea vector. Regula paralelogramului se poate generaliza pentru n vectori: $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$. Suma vectorială $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i$ se construiește în acest caz aplicând de $n-1$ ori regula paralelogramului în felul următor: rezultanta primilor doi vectori se compune vectorial cu cel de-al

treilea, suma vectorială obţinută cu cel de-al patrulea vector ş.a.m.d. (vezi Fig. C4). Vectorii $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ sunt dispuşi pe laturile unui contur poligonal. Se observă că, în cazul unui contur poligonal închis, rezultanta este nulă.

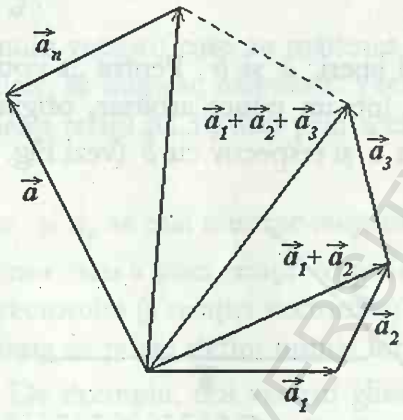


Fig. C4

Astfel, rezultă următoarele proprietăţi evidente ale adunării vectorilor:

- comutativitate: $\vec{a}_1+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,

- asociativitate $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Din cele prezentate mai sus rezultă că un vector poate fi definit în întregime prin intermediul celor trei proiecţii ale sale faţă de un sistem rectangular de coordonate carteziene, *Oxyz*. Din Fig. C2 deducem că

$$\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z. \qquad (C.4)$$

Dacă $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ sunt versorii axelor *Ox*, *Oy* şi respectiv *Oz*, atunci vectorii $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ şi $\vec{a}_z$ pot fi scrişi astfel:

$$\vec{a}_x=a_x\vec{i}\,,\ \vec{a}_y=a_y\vec{j}\,,\ \vec{a}_z=a_z\vec{k}\,,$$

iar vectorul $\vec{a}$ (scris în funcţie de componentele sale a_x, a_y şi a_z) devine:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\,. \qquad (C.5)$$

Relaţia (C.5) dă aşa-numita *expresia analitică a vectorului* $\vec{a}$. Utilizând notaţiile

$$a_x = a_1,\ a_y = a_2,\ a_z = a_3,$$

$$\vec{i} = \vec{u}_1,\ \vec{j} = \vec{u}_2,\ \vec{k} = \vec{u}_3,$$

relația (C.5) mai poate fi scrisă sub forma:

$$\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{u}_i\,. \qquad \text{(C.6)}$$

În cele ce urmează, ori de câte ori avem o sumare după un indice care se repetă în același termen, vom renunța la semnul sumă. Această convenție poartă numele de *convenția lui Einstein*. Conform acesteia, relația (C.6) devine

$$\vec{a} = a_i\vec{u}_i\,,\ \left(i = \overline{1,3}\right). \qquad \text{(C.7)}$$

Vectorul de poziție al oricărui punct P în raport cu un reper cartezian $Oxyz$ poate fi exprimat și cu ajutorul expresiei (C.7). Poziția punctului P este unic determinată, fie prin coordonatele sale: x, y și z, fie prin vectorul de poziție $\vec{r}$, care are originea în O și extremitatea în P. Practic, fiecărui punct P îi corespunde un anumit vector de poziție $\vec{r}$ în raport cu reperul cartezian $Oxyz$. Observând că x, y și z sunt componentele vectorului $\vec{r}$ pe axele reperului $Oxyz$, vom scrie expresia analitică a lui $\vec{r}$, particularizând relația (C.6) astfel:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_i\vec{u}_i,\ \left(i = \overline{1,3}\right). \qquad \text{(C.8)}$$

Considerând trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ (cu componentele indicate în paranteze),

$$\vec{a} = \vec{a}\left(a_x,\ a_y,\ a_z\right),\ \vec{b} = \vec{b}\left(b_x,\ b_y,\ b_z\right),\ \vec{c} = \vec{c}\left(c_x,\ c_y,\ c_z\right) \qquad \text{(C.9)}$$

și utilizând expresiile analitice ale acestora în acord cu relația (C.7), deducem că în cazul adunării vectoriale, relația vectorială $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ este echivalentă cu următoarele trei relații scalare:

$$c_i = a_i + b_i,\ \left(i = \overline{1,3}\right). \qquad \text{(C.10)}$$

Scăderea a doi vectori

Considerând doi vectori liberi $\vec{a}$ și $\vec{b}$, definim *operația de scădere* a vectorului $\vec{b}$ din vectorul $\vec{a}$ prin relația

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}\,.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Această operație reprezintă de fapt o consecință a adunării vectoriale, deoarece diferența vectorială $\vec{a}-\vec{b}$ se reduce la suma $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, unde vectorul $\left(-\vec{b}\right)$ este opusul lui $\vec{b}$, rezultanta obținându-se după regula cunoscută (a paralelogramului). Vectorul diferență, $\vec{d}$, are originea în extremitatea vectorului scăzător $\left(\vec{b}\right)$ și extremitatea în extremitatea vectorului descăzut $\left(\vec{a}\right)$. Proiectând relația vectorială $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ pe axele reperului cartezian *Oxyz*, se obțin cele trei ecuații scalare echivalente:

$$d_i = a_i - b_i, \quad \left(i=\overline{1,3}\right). \tag{C.11}$$

Înmulțirea unui vector cu un scalar

Fie $\vec{a}$ un vector liber și λ un scalar real. Produsul dintre scalarul λ și vectorul $\vec{a}$ se notează cu $\lambda\vec{a}$ și este un vector coliniar cu $\vec{a}$, de modul $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$, având același sens cu $\vec{a}$ dacă $\lambda>0$ și sensul opus lui $\vec{a}$, dacă $\lambda<0$. Dacă $\lambda=0$, sau dacă $\vec{a}=0$, (vectorul nul), avem $\lambda\vec{a}=0$.

Faptul că doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari poate fi exprimat printr-o relație de forma

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}, \tag{C.12-1}$$

sau,

$$\vec{a}=\mu\vec{b}. \tag{C.12-2}$$

Înmulțirea unui vector cu un scalar are următoarele proprietăți:

1. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;
2. $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;
3. $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\beta\left(\alpha\vec{a}\right)=\alpha\beta\vec{a}$;
4. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$.

Considerând n vectori, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, dacă există niște scalari reali, α_1, α_2, ..., α_n, nu toți nuli, astfel încât

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0, \tag{C.13}$$

atunci spunem că vectorii $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ sunt *liniar dependenți*. Dacă această relație are loc numai pentru $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_n=0$ atunci vectorii

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ se numesc *liniar independenți*. De exemplu, dacă considerăm combinația liniară a doi vectori necoliniari, $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$:

$$\vec{a}_3 = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2, \qquad (C.14)$$

în care scalarii α_1 și α_2 nu sunt simultan nuli, atunci vectorul $\vec{a}_3$, este situat în planul determinat de direcțiile vectorilor $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$, adică vectorii $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ și $\vec{a}_3$ sunt coplanari, iar relația (C.14) exprimă condiția de coplanaritate a celor trei vectori. Aceasta poate fi scrisă și sub forma:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_2\vec{a}_3 = 0, \qquad (C.15)$$

adică cei trei vectori coplanari sunt *liniar dependenți*. Reciproc, dacă trei vectori sunt liniar dependenți, atunci ei sunt coplanari. Din ecuația vectorială (C.13) deducem că vectorii $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ sunt liniar independenți, $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0)$, dacă rangul matricii sistemului este egal cu numărul necunoscutelor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$. Rezultă de aici că, în spațiul euclidian E_3 există cel mult trei vectori liniar independenți, care formează o bază a acestui spațiu.

Să considerăm sistemul de versori $\vec{i}, \vec{j}$ și $\vec{k}$ ai axelor reperului cartezian $Oxyz$. Aceşti vectori sunt liniar independenți, deci formează o bază pe spațiul E_3, și orice vector $\vec{a}$ poate fi scris în funcție de componentele sale (a_x, a_y, a_z) și elementele bazei $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ conform relației (C.5):

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Produsul scalar

Prin definiție, *produsul scalar* a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se notează prin $\vec{a}\cdot\vec{b}$ și este dat de expresia:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = a_ib_i, \quad \left(i = \overline{1,3}\right). \qquad (C.16)$$

Din relația (C.16), rezultă că produsul scalar a doi vectori este o mărime scalară (un scalar).

Proprietăți:

- produsul scalar este comutativ, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- produsul scalar este distributiv față de adunare:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c};$$

- dacă $\vec{a}=\vec{b}$, atunci $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=a^2$;

- pentru orice scalar λ, avem:

$$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\vec{b}\cdot(\lambda\vec{a})=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right);$$

- dacă produsul scalar al celor doi vectori este nul $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}=0\right)$ atunci aceşti vectori sunt fie ortogonali, fie măcar unul din ei este nul;

- considerând $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ şi $\vec{u}_3$ versorii unui triedru ortogonal, rezultă atunci că

$$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=\vec{u}_2\cdot\vec{u}_3=\vec{u}_1\cdot\vec{u}_3=0$$

şi

$$\vec{u}_1^{\,2}=\vec{u}_2^{\,2}=\vec{u}_3^{\,2}=1,$$

relații care pot fi scrise condensat sub forma:

$$\vec{u}_i\cdot\vec{u}_k=\delta_{ik}, \tag{C.17}$$

unde δ_{ik} este tensorul unitate simetric de ordinul al doilea (simbolul lui Kronecker):

$$\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k;\end{cases} \tag{C.18}$$

- utilizând relațiile (C.5) şi (C.18) produsul scalar al vectorilor $\vec{a}\left(a_x,\ a_y,\ a_z\right)$ şi $\vec{b}\left(b_x,\ b_y,\ b_z\right)$ se poate exprima analitic astfel:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_i\vec{u}_i\right)\cdot\left(b_j\vec{u}_j\right)=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i,\quad\left(i=\overline{1,3}\right). \tag{C.19}$$

În particular, dacă $\vec{a}=\vec{b}$,

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=a^2=a_ia_i=a_1^2+a_2^2+a_3^2,\quad\left(i=\overline{1,3}\right). \tag{C.20}$$

Mărimea proiecției vectorului $\vec{a}$ pe una din axele unui reper cartezian *Oxyz* (de exemplu axa Ox_i, de versor $\vec{u}_i$) este dată de produsul scalar dintre vectorul $\vec{a}$ şi versorul axei, $\vec{u}_i$:

$$(\vec{a})_i=\vec{a}\cdot\vec{u}_i=a_k\vec{u}_k\cdot\vec{u}_i=a_k\delta_{ik}=a_i. \tag{C.21}$$

În fizică, produsul scalar a doi vectori este folosit, de exemplu, pentru a exprima lucrul mecanic elementar efectuat de o forță $\vec{F}$, care,

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

acționând asupra unui corp, își deplasează punctul de aplicație cu mărimea $d\vec{r}$: $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sau pentru a exprima fluxul elementar al unui anumit vector (de exemplu, inducția magnetică, $\vec{B}$) printr-o anumită suprafață elementară $d\vec{S}$: $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

Produsul vectorial

Fie doi vectori liberi $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Se numește *produs vectorial* al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ un vector notat cu $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ și caracterizat prin:

- direcția normală pe planul determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$;
- sensul astfel încât vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ să formeze un triedru drept;
- mărimea egală cu aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ presupuși aplicați în punctul O (vezi Fig. C5).

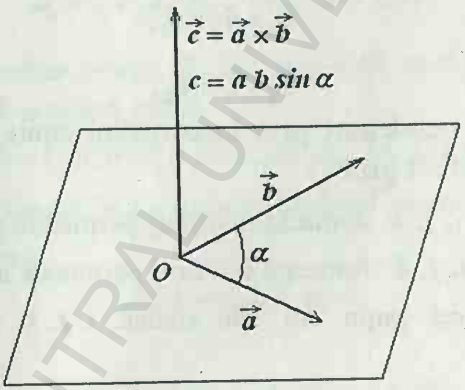


Fig. C5

Prin definiție, produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este dat de expresia:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) \vec{u}_c = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{u}_i, \qquad \text{(C.22)}$$

unde $\vec{u}_c$ este versorul lui $\vec{c}$, iar ε_{ijk}, $\left(i, j, k = \overline{1,3}\right)$ este pseudotensorul unitate complet antisimetric de ordinul al treilea (simbolul Levi-Civita).

Proprietățile produsului vectorial a doi vectori:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- produsul vectorial este anticomutativ, adică, $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

- dacă λ este un scalar, atunci $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$;

- produsul vectorial este distributiv față de adunare,

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c};$$

- dacă unul din vectori este nul, sau cei doi vectori sunt coliniari, produsul vectorial este nul. În situația din urmă avem:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{a}=\lambda(\vec{a}\times\vec{a})=0;$$

- între versorii $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ și $\vec{u}_3$ ai unui triedru ortogonal drept există următoarele relații:

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_1=0,\ \vec{u}_2\times\vec{u}_2=0,\ \vec{u}_3\times\vec{u}_3=0,$$

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\vec{u}_3,$$

$$\vec{u}_2\times\vec{u}_3=\vec{u}_1, \qquad \text{(C23)}$$

$$\vec{u}_3\times\vec{u}_1=\vec{u}_2,$$

care pot fi scrise condensat prin intermediul simbolului de permutare Levi-Civita, ε_{ijk}, definit prin:

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1, & \text{dacă } i,j,k \text{ formează o (orice) permutare pară a lui 1, 2, 3,}\\ -1, & \text{dacă } i,j,k \text{ formează o (orice) permutare impară a lui 1, 2, 3,}\\ 0, & \text{dacă cel puțin doi din indicii } i,j,k \text{ sunt egali,}\end{cases}$$

adică:

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{312}=\varepsilon_{231}=1,$$

$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{312}=-1,$$

$$\varepsilon_{112}=\varepsilon_{233}=\ldots.=0.$$

Utilizând simbolul Levi-Civita, relațiile (C.23) se scriu condensat, astfel:

$$\vec{u}_i\times\vec{u}_j=\varepsilon_{ijk}\vec{u}_k,\ \left(i,j,k=\overline{1,3}\right). \qquad \text{(C.24)}$$

Se poate verifica ușor faptul că simbolul lui Levi-Civita se bucură de proprietatea:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqs}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{is}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{js}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{ks}\end{vmatrix}. \qquad \text{(C.25)}$$

Dacă egalăm indicii i şi p $(i=p)$ şi sumăm după valoarea lor comună, rezultă: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iqs}=\delta_{jq}\delta_{ks}-\delta_{js}\delta_{kq}$, unde toţi indicii iau valori de la 1 la 3. Punând în această relaţie $j=q$ şi sumând din nou după valoarea comună a acestor doi indici va rezulta: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijs}=\delta_{jj}\delta_{ks}-\delta_{js}\delta_{kj}=3\delta_{ks}-\delta_{ks}=2\delta_{ks}$. În virtutea acestei proprietăţi, înmulţind relaţia (C.24) cu ε_{ijs} şi efectuând sumarea după indicii i şi j se obţine:

$$\varepsilon_{ijs}\vec{u}_i\times\vec{u}_j=\varepsilon_{ijs}\varepsilon_{ijk}\vec{u}_k=2\delta_{sk}\vec{u}_k=2\vec{u}_s$$

de unde,

$$\vec{u}_s=\frac{1}{2}\varepsilon_{sij}\vec{u}_i\times\vec{u}_j,\ \left(i,\ j,\ s=\overline{1,3}\right).$$

Având în vedere relaţia (C.24), produsul vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$ poate fi exprimat sub formă analitică astfel:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_i\vec{u}_i)\times(b_j\vec{u}_j)=\varepsilon_{ijk}a_ib_j\vec{u}_k,\ \left(i,\ j,\ k=\overline{1,3}\right). \qquad \text{(C.26)}$$

O altă modalitate de a exprima produsul vectorial a doi vectori, $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, este următoarea:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\varepsilon_{ijk}a_ib_j\vec{u}_k=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}, \qquad \text{(C.27)}$$

adică, produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se poate exprima analitic, sub forma unui determinant simbolic de ordinul trei.

Proiectând vectorul $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ pe direcţia x_p (înmulţindu-l scalar cu versorul $\vec{u}_p$), obţinem:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_p=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{u}_p=\varepsilon_{ijk}a_ib_j\vec{u}_k\cdot\vec{u}_p=\varepsilon_{ijk}a_ib_j\delta_{kp}=\varepsilon_{ijp}a_ib_j=\varepsilon_{pij}a_ib_j.$$

BCU "ASACHI" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În cazul în care vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari, deoarece componentele lor sunt proporționale, rezultă că determinantul din (C.27) este nul, deoarece liniile doi și trei ale acestuia au elementele proporționale.

În fizică, produsul vectorial a doi vectori este utilizat, de exemplu:

- pentru a exprima momentul unei forțe $\vec{F}$ în raport cu un pol O: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, unde $\vec{r}$ este vectorul care „unește" polul O cu punctul de aplicație al vectorului forță;
- pentru a exprima „vectorul"[4] vârtej în mecanica fluidelor: $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}$, unde ∇ este operatorul nabla, iar $\vec{v}(x, y, z)$ este câmpul vitezelor fluidului;
- pentru a exprima viteza liniară a unui corp, $\vec{v}_{rot}$, în mișcarea de rotație cu viteza instantanee de rotație $\vec{\omega}$, în jurul unei axe: $\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}$;
- pentru a exprima inducția magnetică a câmpului magnetic creat de un curent liniar: $\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{(\Gamma)} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$, unde μ este permeabilitatea magnetică a mediului în care se află circuitul electric, $d\vec{l}$ este un element de linie/arc (având sensul dat de curentul electric, a cărui intensitate este I) al circuitului electric liniar Γ, iar $\vec{r}$ este vectorul care „unește" punctul în care se determină inducția câmpului magnetic cu originea vectorului $d\vec{l}$;
- pentru a exprima densitatea fluxului de energie a unui câmp electromagnetic (vectorul Poynting): $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, unde $\vec{E}$ și $\vec{H}$ sunt intensitățile componentelor electrică și respectiv magnetică ale câmpului electromagnetic etc.

[4] Am scris cuvântul „vectorului" între ghilimele deoarece, după cum vom vedea în secțiunea C.3., vârtejul $\vec{\Omega}$ este de fapt un pseudovector și nu un vector polar (vector).

BUJIASCA CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Produsul mixt a trei vectori

Fie trei vectori liberi, $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$, cu punctul de aplicaţie în O. Expresia

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=a_i\varepsilon_{ijk}b_jc_k=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k\left[=a_i\vec{u}_i\cdot\left(b_j\vec{u}_j\times c_k\vec{u}_k\right)=a_ib_jc_k\vec{u}_i\cdot\left(\vec{u}_j\times\vec{u}_k\right)\right]=$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}, \tag{C.28}$$

unde[5]

$$\vec{u}_i\cdot(\vec{u}_j\times\vec{u}_k)=\varepsilon_{ijk},$$

se numeşte *produsul mixt al vectorilor* $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$.

Din relaţia de definiţie (C.28) observăm că proprietăţile produsului mixt sunt strâns legate de proprietăţile determinanţilor, adică produsul mixt este nul dacă două linii ale determinantului sunt proporţionale şi îşi schimbă semnul dacă inversăm două linii ale determinantului. De asemenea, la permutările ciclice ale celor trei vectori, produsul mixt rămâne neschimbat: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

În fizică, produsul mixt a trei vectori este utilizat, de exemplu, pentru a exprima momentul unei forţe $\vec{F}$ faţă de o axă Δ: $M_\Delta=\vec{u}_\Delta\cdot\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)=\vec{u}_\Delta\cdot\vec{M}_O$, unde $\vec{u}_\Delta$ este versorul axei Δ, iar $\vec{M}_O$ este momentul forţei $\vec{F}$ faţă de un punct/pol (oarecare[6]), O, de pe axă.

---

[5] De aici putem extrage o altă definiţie a simbolului Levi-Civita, ca fiind produsul mixt al versorilor unui reper triortogonal pe spaţiul euclidian E_3: $\varepsilon_{ijk}=\vec{u}_i\cdot\left(\vec{u}_j\times\vec{u}_k\right)$ (la fel cum, simbolul Kronecker este dat de produsul scalar al aceloraşi versori: $\delta_{ij}=\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j$).

[6] Prin definiţie, momentul unei forţe faţă de o axă este egal cu proiecţia pe acea axă a momentului forţei faţă de un punct/pol (oarecare) de pe acea axă (se demonstrează că momentul unei forţe faţă de o axă, M_Δ, este acelaşi, indiferent de punctul/polul O de pe axă, faţă de care este calculat – în prealabil – momentul $\vec{M}_O$ al forţei respective).

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Produsul mixt de patru vectori
(produsul scalar de produse vectoriale)

Se obține produsul mixt de patru vectori dacă unul din vectorii produsului mixt de trei vectori este scris ca un produs vectorial al altor doi vectori, adică: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)$. Utilizând metoda analitică obținem:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k\varepsilon_{ipq}c_pd_q=$$

$$=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq}a_jb_kc_pd_q=\left(\delta_{jp}\delta_{kq}-\delta_{jq}\delta_{kp}\right)a_jb_kc_pd_q=\delta_{jp}\delta_{kq}a_jb_kc_pd_q-$$

$$-\delta_{jq}\delta_{kp}a_jb_kc_pd_q=a_jc_jb_kd_k-a_jd_jb_kc_k=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right). \tag{C.29}$$

Dublul produs vectorial

Considerând trei vectori liberi, $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$, cu originea într-un punct O, definim dublul produs vectorial al acestor vectori prin relația:

$$\vec{d}=\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right). \tag{C.30}$$

Din cele prezentate mai sus (în paragraful dedicat produsului vectorial) deducem că, din punct de vedere geometric, vectorul $\vec{d}$ este ortogonal atât pe vectorul $\vec{a}$, cât și pe vectorul $\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$, deci este coplanar cu vectorii $\vec{b}$ și $\vec{c}$. Analitic, dublul produs vectorial se scrie astfel:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\varepsilon_{ijk}a_j\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_k\vec{u}_i=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_jb_lc_m\vec{u}_i=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}a_jb_lc_m\vec{u}_i=$$

$$=\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)a_jb_lc_m\vec{u}_i=a_jb_ic_j\vec{u}_i-a_jb_jc_i\vec{u}_i=a_jc_j\left(b_i\vec{u}_i\right)-a_jb_j\left(c_i\vec{u}_i\right)=$$

$$=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}. \tag{C.31}$$

În fizică, dublul produs vectorial este utilizat, de exemplu, pentru a exprima forța macroscopică de interacțiune dintre două circuite liniare parcurse de curent electric:

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}=\frac{\mu}{4\pi}I_1I_2\oint_{(\Gamma_1)}\oint_{(\Gamma_2)}\frac{d\vec{l}_2\times\left(d\vec{l}_1\times\vec{r}_{12}\right)}{r_{12}^3},$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde μ este permeabilitatea magnetică a mediului în care se află circuitele, I_1 şi I_2 sunt intensităţile curenţilor electrici continui care străbat cele două circuite, $d\vec{l}_1$ şi $d\vec{l}_2$ sunt două elemente vectorizate de linie/arc ale celor două circuite (Γ_1 şi respectiv, Γ_2), iar $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ este vectorul care „uneşte" originea lui $d\vec{l}_1$ cu aceea a lui $d\vec{l}_2$.

Identitatea lui Lagrange

Ridicând la pătrat produsul vectorial a doi vectori liberi $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, obţinem:

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 &= \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k\varepsilon_{imn}a_mb_n = \\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}a_ja_mb_kb_n = \left(\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\right)a_ja_mb_kb_n = \delta_{jm}\delta_{kn}a_ja_mb_kb_n - \\ &-\delta_{jn}\delta_{km}a_ja_mb_kb_n = a_ja_jb_kb_k - a_ja_kb_kb_j = \left(a_ja_j\right)\left(b_kb_k\right) - \\ &-\left(a_jb_j\right)\left(a_kb_k\right) = \vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2,\end{aligned} \tag{C.32}$$

relaţie numită *identitatea lui Lagrange.*

C.3. Tensori şi pseudotensori

Întrucât experienţa la catedră a autorilor a arătat o anume dificultate din partea studenţilor în a înţelege şi utiliza noţiunea de *pseudotensor*, în cele ce urmează ne vom referi pe scurt asupra acesteia. Pentru un fizician, de o atenţie aparte se bucură noţiunile care derivă ca şi cazuri particulare din cea de pseudotensor, respectiv: noţiunea de *pseudoscalar* şi cea de *pseudovector.* Evident, un pseudoscalar este un pseudotensor de ordinul zero, iar un pseudovector este un pseudotensor de ordinul întâi. De obicei, un pseudoscalar mai este numit şi *scalar de specia a doua* (scalarul numindu-se atunci *de specia întâi*), iar un pseudovector mai este numit *vector de specia* (uneori *speţa*) *a doua* sau *vector axial* (vectorul numindu-se atunci *de specia/speţa întâi* sau *vector polar*).

Din punct de vedere strict matematic situaţia este cât se poate de simplă, însă acest mod de a pune problema nu oferă o imagine cât de cât

BCU TIMIŞOARA CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

intuitivă asupra necesităţii introducerii acestei noţiuni. De fapt, algebric vorbind, singura diferenţă dintre un tensor şi un pseudotensor este apariţia în legea de transformare a celui de-al doilea a unui factor în plus (determinantul matricei transformării), faţă de aceeaşi lege din cazul primului (tensorului). Pentru a lămuri aceste aspecte vom porni chiar de la definiţia tensorului.

Există mai multe moduri de a introduce noţiunea de tensor; în cazul de faţă cea mai indicată este aceea care utilizează noţiunea de *transformare ortogonală de coordonate*. Fără a intra în amănunte[7], lucrurile stau în felul următor: poziţia în spaţiu a unui punct oarecare P faţă de un sistem de referinţă dat poate fi precizată cu ajutorul coordonatelor carteziene ale acestui punct, x_1, x_2, x_3, considerate în raport cu un sistem triortogonal de axe de coordonate, care are originea într-un punct oarecare O al acelui referenţial. Un astfel de *sistem de coordonate* se numeşte *cartezian* (vezi Fig. C6).

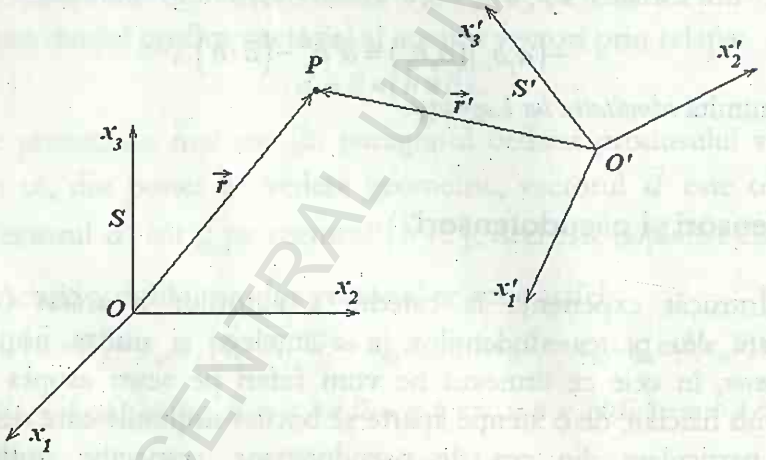


Fig. C6

Întrucât atât poziţia punctului O, cât şi direcţiile axelor de coordonate sunt arbitrare (datorită omogeneităţii şi izotropiei spaţiului vid)

[7] Pentru „o imagine" mai detaliată asupra transformărilor ortogonale de coordonate îndrumăm cititorul să consulte Anexa A din lucrarea *Applied Analytical Mechanics* (Ioan Merches, Lucian Burlacu, „The Voice of Bucovina" Press, Iaşi, 1995).

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

este necesar să definim legea de transformare a coordonatelor punctului P, atunci când se trece de la sistemul de coordonate inițial, $S\ (Ox_1x_2x_3)$, la un alt sistem de coordonate, $S'\ (O'x_1'x_2'x_3')$. Este evident că noile coordonate ale punctului P (față de S') sunt funcții de coordonatele x_i, $(i=\overline{1,3})$ ale aceluiași punct față de sistemul inițial, S:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3), \quad (i=\overline{1,3}).$$

Pentru ca ecuațiile $x_i' = const._i$, $(i=\overline{1,3})$ să reprezinte ecuațiile unor plane față de reperul S, trebuie ca transformarea de mai sus să fie liniară, adică de forma:

$$x_i' = R_{ij}x_j + X_i, \quad (i=\overline{1,3}),$$

unde X_i, $(i=\overline{1,3})$ sunt coordonatele originii O' a noului reper, S', față de reperul inițial, S. Necesitatea ca distanța dintre oricare două puncte din spațiu să fie aceeași, indiferent față de care sistem de referință este determinată/măsurată, impune setului de nouă mărimi R_{ij}, $(i,j=\overline{1,3})$ (care, privite ca formând o matrice, poartă numele de *matricea transformării* de coordonate) condiția:

$$R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk}, \quad (i,j,k=\overline{1,3}),$$

numită *condiție de ortogonalitate*, care reduce la trei numărul parametrilor R_{ij} independenți. Transformarea liniară $x_i' = R_{ij}x_j + X_i$, $(i=\overline{1,3})$, care satisface condiția de ortogonalitate se numește *transformare ortogonală neomogenă de coordonate*. Dacă $X_i = 0$, $(i=\overline{1,3})$ atunci transformarea se numește *omogenă*.

Se poate arăta[8] că determinantul matricei transformării este ori $(+1)$, ori (-1):

$$\det\hat{R} \equiv \det(R_{ij}) = \pm 1.$$

Transformările pentru care $\det\hat{R} = +1$ se numesc *proprii*, iar cele pentru care $\det\hat{R} = -1$ se numesc *improprii*. De exemplu, translațiile

[8] Idem.

BCU IAȘI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$\left[x_i' = X_i,\ \left(i = \overline{1,3}\right)\right]$ sau rotațiile $\left[x_i' = R_{ij}x_j,\ \left(i, j = \overline{1,3}\right)\right]$ sunt exemple de transformări ortogonale proprii, iar inversiile (reflexiile în oglindă ale axelor de coordonate) – de exemplu, reflexia în oglindă reprezentată grafic în Fig. C7, a cărei matrice a transformării este $\hat{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – fac parte din categoria transformărilor ortogonale improprii.

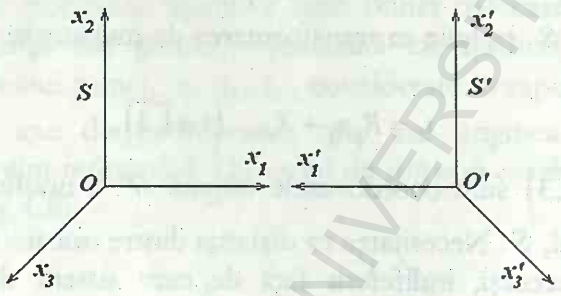


Fig. C7

Se poate arăta că mulțimea transformărilor ortogonale neomogene de coordonate formează o structură de grup în raport cu operația de compunere a acestor transformări, numit *grupul transformărilor ortogonale neomogene de coordonate*. Proprietățile acestui grup, precum și principalele lui subgrupuri pot fi găsite în lucrarea amintită anterior[9].

Pentru înțelegerea noțiunilor de pseudoscalar și pseudovector (și, în general, a celei de pseudotensor) este necesar să definim noțiunea de *orientare* a unui reper. Astfel, un *reper* S se numește *drept* (sau de *orientare dreaptă*) dacă, rotind un burghiu drept (orientat de-a lungul axei Ox_3 și având vârful în sensul axei) cu un unghi de 90^o, produce suprapunerea axei Ox_1 peste axa Ox_2 (vezi Fig. C8). Altfel spus, dacă $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3$, unde $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ și $\vec{u}_3$ sunt versorii axelor Ox_1, Ox_2 și respectiv Ox_3, atunci reperul este drept. În acest fel apare evidentă extrem de importanta legătură care există între operația de produs vectorial și noțiunea de orientare a unui

[9] Idem.

BCU "LUCIAN BLAGA" UNIVERSITY LIBRARY

reper. Un reper stâng (de orientare stângă) poate fi obţinut efectuând un număr impar de inversii spaţiale (ale axelor de coordonate). În termenii transformărilor ortogonale de coordonate, consideraţiile de mai sus asupra noţiunii de orientare a unui reper pot fi exprimate matematic într-un mod foarte concis, astfel:

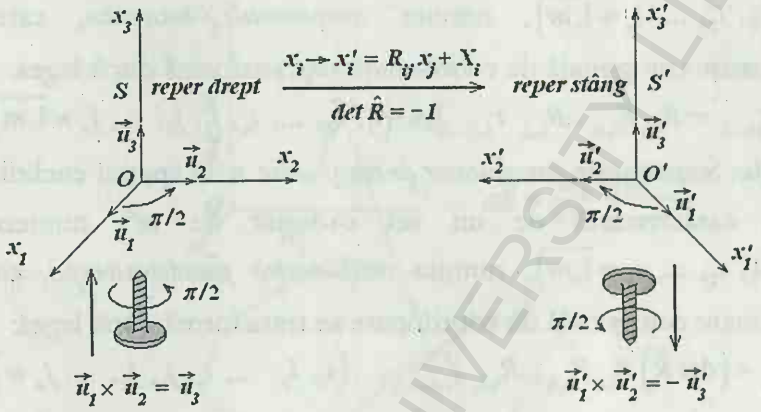


Fig. C8

Fie un reper drept, S. Atunci, orice reper S' care rezultă printr-o transformare ortogonală de coordonate având:

$\nearrow$ $\det \hat{R} = +1$ este un reper drept,

$\searrow$ $\det \hat{R} = -1$ este un reper stâng.

În acest cadru putem defini principalele mărimi algebrice astfel:

Definiţie: Se numeşte *scalar* o mărime caracterizată de un număr real, care rămâne neschimbat la orice transformare de coordonate.

Pentru o mărime fizică scalară definiţia este asemănătoare, numai că în acest caz trebuie precizată şi unitatea de măsură.

Definiţie: Un scalar a cărui formă algebrică este aceeaşi în orice sistem de coordonate se numeşte *invariant.*

Definiţie: Se numeşte *vector*, $\vec{v}$, o mărime caracterizată de un sistem ordonat de trei numere reale, $\{v_1, v_2, v_3\}$, numite *componentele vectorului*, care la o transformare ortogonală de coordonate se transformă după legea:

$$v_i' = R_{ij}v_j, \quad \left(i, j = \overline{1,3}\right).$$

BCU "Ion Creangă" UNIVERSITY LIBRARY

v_i' sunt componentele vectorului în noul sistem de coordonate, iar R_{ij}, $\left(i, j = \overline{1,3}\right)$ sunt elementele matricei transformării.

Definiţie: Se numeşte *tensor de rang/ordin n* în spaţiul euclidian E_m o mărime caracterizată de un set ordonat de m^n numere reale, $t_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $\left(i_1, i_2, \ldots, i_n = \overline{1,m}\right)$, numite *componentele tensorului*, care la o transformare ortogonală de coordonate se transformă după legea:

$$t'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \ldots R_{i_n j_n}\, t_{j_1 j_2 \ldots j_n}, \quad \left(i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n = \overline{1,m}\right).$$

Definiţie: Se numeşte *pseudotensor de rang/ordin n* în spaţiul euclidian E_m o mărime caracterizată de un set ordonat de m^n numere reale, $t^*_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $\left(i_1, i_2, \ldots, i_n = \overline{1,m}\right)$, numite *componentele pseudotensorului*, care la o transformare ortogonală de coordonate se transformă după legea:

$$t^{*\,'}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \left(\det \hat{R}\right) R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \ldots R_{i_n j_n}\, t^*_{j_1 j_2 \ldots j_n}, \quad \left(i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n = \overline{1,m}\right).$$

Cu alte cuvinte, la o transformare ortogonală proprie $\left(\det \hat{R} = +1\right)$ pseudotensorii se transformă la fel ca tensorii, iar la o transformare ortogonală improprie $\left(\det \hat{R} = -1\right)$ apare o diferenţă de semn. De exemplu, la o inversie a celor trei axe de coordonate (o transformare ortogonală improprie), $x_i \to x'_i = -x_i$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$ componentele unui vector satisfac relaţiile: $v'_i = -v_i$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$, pe când, componentele unui pseudovector satisfac relaţiile: $v^{*\,'}_i = v^*_i$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$. Ţinând seama de legătura (semnalată anterior) dintre orientarea reperelor şi caracterul propriu sau impropriu al transformărilor ortogonale de coordonate, putem spune că la schimbarea orientării unui reper tensorii îşi schimbă semnul componentelor, pe când pseudotensorii nu.

Pentru a ilustra aceste afirmaţii vom considera un singur exemplu, cel al vectorului axial inducţie a câmpului magnetic creat în vid de un element de circuit liniar parcurs de un curent continuu de intensitate I şi situat în planul x_1Ox_2 (vezi Fig. C9). După cum se ştie, valoarea acestui câmp într-un punct determinat de vectorul „de poziţie” $\vec{r}$, care are

originea în originea elementului de curent $I\,d\vec{l}$ este dată de legea Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}.$$

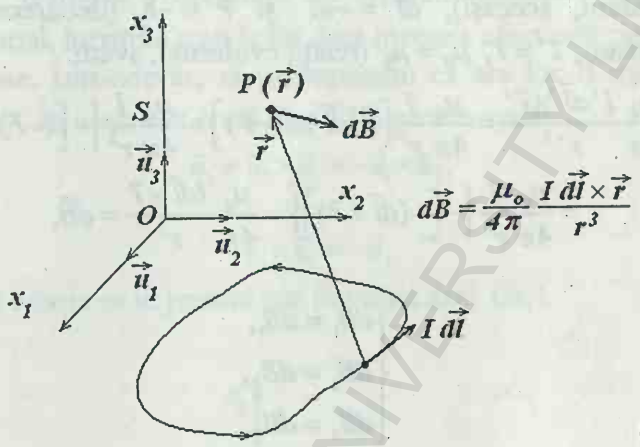


Fig. C9

Deoarece elementul de curent se află în planul x_1Ox_2, avem:

$$Id\vec{l}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ Idx_1 & Idx_2 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = Ix_3dx_2\vec{u}_1 + Ix_2dx_1\vec{u}_3 - Ix_1dx_2\vec{u}_3 - Ix_3dx_1\vec{u}_2,$$

ceea ce conduce la următoarele componente ale câmpului magnetic elementar $d\vec{B}$ în punctul considerat, $P(\vec{r})$:

$$\begin{cases} dB_1 = +\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{x_3dx_2}{r^3}, \\ dB_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{x_3dx_1}{r^3}, \\ dB_3 = +\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(x_2dx_1 - x_1dx_2)}{r^3}. \end{cases}$$

Efectuând acum transformarea ortogonală improprie dată de relațiile:

$$x_i \to x_i' = -x_i,\ \left(i = \overline{1,3}\right),$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(cu alte cuvinte, realizând inversia celor trei axe de coordonate, sau altfel spus, schimbând orientarea reperului) şi având în vedere faptul că din punct de vedere fizic configuraţia nu s-a modificat (avem acelaşi circuit electric liniar, parcurs de acelaşi curent, în acelaşi sens etc.), ceea ce înseamnă că după transformare $r'=r$ (lungimea vectorului „de poziţie" $\vec{r}$ rămâne, evident, aceeaşi), $d\vec{l}\,'=-d\vec{l}$ şi $\vec{r}\,'=-\vec{r}$ (deoarece axele şi-au schimbat sensul), $I'=I$, $\mu_0'=\mu_0$ (relaţii evidente), avem:

$$d\vec{B}'=\frac{\mu_0'}{4\pi}\frac{I'd\vec{l}\,'\times\vec{r}\,'}{r'^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}\left[(-d\vec{l})\times(-\vec{r})\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}\left\{-\left[(-\vec{r})\times d\vec{l}\,\right]\right\}=$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}\left\{-\left[-(d\vec{l}\times\vec{r})\right]\right\}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}=d\vec{B},$$

adică:

$$\begin{cases} dB_1'=dB_1, \\ dB_2'=dB_2, \\ dB_3'=dB_3, \end{cases}$$

ceea ce este în acord cu afirmaţiile de mai sus: la o transformare ortogonală improprie, sau echivalent, la schimbarea orientării reperului, componentele pseudotensorilor (în cazul nostru a pseudovectorului $d\vec{B}$) nu se modifică.

Să revenim acum asupra observaţiei făcute mai sus referitoare la statutul special al operaţiei de produs vectorial în legătură cu caracterul pseudo- sau non-pseudo- al tensorilor. Astfel, am văzut că efectul unei inversii (oglindiri) a axelor de coordonate este schimbarea orientării reperului afectat de acea inversie. Dar schimbarea orientării unui reper determină schimbarea semnului componentelor tensorilor şi păstrarea nealterată a semnului componentelor pseudotensorilor, fiind astfel strâns legată de caracterul de pseudo- sau non-pseudo- al tensorilor. Întrucât din punct de vedere algebric efectul unei inversii poate fi exprimat cu ajutorul produsului vectorial (al versorilor axelor reperului), apare ca evidentă legătura dintre operaţia de produs vectorial şi caracterul pseudo- sau non-pseudo- al tensorilor. Această observaţie este deosebit de importantă în vederea stabilirii corecte a caracterului pseudo- sau non-pseudo- al scalarilor şi/sau vectorilor şi, în general, al oricăror tensori.

După cum am văzut anterior, în cazul unui reper drept putem scrie că $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3$. Dacă efectuăm acum o inversie (sau un număr impar de inversii) a axelor de coordonate (de exemplu, a axei $Ox_3 : x_3' = -x_3$) orientarea reperului se va schimba, acesta devenind un reper stâng: $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = -\vec{u}_3$. Datorită proprietății de anticomutativitate a operației de produs vectorial, lucrurile stau la fel dacă inversia afectează oricare altă axă de coordonate. Într-adevăr, să presupunem că are loc o inversie a axei $Ox_2 : x_2' = -x_2$. În acest caz (vezi Fig. C10) putem scrie:

$$\vec{u}_3 = \vec{u}_2 \times \vec{u}_1 = -\vec{u}_1 \times \vec{u}_2,$$

sau

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = -\vec{u}_3,$$

adică aceeași relație ca în primul caz (inversia axei Ox_3).

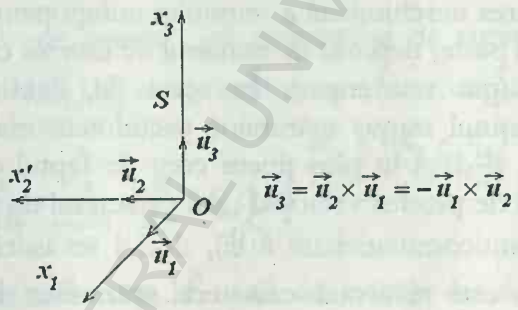


Fig. C10

Situația este aceeași și dacă inversia afectează axa Ox_1 sau, mai general, un număr impar de axe. Dacă, în schimb, au loc un număr par de inversii, atunci orientarea reperului nu se schimbă și nici caracterul de pseudo- sau non-pseudo- al tensorilor. Algebric, această proprietate se poate exprima tot cu ajutorul produsului vectorial. Într-adevăr, dacă, de exemplu, au loc două inversii (să zicem, ale axelor Ox_1 și Ox_3), atunci putem scrie (vezi Fig. C11): $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3$, ceea ce înseamnă că reperul este drept, adică la fel cum era înaintea celor două inversii.

BCU "LUCIAN BLAGA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

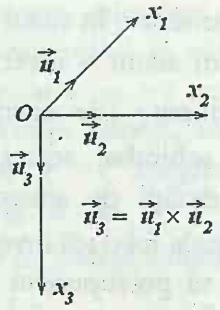


Fig. C11

Din cele discutate mai sus reiese o metodă simplă și foarte ușor de aplicat în vederea stabilirii caracterului de pseudo- sau non-pseudo- al tensorilor. Pentru aceasta trebuie doar să observăm că schimbarea orientării reperului (și deci a semnului componentelor tensorilor – pe de o parte – și păstrarea neschimbată a semnului componentelor pseudotensorilor – pe de altă parte) depinde de numărul de inversii care afectează axele de coordonate (par sau impar). În acest fel, dacă asociem în mod convențional semnul minus mărimilor pseudotensoriale și semnul plus celor tensoriale, și dacă în plus ținem cont de faptul că, în baza acestei asocieri operația de produs vectorial „are caracterul de pseudo-" (datorită proprietății de anticomutativitate a ei), deci i se asociază semnul (-1), atunci problema este rezolvată: caracterul mărimilor tensoriale (de orice ordin) va fi dat de semnul „rezultant" asociat expresiilor care definesc aceste mărimi ($(+1)$ sau (-1)). Exemple:

1) După cum știm, vectorul de poziție $\vec{r}$ al originii unei forțe $\vec{F}$ în raport cu un punct (pol) este un vector polar (vector), la fel ca și vectorul forță $\vec{F}$. Atunci, având în vedere asocierea convențională amintită mai sus, celor două mărimi ($\vec{r}$ și $\vec{F}$) li se asociază semnul $(+1)$. Întrucât operația de produs vectorial are caracter de pseudovector (deci i se asociază semnul (-1)), rezultă că momentul unei forțe $\vec{F}$ în raport cu un pol este un pseudovector. Într-adevăr,

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\underset{(-1)}{\vec{M}} = \underset{(+1)}{\vec{r}} \underset{(-1)}{\times} \underset{(+1)}{\vec{F}};$$

2) Operatorul nabla $\left(\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$ este un vector, viteza liniară a unei particule de fluid în mişcare este tot un vector, deci „vectorul" vârtej,

$$\underset{(-1)}{\vec{\Omega}} = \frac{1}{2} \underset{(+1)}{\nabla} \underset{(-1)}{\times} \underset{(+1)}{\vec{v}}$$

este de fapt un pseudovector (vector axial sau de speţa a doua). În mod analog se poate justifica faptul că rotorul oricărui vector polar este un vector axial (pseudovector);

3) Aşa cum ştim, forţa de interacţiune magnetică ce se exercită între două circuite parcurse de curent electric este un vector (vector polar). Într-adevăr, deoarece elementele de curent $I_1 d\vec{l}_1$ şi $I_2 d\vec{l}_2$, ca şi vectorul „de poziţie" (al elementului de curent $I_2 d\vec{l}_2$ faţă de originea lui $I_1 d\vec{l}_1$) $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ sunt vectori (vectori polari), avem:

$$\underset{(+1)}{\vec{F}_{12}} = \underset{(+1)}{-\vec{F}_{21}} = \frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \oint\limits_{(\Gamma_1)} \oint\limits_{(\Gamma_2)} \frac{\underset{(+1)}{d\vec{l}_2} \underset{(-1)}{\times} \left(\underset{(+1)}{d\vec{l}_1} \underset{(-1)}{\times} \underset{(+1)}{\vec{r}_{12}}\right)}{r_{12}^3};$$

4) Momentul unei forţe $\vec{F}$ faţă de o axă Δ, $M_\Delta = \vec{u}_\Delta \cdot \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) = \vec{u}_\Delta \cdot \vec{M}_O$ ($\vec{u}_\Delta$ fiind versorul axei Δ, iar $\vec{M}_O$ – momentul forţei $\vec{F}$ faţă de un punct/pol oarecare[10] O de pe axă) este un pseudoscalar, deoarece semnul asociat lui este (-1). Într-adevăr:

$$\underset{(-1)}{M_\Delta} = \underset{(+1)}{\vec{u}_\Delta} \cdot \left(\underset{(+1)}{\vec{r}} \underset{(-1)}{\times} \underset{(+1)}{\vec{F}}\right)$$

[10] Prin definiţie, momentul unei forţe faţă de o axă este egal cu proiecţia pe acea axă a momentului forţei faţă de un punct/pol (oarecare) de pe acea axă (se demonstrează că momentul unei forţe faţă de o axă, M_Δ, este acelaşi, indiferent de punctul/polul O de pe axă, faţă de care este calculat – în prealabil – momentul $\vec{M}_O$ al forţei respective).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5) Dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{d}$ sunt vectori axiali, iar $\vec{c}$ este un vector polar, atunci $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$ este un pseudoscalar (scalar de speța a doua). Într-adevăr:

$$\underset{(-1)}{p} = (\underset{(-1)}{\vec{a}} \times \underset{(-1)}{\vec{b}})\cdot(\underset{(+1)}{\vec{c}} \times \underset{(-1)}{\vec{d}}) \text{ etc.}$$

În continuare vom da câteva exemple de mărimi fizice (însoțite de unitățile lor de măsură în *SI*), care au – ca și entități algebrice – ordinul tensorial zero și unu.

1) Exemple de *mărimi fizice scalare*: masa, $m[kg]$; temperatura, $T[K]$; presiunea, $p[N\cdot m^{-2}]$; lucrul mecanic, $L[J]$; concentrația unei substanțe chimice într-o soluție, $c[mol\cdot m^{-3}]$; puterea, $P[W]$; densitatea unei substanțe, $\rho[kg\cdot m^{-3}]$; permeabilitatea magnetică a vidului, $\mu_0[H\cdot m^{-1}]$; potențialul electric într-un punct, $\forall[V]$; fluxul câmpului electric, $\Phi_e[V\cdot m]$ etc.;
2) Exemple de *mărimi fizice pseudoscalare*: momentul unei forțe față de o axă, $M_{\triangle}[N\cdot m]$; fluxul câmpului magnetic, $\Phi_m[T\cdot m^2]$ etc.;
3) Exemple de *mărimi fizice vectoriale*: viteza liniară a unui corp, $\vec{v}[m\cdot s^{-1}]$; forța (newtoniană), $\vec{F}[N]$; accelerația liniară, $\vec{a}[m\cdot s^{-2}]$; intensitatea câmpului electric, $\vec{E}[V\cdot m^{-1}]$; densitatea fluxului de energie electromagnetică (vectorul Poynting), $\vec{Y}[J\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}]$; inducția câmpului electric, $\vec{D}[C\cdot m^{-2} = N\cdot m^{-1}\cdot V^{-1}]$; densitatea de impuls a câmpului electromagnetic, $\vec{g}[kg\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}]$ etc.;
4) Exemple de *mărimi fizice pseudovectoriale*: inducția câmpului magnetic, $\vec{B}[T]$; viteza unghiulară, $\vec{\omega}[rad\cdot s^{-1}]$; momentul unei forțe față de un pol, $\vec{M}[N\cdot m]$; vârtejul curgerii unui fluid, $\vec{\Omega}[s^{-1}]$ etc.

BCU CLUJ-NAPOCA UNIVERSITY LIBRARY

C.4. Elemente de analiză vectorială

C.4.1. Funcţii vectoriale

În cele ce urmează vom considera acei vectori care depind de un parametru real, variabil, t. Dacă fiecărei valori date a parametrului t îi corespunde un vector $\vec{a}$, atunci spunem că $\vec{a}$ este o funcţie vectorială de t şi scriem $\vec{a} = \vec{a}(t)$. Dacă $\vec{r} = \vec{r}(t)$ este vectorul de poziţie al unui punct P în raport cu sistemul de coordonate $Oxyz$, atunci curba descrisă de acest punct este dată de ecuaţiile parametrice: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Considerăm un punct material P definit prin vectorul de poziţie $\vec{a}(t)$ în raport cu originea unui sistem de coordonate $Oxyz$. O variaţie a parametrului real t produce o variaţie corespunzătoare a vectorului de poziţie $\vec{a} = \vec{a}(t)$, astfel încât extremitatea lui va descrie o curbă C, numită *hodograful funcţiei* $\vec{a} = \vec{a}(t)$ (vezi Fig. C12).

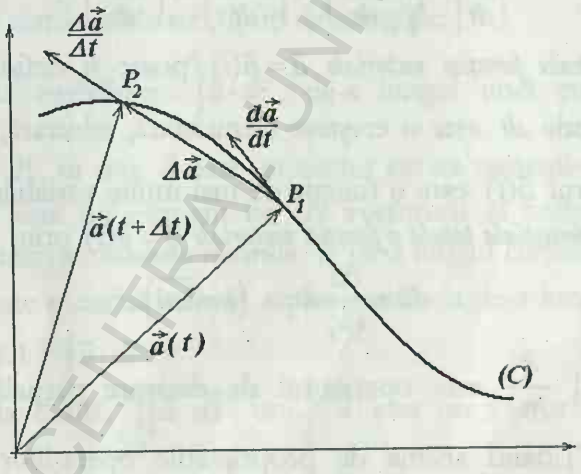


Fig. C12

C.4.2. Derivata şi diferenţiala unei funcţii vectoriale

Considerând că $\vec{a} = \vec{a}(t)$ este o funcţie vectorială continuă de parametrul t, se poate defini *derivata acestei funcţii vectoriale* în raport cu t prin relaţia:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t},$$

unde,

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t),$$

reprezintă creşterea $\Delta\vec{a}$ a funcţiei $\vec{a}(t)$, corespunzătoare unei creşterii Δt a parametrului t (ceea ce determină deplasarea punctului material din punctul P_1 în punctul P_2), iar vectorul $\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$ este un vector coliniar cu $\Delta\vec{a}$. Vectorul $\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$ este un vector paralel cu tangenta în punctul P la curba C, sensul lui corespunzând variaţiei crescătoare a parametrului t. Mărimea (modulul) derivatei $\frac{d\vec{a}}{dt}$ este:

$$\left|\frac{d\vec{a}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{dt}\right)^2}.$$

Diferenţiala funcţiei vectoriale $\vec{a} = \vec{a}(t)$ poate fi definită prin relaţia: $d\vec{a} = \frac{d\vec{a}}{dt}dt$, unde dt este o creştere elementară, arbitrară, a parametrului t. Dacă vectorul $\vec{a}(t)$ este o funcţie de mai multe variabile: $x_1, x_2, ..., x_n$, se defineşte *diferenţiala totală a funcţiei vectoriale* $\vec{a} = \vec{a}(t)$ prin:

$$d\vec{a} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial x_i}dx_i, \quad \left(i = \overline{1,n}\right),$$

unde simbolul $\frac{\partial}{\partial x_i}$ este operatorul de derivare parţială în raport cu variabila x_i. Ţinând seama de proprietăţile operaţiilor cu vectori şi derivarea (diferenţierea) funcţiilor scalare, rezultă următoarele reguli:

$$\frac{d\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt};$$

$$\frac{d\left(\lambda\vec{a}\right)}{dt} = \lambda\frac{d\vec{a}}{dt}, \text{ pentru } \lambda = \text{const.};$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{d\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{dt}=\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}+\vec{b}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt};$$

$$\frac{d\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}{dt}=\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}+\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b};$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]=\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{a}\cdot\frac{d\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{a}\times\frac{d\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}{dt}.$$

C.4.3. Integrala unui vector (a unei funcții vectoriale)

Integrala unei funcții vectoriale se definește analog cu integrala unei funcții scalare. Fie $\vec{a}=\vec{a}(t)$ o funcție vectorială continuă de parametrul real t. În calculul vectorial, pe spațiul euclidian tridimensional E_3 se definesc următoarele trei tipuri de integrale:

(a) Integrala curbilinie: $\int_{P_1}^{P_2}\vec{a}\cdot d\vec{r}$, de-a lungul unei curbe C, între punctele P_1 și P_2, în care $\vec{a}$ este un vector ce are punctul de aplicație pe curbă, iar $d\vec{r}$ este un element de arc vectorizat al curbei C. Această integrală se numește *circulația vectorului* $\vec{a}$ de-a lungul curbei C de la P_1 la P_2. Dacă C este o curbă închisă, atunci circulația de-a·lungul curbei (C) se notează astfel: $\oint\vec{a}\cdot d\vec{r}$.

(b) Integrala dublă: $\iint_S\vec{a}\cdot d\vec{S}$, unde $\vec{a}$ este un vector cu punctul de aplicație pe suprafața S, iar $d\vec{S}$ este un element de suprafață vectorizat. Integrala se numește *fluxul vectorului* $\vec{a}$ prin suprafața S. Dacă S este o suprafață închisă, integrala se notează astfel: $\oiint_S\vec{a}\cdot d\vec{S}$.

(c) Integrala triplă: $\iiint_D\vec{a}\,d\tau$, unde D este un domeniu de volum V, $d\tau$ este un element de volum, iar vectorul $\vec{a}$ are punctul de aplicație într-un punct oarecare din D.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C.4.4. Câmpuri scalare și vectoriale

Dacă o mărime fizică are o valoare bine determinată în fiecare punct dintr-un domeniu D din spațiu, atunci mulțimea acestor valori definește *câmpul mărimii* respective. De exemplu, un corp încălzit determină un câmp al temperaturii. În fiecare punct al corpului, temperatura are o anumită valoare. Dacă considerăm curgerea unui lichid, aceasta ne definește un câmp al vitezelor: în fiecare punct al domeniului ocupat de lichid avem determinat un vector, anume, viteza particulei de lichid din punctul respectiv. Când se definește un câmp se stabilește o corespondență între fiecare punct P din domeniul D și valoarea mărimii fizice respective în acel punct. Această corespondență definește o funcție de punctul P. Deoarece fiecare punct este determinat prin intermediul coordonatelor x, y și z, sau echivalent, al vectorului de poziție $\vec{r}$ în raport cu originea unui sistem de coordonate $Oxyz$, câmpurile diverselor mărimi fizice sunt determinate prin cunoașterea funcțiilor corespunzătoare (scalare, vectoriale sau tensoriale) de cele trei variabile scalare, x, y și z.

Dacă în domeniul D din spațiul euclidian E_3 fiecărui punct $P \in D$ îi corespunde o valoare a unei mărimi scalare $\varphi(P)$, atunci spunem că în domeniul D s-a definit un *câmp scalar*, $\varphi(x, y, z)$. De exemplu, temperatura este o funcție scalară care depinde de punct. În fiecare punct P al unei regiuni, temperatura are o valoare $T(P)$. Corespondența dintre punctele P ale regiunii considerate și valorile pe care le ia temperatura în acele puncte definește o funcție scalară de punct, $T(P) = T(x, y, z)$. Un alt exemplu este presiunea p a aerului care este, de asemenea, o mărime scalară ce depinde de punct. În fiecare punct P al unei regiuni, presiunea ia o valoare $p(P)$. Corespondența dintre punctele P ale regiunii considerate și valorile pe care le ia presiunea în acele puncte definește o funcție scalară de punct $p(P) = p(x, y, z)$.

Dacă fiecărui punct $P \in D$ i se asociază o mărime vectorială $\vec{a}(P) = \vec{a}(x, y, z)$, spunem că în domeniul D s-a definit un *câmp vectorial.* De exemplu, un astfel de câmp se găsește în regiunea din jurul unui corp electrizat. În fiecare punct al acestei regiuni se poate defini vectorul $\vec{E}$ al

intensității câmpului electric (electrostatic). Vitezele moleculelor unui fluid în mișcare constituie, de asemenea, un exemplu de câmp vectorial.

Un câmp scalar φ (sau vectorial $\vec{A}$) se numește *nestaționar* dacă φ (respectiv $\vec{A}$) depinde explicit de timp. În caz contrar, câmpul se numește *staționar*. Funcțiile φ și $\vec{A}$ se presupun continue și cu derivate parțiale continue.

C.5. Operatori vectoriali de ordinul întâi[11]

C.5.1. Gradientul

Fie funcția scalară $\varphi(x, y, z)$ de clasă C^1 (derivabilă și cu derivate de ordinul întâi continue), definită pe un anumit domeniu $D \subset E_3$. Din cele arătate mai sus, rezultă că în domeniul D, $\varphi(x, y, z)$ definește un câmp scalar. Diferențiala funcției $\varphi(x, y, z)$ este, după cum știm, dată de relația:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx_i, \quad \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{C.33}$$

care, ținând cont de expresia analitică a produsului scalar a doi vectori (vezi relația (C.16)), poate fi scrisă sub forma:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\vec{u}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\vec{u}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\vec{u}_3\right)\cdot\left(dx_1\,\vec{u}_1 + dx_2\,\vec{u}_2 + dx_3\,\vec{u}_3\right),$$

adică poate fi considerată ca produsul scalar al vectorilor

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

---

[11] După cum vom vedea, de fapt operatorul este unul singur, anume operatorul nabla, cu ajutorul căruia se exprimă atât gradientul, cât și divergența sau rotorul diverselor câmpuri scalare și/sau (după caz) vectoriale. Totuși, prin abuz de limbaj, atât gradientul, cât și divergența și rotorul diverselor câmpuri sunt numiți tot operatori, cu toate că aceste mărimi sunt de fapt *rezultatul* aplicării operatorului nabla (în diverse moduri) asupra câmpurilor respective. În schimb, laplaceanul este un operator veritabil, obținut prin aplicarea succesivă, de două ori (cu ajutorul produsului scalar), a operatorului nabla asupra unui câmp scalar. De altfel, în mod absolut corect, se și spune „*operatorul* lui Laplace".

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

și un al doilea vector (pe care-l vom nota cu $\vec{A}$) ale cărui componente sunt chiar derivatele parțiale ale funcției scalare $\varphi(x, y, z)$:

$$\vec{A} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} = \vec{u}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \left(i = \overline{1,3}\right). \tag{C.34}$$

Câmpul vectorial $\vec{A}$ ale cărui componente față de un reper triortogonal cartezian sunt $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$ se numește *gradientul câmpului scalar* φ și se notează de obicei cu $grad\varphi$. Utilizând această notație, relația (C.33) devine:

$$d\varphi = grad\varphi \cdot d\vec{r}\,. \tag{C.35}$$

Vectorul $grad\varphi$ determină variația funcției φ în jurul unui punct, iar componenta pe direcția x_i a acestuia, adică derivata parțială a lui φ în raport cu x_i reprezintă viteza de variație a lui φ pe direcția respectivă. Direcția vectorului $grad\varphi$ într-un punct oarecare este direcția pe care mărimea scalară φ variază cel mai rapid, pornind din acel punct, iar sensul vectorului $grad\varphi$ se consideră acela în care mărimea scalară φ crește. Din relația (C.33) se observă că vectorul $grad\varphi$ poate fi obținut prin aplicarea operatorului

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} = \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \left(i = \overline{1,3}\right) \tag{C.36}$$

funcției scalare $\varphi(x_i)$. Acest operator, notat cu simbolul ∇, se numește *operatorul nabla* sau *operatorul lui Hamilton*. Cu ajutorul lui putem scrie gradientul unui câmp scalar φ astfel:

$$grad\varphi = \vec{u}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \nabla\varphi, \quad \left(i = \overline{1,3}\right). \tag{C.37}$$

Câmpul vectorial $\vec{A}$ definit de relația (C.34) se numește *câmp potențial*, iar $\varphi(x_i)$ se numește *potențialul câmpului*. De exemplu, pornind de la câmpul electrostatic $\vec{E}(\vec{r})$, putem determina potențialul electric $V(\vec{r})$, dar se poate proceda și invers: cunoscând potențialul putem determina

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

câmpul, utilizând relația: $\vec{E} = -grad\ V$. În acest caz, semnul minus arată că $\vec{E}(\vec{r})$ este îndreptat spre regiunea cu potențial negativ[12].

Din definiția (C.36) a operatorului ∇ rezultă că acesta este un operator vectorial, liniar și diferențial (de ordinul întâi). Proiectând $grad\ \varphi(x_i)$ pe direcția x_i, obținem următoarea relație:

$$(grad\ \varphi)_i = (\nabla\varphi)\cdot\vec{u}_i = \left(\vec{u}_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)\cdot\vec{u}_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\vec{u}_k\cdot\vec{u}_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\delta_{ik} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

sau, utilizând două notații des utilizate în analiza vectorială:

$$grad_i\varphi = \nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \overset{not.}{=} \partial_i\varphi \overset{not.}{=} \varphi_{,i}. \qquad \text{(C.38)}$$

Suprafețe echipotențiale

Presupunând că funcția $\varphi(P)$ este uniformă și continuă în D împreună cu derivatele sale parțiale până la ordinul doi, să considerăm toate punctele în care această funcție ia aceeași valoare. Aceste puncte constituie o suprafață în D. Într-adevăr, dacă x, y, z sunt coordonatele punctului P, relația $\varphi(P) = K = const.$ se mai scrie sub forma:

$$\varphi(x, y, z) = K \qquad \text{(C.39)}$$

și reprezintă ecuația (sub formă implicită a) unei suprafețe în $D \subset E_3$. Ținând seama de relațiile (C.39) și (C.35) rezultă că

$$d\varphi = 0 = grad\varphi\cdot d\vec{r}\,. \qquad \text{(C.40)}$$

Această relație este valabilă în orice punct P al suprafeței (C.39). Cum egalitatea cu zero trebuie să aibă loc fără ca vreunul din cei doi vectori să fie în mod obligatoriu nul, și cum $d\vec{r}$ se află în planul tangent la suprafața (C.39), rezultă că în orice punct al acestei suprafețe vectorul $grad\varphi$ are direcția normalei la suprafață. Dând valori constantei K din (C.39) obținem o familie de suprafețe care satisfac condiția (C.40). Aceste suprafețe se numesc *suprafețe echipotențiale* sau *suprafețe de nivel.*

---

[12] Semnul minus, folosit de obicei pentru a scrie intensitatea câmpului electrostatic $\vec{E}$ în funcție de gradientul potențialului electrostatic $V(\vec{r})$, este introdus în mod convențional. Această convenție este legată de sensul liniilor câmpului electrostatic; astfel, se consideră că liniile lui $\vec{E}$ „ies" din sursele (sarcinile electrice) pozitive ale câmpului și „intră" în sursele negative.

BCU ASTE UNIVERSITY LIBRARY

Linii de câmp

Fie un câmp vectorial staţionar $\vec{A} = \vec{A}(x_i)$ şi o curbă oarecare, dată parametric prin relaţiile: $x_i = x_i(s)$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$. Dacă în fiecare punct al curbei, câmpul $\vec{A}$ este tangent la aceasta, atunci curba se numeşte *linie de câmp* sau *linie de forţă* a câmpului vectorial $\vec{A}$. Ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de câmp se deduc din relaţia evidentă: $\vec{A} \times d\vec{s} = 0$, care arată că produsul vectorial al vectorilor coliniari $\vec{A}$ şi $d\vec{s}$ este nul. Proiectând această relaţie vectorială pe axele Ox, Oy şi Oz ale unui sistem cartezian de coordonate obţinem ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de câmp:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}. \qquad \text{(C.41)}$$

Conform relaţiei (C.40), pentru suprafeţele echipotenţiale vectorul $\vec{A} = grad\varphi$ este ortogonal pe elementul de arc $d\vec{r}$, care la rândul lui este tangent la suprafeţele echipotenţiale. Întrucât liniile de câmp ale lui $\vec{A} = grad\varphi$ sunt coliniare cu $d\vec{r}$ rezultă că acestea sunt în acelaşi timp ortogonale la suprafeţele echipotenţiale $\varphi = const.$

Derivata direcţională (derivata după o direcţie)

Fie o axă (Δ) a cărei direcţie şi sens sunt date de versorul $\vec{u}_\Delta = \frac{d\vec{r}}{ds}$, unde prin $ds = |d\vec{r}|$ am notat modulul elementului de linie $d\vec{r}$ al axei (Δ). Prin *derivata direcţională* a unei funcţii scalare $\varphi = \varphi(\vec{r})$ după axa dată (Δ) (sau derivata după direcţia axei considerate (Δ)) se înţelege proiecţia gradientului acestei funcţii pe direcţia dată (considerată):

$$grad\varphi \cdot \vec{u}_\Delta = \frac{d\varphi}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

În relaţia anterioară am utilizat scrierea formală a gradientului lui φ: $grad\varphi \overset{formal}{=} \frac{d\varphi}{d\vec{r}}$ şi am simplificat (tot formal) pe $d\vec{r}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C.5.2. Divergența unui câmp vectorial

Având în vedere caracterul vectorial al operatorului ∇, să-l aplicăm scalar câmpului vectorial $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$; cu alte cuvinte, ∇ fiind un vector poate fi înmulțit scalar și/sau vectorial cu alți vectori. Rezultatul operației de produs scalar dintre ∇ și $\vec{A}$ (în această ordine) este un câmp scalar, care se numește *divergența* lui $\vec{A}$ și se notează *div* $\vec{A}$. Chiar dacă, așa cum știm, produsul scalar a doi vectori este comutativ, deoarece ∇ este în primul rând un operator are importanță ordinea în care sunt considerați cei doi vectori în produsul scalar. Cu alte cuvinte, $\vec{A}\cdot\nabla \neq \nabla\cdot\vec{A}$. Într-adevăr, mărimea

$$\vec{A}\cdot\nabla = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}$$

este la rândul ei un operator, pe când

$$\nabla\cdot\vec{A} = \left(\vec{u}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot\left(A_k\vec{u}_k\right) = \left(\vec{u}_i\cdot\vec{u}_k\right)\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \delta_{ik}\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{C.42}$$

este o mărime scalară bine definită, numită *divergența câmpului vectorial* $\vec{A}(\vec{r})$: $\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \overset{not.}{=} div\,\vec{A}$. Cu notațiile din (C.38) mai putem scrie:

$$div\,\vec{A} = \nabla_i A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \partial_i A_i = A_{i,i}\ , \quad \left(i = \overline{1,3}\right). \tag{C.43}$$

Un câmp vectorial $\vec{A}$ pentru care $div\,\vec{A} = 0$ se numește *câmp fără surse* sau *câmp solenoidal*; liniile unui astfel de câmp sunt curbe închise. Dacă, în schimb, $div\,\vec{A} \neq 0$, atunci câmpul vectorial $\vec{A}$ se numește *câmp cu surse*. Evident, în acest caz există două posibilități:

$$div\,\vec{A} \neq 0 \begin{cases} \nearrow\ div\,\vec{A} > 0, \\ \searrow\ div\,\vec{A} < 0. \end{cases}$$

În primul caz $\left(div\,\vec{A} > 0\right)$ sursele câmpului sunt pozitive. O sursă pozitivă se mai numește și „izvor". În cazul al doilea $\left(div\,\vec{A} < 0\right)$ sursele sunt

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

negative; o sursă negativă se mai numeşte şi „puţ". Pentru un câmp cu surse există totdeauna măcar o linie de câmp care „nu se închide"[13] în surse („merge" spre infinit). Prin convenţie, de obicei se consideră că liniile unui astfel de câmp ies din sarcinile pozitive şi intră în sarcinile negative. Evident, pentru un câmp solenoidal, liniile de câmp neavând de unde ieşi şi unde intra (neexistând surse) acestea trebuie să se închidă în ele însele. Un exemplu de astfel de câmp (fără surse, sau solenoidal) este câmpul magnetostatic de inducţie $\vec{B}$. Este ştiut faptul că, cel puţin până la ora actuală, nu s-a reuşit detectarea experimentală a monopolului magnetic[14], care, din punct de vedere fenomenologic, ar putea juca rol de sursă a câmpului magnetic. Într-adevăr, orice experiment arată faptul că în oricât de multe şi de mici bucăţi am diviza un magnet, rezultă totdeauna alţi mici magneţi şi niciodată póli nord şi sud separaţi[15]. Analogia matematică aproape perfectă dintre câmpurile electrostatic şi magnetostatic a necesitat introducerea unor echivalenţi pentru sarcinile electrice pozitive (sursele pozitive ale câmpului electrostatic) şi sarcinile electrice negative (sursele negative ale câmpului electrostatic) ale câmpului electrostatic şi pentru câmpul magnetostatic. Aceştia sunt cei doi poli: polul nord magnetic (corespondentul sarcinii electrice pozitive) şi polul sud magnetic (analogul sarcinii electrice negative). Aceste aspecte sunt schiţate grafic (în cazul simplu al unui ansamblu format din doar două sarcini – electrice şi respectiv magnetice) în Fig. C13.

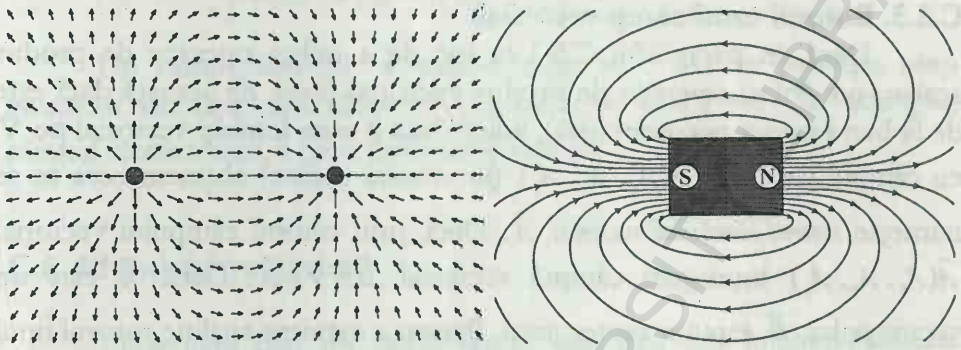
De altfel, singura diferenţă notabilă din punct de vedere matematic dintre cele două câmpuri este cea care exprimă divergenţa celor două câmpuri (de fapt, legea lui Gauss pentru cele două câmpuri): $div\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho \neq 0$ (unde $\rho = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta\tau} = \frac{dq}{d\tau} = \rho(\vec{r})$ este densitatea sarcinii electrice) şi $div\,\vec{B} = 0$ (densitatea sarcinilor magnetice – monopolilor –

[13] În sensul că, dacă acea linie de câmp a ieşit dintr-o sursă pozitivă, atunci ea nu mai intră într-o sursă negativă, ci se îndreaptă spre infinit, şi invers: există cel puţin o linie de câmp care intră într-o sursă negativă şi care nu vine dintr-o sursă pozitivă, ci de la infinit (vezi Fig. 13 a).

[14] Cu toate că, diverse modele teoretice din teoria cuantică a câmpurilor i-au prezis existenţa reală.

[15] Deci nu rezultă mono-poli, ci „bi-poli", orice mic magnet care rezultă în urma divizării având doi poli (un pol nord şi unul sud) şi nu unul singur.

este nulă). În regiunea din spaţiu unde nu există sarcini electrice ($\rho = 0$) cele două ecuaţii se scriu la fel: $div\,\vec{E} = 0$ şi $div\,\vec{B} = 0$.



(a) (b)

Fig. 13

Cu alte cuvinte, într-o astfel de regiune a spaţiului, din punct de vedere matematic cele două câmpuri se comportă absolut identic, şi în acest caz nu se vorbeşte de câmp electric sau câmp magnetic, ci despre *câmp electromagnetic*. „Echivalenţa" matematică a celor două câmpuri a permis realizarea primei unificări (din şirul încă neterminat[16]) a două teorii ale fizicii. Acest lucru a fost făcut de către J.C. Maxwell, care a reuşit pentru prima dată să unifice teoria câmpului magnetic cu cea a câmpului

[16] Mai apoi s-a reuşit unificarea teoriei electromagnetismului cu cea a interacţiilor nucleare slabe, rezultând teoria electroslabă; aceasta a fost unificată ulterior (în cadrul Modelului Standard) cu teoria interacţiilor nucleare tari (cromodinamica cuantică), rezultând o nouă teorie, care descrie global şi unitar interacţiunile electromagnetice şi cele nucleare (tari şi slabe), singura interacţiune care încă nu a reuşit nici la ora actuală să fie înglobată într-o singură (unică) teorie care ar fi capabilă să descrie unitar toate cele patru interacţiuni cunoscute până în prezent fiind gravitaţia. Principalul obstacol îl reprezintă neliniaritatea ecuaţiilor câmpului gravitaţional (Einstein) care împiedică cuantificarea într-o schemă cunoscută a acestui câmp. Precizăm că toate aceste teorii de unificare nu au putut fi elaborate decât în cadrul unor formalisme relativiste şi totodată cuantice. De altfel, marele vis al oricărui fizician teoretician este de a realiza această Teorie a Marii Unificări (a tuturor celor patru interacţiuni fundamentale: electromagnetică, nucleară slabă, nucleară tare şi gravitaţională) cunoscută sub acronimul GUT (Grand Unified Theory).

electric într-una nouă, coerentă şi unitară, cea a câmpului electromagnetic. Această nouă teorie are la bază celebrele ecuaţii ale lui Maxwell[17].

C.5.3. Rotorul unui câmp vectorial

Dacă, în paragraful C.5.2 în loc de a utiliza operaţia de produs scalar vom folosi operaţia de produs vectorial (care, de această dată este de la bun început necomutativă), adică dacă îl vom înmulţi vectorial pe ∇ cu câmpul vectorial $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ (în această ordine) obţinem ceea ce se numeşte *rotorul câmpului vectorial* $\vec{A}$. Deci, prin rotorul câmpului vectorial $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ înţelegem câmpul vectorial $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Dacă $\vec{A}$ este un vector polar, $\vec{B}$ este un vector axial. Pentru a exprima analitic rotorul unui câmp vectorial, vom utiliza relaţia (C. 27):

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \vec{u}_i =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial & \partial & \partial \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad \text{(C.44)}$$

Înmulţind scalar cu versorul direcţiei x_s relaţia (C.44) (adică cu $\vec{u}_s$), obţinem proiecţia rotorului lui $\vec{A}$ după această direcţie, sau altfel spus, componenta rotorului lui $\vec{A}$ după direcţia dată de $\vec{u}_s$:

$$\left(rot\, \vec{A} \right)_s = \left(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \vec{u}_i \right) \cdot \vec{u}_s = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \left(\vec{u}_i \cdot \vec{u}_s \right) = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \ \delta_{si} = \varepsilon_{sjk} \partial_j A_k . \quad \text{(C.45)}$$

De exemplu, considerând în (C.45) $s = 1$ pentru proiecţia sau componenta după axa x a rotorului lui $\vec{A}$ obţinem:

[17] Cele patru ecuaţii ale lui Maxwell reprezintă de fapt teorema Gauss pentru cele două câmpuri (electric şi magnetic), la care se adaugă legea inducţiei electromagnetice şi cea a inducţiei magnetoelectrice.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

$$\left(rot\,\vec{A}\right)_1 \equiv \left(rot\,\vec{A}\right)_x = \varepsilon_{1jk}\partial_j A_k = \varepsilon_{123}\partial_2 A_3 + \varepsilon_{132}\partial_3 A_2 =$$

$$= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \partial_y A_z - \partial_z A_y \equiv \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Un câmp vectorial $\vec{A}$ pentru care, $rot\,\vec{A} = 0$ se numeşte *câmp irotaţional* sau *câmp fără vârtejuri.* Un astfel de câmp este, de exemplu, câmpul electrostatic, a cărui intensitate este $\vec{E}$.

C.6. Identităţi vectoriale

Prezentăm mai jos unele dintre cele mai des întâlnite/utilizate identităţi din analiza vectorială, împreună cu „demonstrarea" lor.

1. $grad(\varphi\psi) = \varphi\, grad\psi + \psi\, grad\varphi$. (C.46)

Într-adevăr,

$$grad(\varphi\psi) = \vec{u}_i \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_i} = \vec{u}_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\varphi + \vec{u}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\psi = \varphi\, grad\psi + \psi\, grad\varphi.$$

2. $div\left(\varphi\vec{A}\right) = \varphi\, div\,\vec{A} + \vec{A}\cdot grad\varphi$. (C.47)

Într-adevăr,

$$div\left(\varphi\vec{A}\right) = \frac{\partial\left(\varphi A_i\right)}{\partial x_i} = \varphi\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + A_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \varphi\, div\,\vec{A} + \vec{A}\cdot grad\varphi.$$

3. $rot\left(\varphi\vec{A}\right) = \nabla\times\left(\varphi\vec{A}\right) = \varphi\,\nabla\times\vec{A} + \left(\nabla\varphi\right)\times\vec{A} = \varphi\, rot\,\vec{A} + grad\varphi\times\vec{A}$. (C.48)

Într-adevăr,

$$rot\left(\varphi\vec{A}\right) = \varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\varphi A_k\right)\vec{u}_i = \varphi\left(\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k\ \vec{u}_i\right) + \varepsilon_{ijk}\left(\partial_j\varphi\right)A_k\vec{u}_i =$$

$$= \varphi\ rot\,\vec{A} + grad\varphi\times\vec{A}.$$

4. $div\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot rot\,\vec{A} - \vec{A}\cdot rot\,\vec{B}$. (C.49)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Într-adevăr,

$$div\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\partial_i\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_i=\partial_i\left(\varepsilon_{ijk}A_jB_k\right)=\varepsilon_{ijk}\partial_i\left(A_jB_k\right)=$$
$$=\varepsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k+\varepsilon_{ijk}B_k\partial_iA_j=-A_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k+B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j=$$
$$=-A_j\left(rot\ \vec{B}\right)_j+B_k\left(rot\ \vec{A}\right)_k=-\vec{A}\cdot rot\ \vec{B}+\vec{B}\cdot rot\ \vec{A}.$$

5. $$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\vec{A}\times rot\ \vec{B}+\vec{B}\times rot\ \vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}. \qquad (C.50)$$

Într-adevăr,

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=grad\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\partial_i\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{u}_i=\partial_i\left(A_jB_j\right)\vec{u}_i=A_j\partial_iB_j\vec{u}_i+B_j\partial_iA_j\vec{u}_i=$$
$$=A_j\partial_iB_j\vec{u}_i+\underbrace{\left(-A_j\partial_jB_i\vec{u}_i+A_j\partial_jB_i\vec{u}_i\right)}_{=0}+B_j\partial_iA_j\vec{u}_i+\underbrace{\left(-B_j\partial_jA_i\vec{u}_i+B_j\partial_jA_i\vec{u}_i\right)}_{=0}=$$
$$=\left(A_j\partial_iB_j\vec{u}_i-A_j\partial_jB_i\vec{u}_i\right)+A_j\partial_jB_i\vec{u}_i+\left(B_j\partial_iA_j\vec{u}_i-B_j\partial_jA_i\vec{u}_i\right)+B_j\partial_jA_i\vec{u}_i=$$
$$=\left(A_j\partial_iB_j-A_j\partial_jB_i\right)\vec{u}_i+\left(A_j\partial_j\right)\left(B_i\vec{u}_i\right)+\left(B_j\partial_iA_j-B_j\partial_jA_i\right)\vec{u}_i+\left(B_j\partial_j\right)\left(A_i\vec{u}_i\right)=$$
$$=A_j\underbrace{\left(\partial_iB_j-\partial_jB_i\right)}_{\overset{not.}{=}T^B_{ij}=-T^B_{ji}}\vec{u}_i+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+B_j\underbrace{\left(\partial_iA_j-\partial_jA_i\right)}_{\overset{not.}{=}T^A_{ij}=-T^A_{ji}}\vec{u}_i+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}=$$
$$=A_j\underbrace{T^B_{ij}}_{\overset{(C.93)}{=}\varepsilon_{ijk}P^B_k}\vec{u}_i+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+B_j\underbrace{T^A_{ij}}_{\overset{(C.93)}{=}\varepsilon_{ijk}P^A_k}\vec{u}_i+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}=A_j\varepsilon_{ijk}\underbrace{P^B_k}_{\overset{(C.91)}{=}\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}T^B_{lm}=\left(rot\vec{B}\right)_k}\vec{u}_i+$$
$$+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+B_j\varepsilon_{ijk}\underbrace{P^A_k}_{\overset{(C.91)}{=}\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}T^A_{lm}=\left(rot\vec{A}\right)_k}\vec{u}_i+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}=A_j\varepsilon_{ijk}\left(rot\ \vec{B}\right)_k\vec{u}_i+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+$$
$$+B_j\varepsilon_{ijk}\left(rot\ \vec{A}\right)_k\vec{u}_i+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}=\varepsilon_{ijk}A_j\left(rot\ \vec{B}\right)_k\vec{u}_i+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+$$
$$+\varepsilon_{ijk}B_j\left(rot\ \vec{A}\right)_k\vec{u}_i+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}=\vec{A}\times rot\ \vec{B}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{B}\times rot\ \vec{A}+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}.$$

6. $$rot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{A}\ div\vec{B}-\vec{B}\ div\vec{A}+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}. \qquad (C.51)$$

Într-adevăr,

$$rot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{u}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_k=\vec{u}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j\left(A_lB_m\right)=\vec{u}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_l\partial_jB_m+$$
$$+\vec{u}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}B_m\partial_jA_l=\vec{u}_i\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}A_l\partial_jB_m+\vec{u}_i\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}B_m\partial_jA_l=$$
$$=\vec{u}_i\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)A_l\partial_jB_m+\vec{u}_i\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)B_m\partial_jA_l=$$
$$=\vec{u}_i\delta_{il}\delta_{jm}A_l\partial_jB_m-\vec{u}_i\delta_{im}\delta_{jl}A_l\partial_jB_m+\vec{u}_i\delta_{il}\delta_{jm}B_m\partial_jA_l-\vec{u}_i\delta_{im}\delta_{jl}B_m\partial_jA_l=$$

BCU ASE CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= \vec{u}_i A_i \partial_j B_j - \vec{u}_i A_j \partial_j B_i + \vec{u}_i B_j \partial_j A_i - \vec{u}_i B_i \partial_j A_j = \left(A_i \vec{u}_i\right)\left(\partial_j B_j\right) -$$

$$-\left(A_j \partial_j\right)\left(B_i \vec{u}_i\right) + \left(B_j \partial_j\right)\left(A_i \vec{u}_i\right) - \left(B_i \vec{u}_i\right)\left(\partial_j A_j\right) =$$

$$= \vec{A}\, div\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A} - \vec{B}\, div\vec{A}.$$

7. $div\left(rot\,\vec{A}\right) = \nabla\cdot\left(rot\,\vec{A}\right) = \nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right) = 0.$ (C.52)

Într-adevăr, deoarece operatorul ∇ este un vector (mai exact, un operator vectorial) şi întrucât produsul mixt a trei vectori în care doi dintre ei sunt coliniari este zero, identitatea apare ca evidentă. Altfel:

$$div\left(rot\,\vec{A}\right) = \partial_i\left(rot\,\vec{A}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\partial_i\left(\partial_j A_k\right) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k +\right.$$

$$\left. + \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k + \varepsilon_{jik}\partial_j\partial_i A_k\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k - \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_i A_k\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k - \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k\right) = 0,$$

unde am presupus faptul că $\vec{A}(x, y, z)$ satisface condiţiile din teorema Schwarz, care „asigură" egalitatea derivatelor mixte de ordinul doi ale componentelor A_k, $(k = 1, 2, 3)$ ale câmpului (funcţiei) vectoriale $\vec{A}$: $\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j \partial x_i} \Leftrightarrow \partial_i\partial_j A_k = \partial_j\partial_i A_k$. Am arătat deci că:

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

unde ε_{ijk} este un pseudotensor *antisimetric* în perechea de indici $(i\,j)$, iar derivata $\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j}$ este – din punct de vedere algebric – un tensor de ordinul doi *simetric* – în condiţiile teoremei Schwarz – în aceeaşi pereche de indici: $\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_j} \overset{cf.\,th.\,Schwarz}{=} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j \partial x_i}$. Acest rezultat este valabil pentru orice doi tensori, unul simetric şi celălalt antisimetric (în aceiaşi indici), demonstraţia făcându-se ca mai sus. Aşadar, produsul a doi tensori/pseudotensori

FIZICĂ
BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

dintre care unul este simetric, iar celălalt antisimetric în aceeaşi pereche de indici, este totdeauna nul.

8. $rot\left(grad\ \varphi\right)=\nabla\times\left(\nabla\varphi\right)=0$. (C.53)

Această identitate poate fi justificată simplu, prin aceea că produsul vectorial a doi vectori coliniari este totdeauna nul. Altfel:

$$rot\left(grad\,\varphi\right)=\vec{u}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(grad\,\varphi\right)_k=\vec{u}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi\equiv\vec{u}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}=0,$$

ε_{ijk} fiind antisimetric în perechea de indici $(j\ k)$, aceeaşi în care „tensorul" $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}$ este simetric.

9. $div\left(grad\ \varphi\right)=\nabla\cdot(\nabla\varphi)=\left(\nabla\cdot\nabla\right)\varphi=\nabla^2\varphi\overset{not.}{=}\Delta\varphi$, (C.54)

unde operatorul

$$\nabla^2\equiv\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}\equiv\partial_i\partial_i$$

se numeşte *operatorul lui Laplace* sau *laplacean* (în coordonate carteziene). Ecuaţia

$$\Delta\varphi=0$$

se numeşte *ecuaţia lui Laplace*. Soluţiile ecuaţiei Laplace se numesc *funcţii armonice*. Generalizarea operatorului lui Laplace pe un spaţiu cu patru dimensiuni, în care a patra dimensiune este temporală, iar reprezentarea spaţiului este una euclidian complexă, se notează de obicei cu simbolul $\Box$ şi se mai numeşte *operatorul lui D'Alembert* sau *dalambertian*. Relaţia dintre cei doi operatori Laplace este: $\Delta_{(4)}\bullet=\Delta_{(3)}\bullet-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\bullet}{\partial t^2}$, sau altfel scris: $\Box\bullet=\Delta\bullet-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\bullet}{\partial t^2}$, unde "$\bullet$" ţine locul mărimii asupra căreia urmează să acţioneze operatorii consideraţi. Într-adevăr, dacă $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ şi

$x_4 = ivt$ (unde $i = \sqrt{-1}$, iar v este o viteză constantă – în cazul spațiului Minkowski aceasta este chiar viteza luminii în vid, c) sunt cele patru coordonate ale spațiului considerat, avem:

$$\Delta_{(4)}\left(\equiv \Box\right) = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \Delta_{(3)} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

10. $rot\left(rot\,\vec{A}\right) = grad\left(div\,\vec{A}\right) - \Delta\,\vec{A}$. (C.55)

Într-adevăr,

$$rot\left(rot\,\vec{A}\right) = \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \left(rot\,\vec{A}\right)_k = \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m = \vec{u}_i \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m =$$

$$= \vec{u}_i \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) \partial_j \partial_l A_m = \vec{u}_i \delta_{il} \delta_{jm} \partial_j \partial_l A_m - \vec{u}_i \delta_{im} \delta_{jl} \partial_j \partial_l A_m =$$

$$= \vec{u}_i \partial_m \partial_i A_m - \vec{u}_i \partial_j \partial_j A_i = \vec{u}_i \partial_i \partial_m A_m - \partial_j \partial_j A_i \vec{u}_i = \vec{u}_i \partial_i \left(div\vec{A}\right) - \partial_j \partial_j \vec{A} =$$

$$= grad\left(div\,\vec{A}\right) - \Delta\,\vec{A}.$$

În concluzie, gradientul rezultă prin aplicarea operatorului nabla în mod direct asupra unui câmp scalar, rezultatul fiind un câmp vectorial. Divergența rezultă prin aplicarea operatorului nabla (cu ajutorul produsului scalar) asupra unui câmp vectorial, rezultatul fiind un câmp scalar, rotorul rezultă prin aplicarea aceluiași operator nabla (dar cu ajutorul produsului vectorial) asupra unui câmp vectorial, rezultatul fiind tot un câmp vectorial, iar laplaceanul se aplică asupra câmpurilor scalare, rezultatul fiind tot un câmp scalar[18]. Sub formă de tabel, aceste concluzii pot fi sintetizate astfel:

[18] Uneori se întâlnesc și relații în care laplaceanul este aplicat unor mărimi vectoriale (de exemplu, în cazul ecuației satisfăcută de potențialul vector într-un mediu omogen și izotrop: $\Delta\vec{A} = -\mu\vec{j}$). În astfel de cazuri, de fapt, trebuie să înțelegem (căci altfel nu putem calcula) un set de trei ecuații scalare: $\Delta A_i = -\mu j_i$, $(i = 1,2,3)$, proiecții ale ecuației vectoriale inițiale pe cele trei axe de coordonate.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

	∇	φ (câmp scalar)	$\vec{A}$ (câmp vectorial)
∇	-	$\nabla\varphi$ Gradient (vector)	-
$\nabla\cdot$	$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2\equiv\Delta$ Laplaceanul (scalar)	-	$\nabla\cdot\vec{A}$ Divergență (scalar)
$\nabla\times$	-	-	$\nabla\times\vec{A}$ Rotor (vector)

C.7. Coordonate curbilinii ortogonale. Operatori diferențiali de ordinul I în coordonate curbilinii ortogonale

Fie $\vec{r}$ vectorul de poziție al unui punct $P(\vec{r})$ din spațiul euclidian tridimensional E_3 și x_1, x_2, x_3 coordonatele carteziene ale acestuia față de un reper triortogonal $Ox_1x_2x_3$. Fie, de asemenea, trei parametri reali independenți, q_1, q_2 și q_3 astfel încât coordonatele x_i, $\left(i=\overline{1,3}\right)$ să fie funcții de clasă C^1 de aceşti parametri:

$$x_i=x_i\left(q_1,\,q_2,\,q_3\right),\quad \left(i=\overline{1,3}\right). \tag{C.56}$$

Presupunem că între cele două mulțimi (cea a coordonatelor, x_i, $\left(i=\overline{1,3}\right)$, și cea a parametrilor, q_j, $\left(j=\overline{1,3}\right)$) există o corespondență unu-la-unu; unui set dat de parametri (q) îi corespunde un singur set de coordonate (x) și invers. În aceste condiții transformarea (C.56) este local reversibilă dacă determinantul funcțional (iacobianul) acesteia este diferit de zero:

$$J=\frac{\partial\left(x_1,\,x_2,\,x_3\right)}{\partial\left(q_1,\,q_2,\,q_3\right)}\neq 0\,. \tag{C.57}$$

Dacă se dau valori fixe la doi dintre parametrii q_j, $\left(j=\overline{1,3}\right)$, să zicem, de exemplu, parametrilor q_2 și q_3, atunci se obține curba de coordonate $q_1=$variabil. În mod asemănător pot fi obținute și celelalte două curbe de

coordonate: $q_2 =$variabil şi $q_3 =$variabil. Acest fapt arată că prin orice punct din spaţiu trec trei curbe de coordonate (vezi Fig. C14). Parametrii q_1, q_2 şi q_3 se numesc *coordonatele generale* sau *coordonatele curbilinii* ale punctului P.

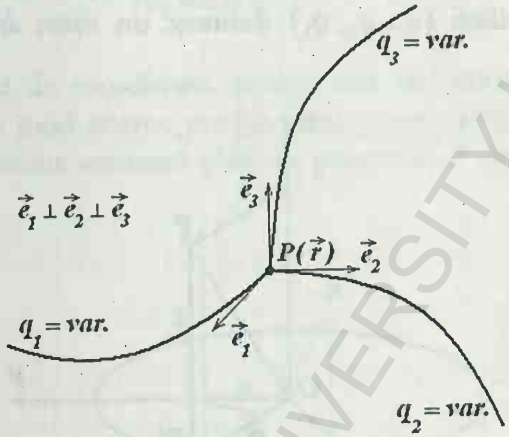


Fig. C14

Dacă $\vec{e}_i$, $\left(i=\overline{1,3}\right)$ sunt vectori tangenţi la curbele de coordonate $q_i =$variabil, $\left(i=\overline{1,3}\right)$, atunci condiţia (C.57) exprimă faptul că aceşti vectori sunt liniar independenţi, deci pot constitui o bază în E_3. Într-adevăr,

$$\vec{e}_1 \cdot \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3\right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_3} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial \left(x_1, x_2, x_3\right)}{\partial \left(q_1, q_2, q_3\right)} = J \neq 0.$$

Dacă în orice punct din domeniul $D^{(q)}$ definit de setul tuturor valorilor posibile ale parametrilor (q) vectorii $\vec{e}_i$, $\left(i=\overline{1,3}\right)$ formează un triedru

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

ortogonal drept, atunci spunem că cele trei coordonate curbilinii (q_1, q_2, q_3) definesc un *sistem de coordonate curbilinii ortogonale*, iar dacă triedrul format de cei trei vectori nu este ortogonal (adică este oarecare, cei trei vectori rămânând liniar independenți), spunem că cele trei coordonate curbilinii (q_1, q_2, q_3) definesc un *sistem de coordonate curbilinii generale.*

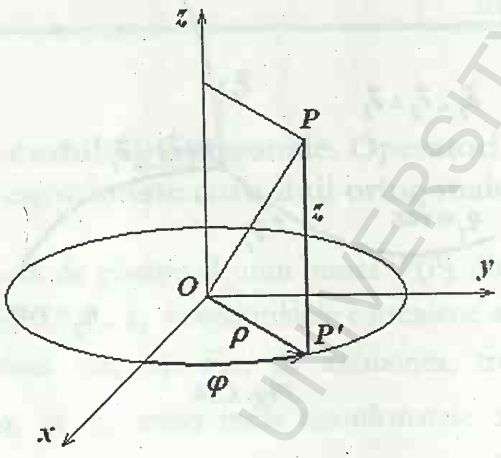


Fig. C15

Două dintre cele mai cunoscute și mai utilizate astfel de sisteme de coordonate sunt *sistemul de coordonate sferice* și *sistemul de coordonate cilindrice.* În sistemul de coordonate cilindrice, cele trei coordonate curbilinii care precizează în mod univoc poziția unui punct oarecare, P, în spațiu sunt r, φ și z, numite *coordonate cilindrice* ale punctului P (vezi Fig. C15). Domeniul de variație al acestor parametri este:

$$D^{(cilind)} = \left\{ (r,\ \varphi,\ z) \;\middle|\; r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty \right\}.$$

Relațiile (C.56) sunt în acest caz:

$$\begin{cases} x_1 \equiv x = r\cos\varphi, \\ x_2 \equiv y = r\sin\varphi, \\ x_3 \equiv z = z, \end{cases} \tag{C.58}$$

iar relațiile inverse, $q_j = q_j(x_1, x_2, x_3)$, $\left(j = \overline{1,3}\right)$, sunt:

$$\begin{cases} q_1 \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ q_2 \equiv \varphi = arctg\dfrac{y}{x}, \\ q_3 \equiv z = z. \end{cases}$$

În sistemul de coordonate sferice, cele trei coordonate curbilinii care precizează în mod univoc poziția unui punct oarecare, P, în spațiu sunt r, θ şi φ, numite *coordonate sferice* ale punctului P (vezi Fig. C16).

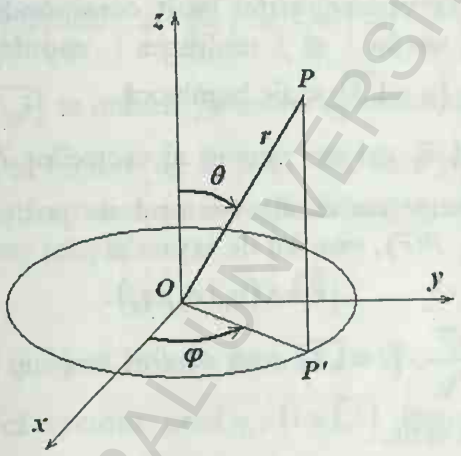


Fig. C16

Domeniul de variație al acestor parametri este:

$$D^{(sfer)} = \left\{ (r,\ \theta,\ \varphi) \;\middle|\; r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Relațiile (C.56) sunt în acest caz:

$$\begin{cases} x_1 \equiv x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ x_2 \equiv y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ x_3 \equiv z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{C.59}$$

iar relațiile inverse, $q_j = q_j(x_1, x_2, x_3)$, $\left(j = \overline{1,3}\right)$, sunt:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} q_1 \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ q_2 \equiv \theta = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ q_3 \equiv \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Pentru ca parametrii (q_1, q_2, q_3) să definească un nou sistem de coordonate, este nevoie să fie determinate intervalele în care aceşti trei parametri trebuie să varieze, astfel încât corespondența între mulțimea punctelor din spațiu şi mulțimea coordonatelor curbilinii, $q_j = q_j(x_1, x_2, x_3)$, $\left(j = \overline{1,3}\right)$ să fie biunivocă.

Fie $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ şi $\vec{v}_3$ cei trei versori ai vectorilor $\vec{e}_i$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$. În noul sistem de coordonate (curbilinii), vectorul de poziție $\vec{r}$ al unui punct oarecare din spațiu, $P(\vec{r})$, este dat de expresia:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \tag{C.60}$$

Atunci, deoarece $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$ sunt vectori tangenți la curbele $q_i = \text{var.}$, $(i = 1, 2, 3)$, putem scrie:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \vec{e}_i = H_i \vec{v}_i, \quad \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{C.61}$$

unde

$$H_i \overset{not.}{=} \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}, \quad \left(i = \overline{1,3}\right) \tag{C.62}$$

se numesc *coeficienții Lamé* şi reprezintă mărimile (lungimile, modúlii) vectorilor $\vec{e}_i$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$, tangenți la curbele de coordonate $q_i = \text{variabil}$, $(i = 1, 2, 3)$.

Să considerăm acum şi versorii normali la suprafețele de coordonate $q_1 = q_1^0 = const.$, $q_2 = q_2^0 = const.$ şi $q_3 = q_3^0 = const.$ Fie aceştia $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ şi respectiv $\vec{n}_3$. Deoarece vectorii $grad\, q_i$ sunt şi ei normali la suprafețele

$q_i = q_i^0 = const._i$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$, dacă notăm cu h_i, $\left(i = \overline{1,3}\right)$ modúlii vectorilor $grad\, q_i$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$, putem scrie:

$$grad\, q_i = h_i \vec{n}_i, \ \left(i = \overline{1,3}\right), \text{ (fără sumare).} \qquad \text{(C.63)}$$

Cum,

$$grad\, q_i = \frac{\partial q_i}{\partial x_1}\vec{u}_1 + \frac{\partial q_i}{\partial x_2}\vec{u}_2 + \frac{\partial q_i}{\partial x_3}\vec{u}_3 \equiv \frac{\partial q_i}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z}\vec{k}$$

avem:

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial q_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial z}\right)^2. \qquad \text{(C.64)}$$

Cantitățile h_i, $\left(i = \overline{1,3}\right)$ se numesc *parametrii diferențiali de ordinul I.*

Definiție: Spunem că vectorii $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ și $\vec{a}_3$ – pe de o parte – și $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ și $\vec{b}_3$ – pe de altă parte – formează un *sistem de vectori reciproci unii față de ceilalți*, dacă avem îndeplinite relațiile:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_i = 1, \ \left(i = \overline{1,3}\right), \qquad \text{(f.s.)}$$

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 0, \ \left(i, j = \overline{1,3}\ ;\ i \neq j\right).$$

Să arătăm că vectorii $grad\, q_i$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$ formează un sistem de vectori reciproci cu $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, $\left(i = \overline{1,3}\right)$. Pentru aceasta trebuie să arătăm că

$$grad\, q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = 1, \ \left(i = \overline{1,3}\right), \text{ (f.s.)}$$

și că

$$grad\, q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = 0, \ \left(i, j = \overline{1,3}\ ;\ i \neq j\right).$$

Înmulțind scalar cu $grad\, q_i$ ambii membri ai relației

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3,$$

obținem:

BCU IAȘI / CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$$dq_i = grad\, q_i \cdot d\vec{r} =$$

$$= \left(grad\, q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right) dq_1 + \left(grad\, q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right) dq_2 + \left(grad\, q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) dq_3$$

şi, deoarece dq_1, dq_2 şi dq_3 sunt independenţi, rezultă că numai coeficientul lui dq_i, $\left(i = \overline{1,3}\right)$ este egal cu unu, ceilalţi doi coeficienţi fiind egali cu zero (*q.e.d.*).

În cazul unui reper cartezian, versorii $\vec{v}_1 \equiv \vec{i}$, $\vec{v}_2 \equiv \vec{j}$ şi $\vec{v}_3 \equiv \vec{k}$ sunt perpendiculari doi câte doi şi formează (fiecare dintre ei în parte, atunci când originea O a reperului „parcurge" mulţimea tuturor punctelor din spaţiu) un sistem de vectori echipolenţi. În cazul coordonatelor curbilinii ortogonale versorii $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ şi $\vec{v}_3$ formează un triedru ortogonal drept în orice punct P din spaţiu, dar versorii (fiecare dintre cei trei în parte) care corespund unui alt (oricare) punct $P' \neq P$ din spaţiu nu mai sunt echipolenţi cu primii (cei din punctul P). În plus, vectorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ şi $\vec{e}_3$ (care au drept versori pe $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ şi $\vec{v}_3$) nu îşi păstrează modulul constant (fiecare dintre ei separat) atunci când punctul P parcurge întreg spaţiul. În fine, în cazul coordonatelor curbilinii *oarecare*, atât vectorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ şi $\vec{e}_3$, cât şi versorii $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ şi $\vec{n}_3$ sunt *oarecare* şi depind de punctul P (rămânând, totuşi, liniar independenţi).

Coordonatele curbilinii ortogonale sunt acele coordonatele curbilinii ale căror curbe de coordonate sunt perpendiculare două câte două în orice punct P din spaţiu. Rezultă că, în cazul coordonatelor curbilinii ortogonale, versorii $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ şi $\vec{n}_3$ coincid respectiv cu $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ şi $\vec{v}_3$ şi sunt perpendiculari doi câte doi, deci avem relaţiile:

$$\vec{n}_i = \vec{v}_i; \quad \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0; \quad \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = 0, \quad \left(i \neq j\right).$$

Din aceste relaţii rezultă că pentru ca un sistem de coordonate curbilinii să fie ortogonal, sunt necesare şi suficiente condiţiile:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0, \quad \left(i \neq j\right), \qquad \text{(C.65)}$$

sau

BCU "I. VIDRAŞCU" LIBRARY

$$grad\, q_i \cdot grad\, q_j = \frac{\partial x}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_j}=0,\quad (i\neq j).\text{(C.65')}$$

Dacă coordonatele curbilinii sunt ortogonale, putem găsi o relaţie de legătură între *coeficienţii lui Lamé*, H_i şi *parametrii diferenţiali de ordinul I*, h_i. Din relaţiile: $grad\, q_i = h_i\vec{v}_i$, (f.s.), $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i\vec{v}_i$, (f.s.) şi din relaţiile de reciprocitate obţinem:

$$grad\, q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i\vec{v}_i \cdot H_i\vec{v}_i = h_iH_i = 1,$$

adică:

$$h_i = \frac{1}{H_i},\quad (i=1,\ 2,\ 3) \qquad \text{(C.66)}$$

şi, în particular:

$$grad\, q_i = \frac{\vec{v}_i}{H_i},\quad \left(i=\overline{1,3}\right),\ \text{(f.s.)}.$$

Elementul de linie/arc în coordonate curbilinii ortogonale

Într-un sistem de coordonate curbilinii ortogonale avem:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}dq_3 = H_1dq_1\vec{v}_1+H_2dq_2\vec{v}_2+H_3dq_3\vec{v}_3\ .\text{(C.67)}$$

Componentele $\left|d\vec{r}_1\right| \equiv \left|d\vec{s}_1\right| = \left|H_1dq_1\vec{v}_1\right| = ds_1 = H_1dq_1$, $ds_2 = H_2dq_2$ şi $ds_3 = H_3dq_3$ ale vectorului $d\vec{r}$ după direcţiile date de versorii $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ şi respectiv $\vec{v}_3$ se numesc *componentele curbilinii* ale vectorului $d\vec{r}$. Ridicând la pătrat relaţia (C.67) obţinem:

$$d\vec{r}^{\,2} = d\vec{r}\cdot d\vec{r} \equiv ds^2 = H_1^2\left(dq_1\right)^2 dq_1^2 + H_2^2\left(dq_2\right)^2 + H_3^2\left(dq_3\right)^2 \overset{not.}{=}$$
$$= H_1^2dq_1^2 + H_2^2dq_2^2 + H_3^2dq_3^2, \qquad \text{(C.68)}$$

adică pătratul elementului de arc (metrica) în coordonate curbilinii.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Elementul de suprafaţă în coordonate curbilinii ortogonale

Expresia corectă a elementului de suprafaţă în coordonate curbilinii ortogonale poate fi obţinută prin generalizarea expresiei corespunzătoare scrisă într-un sistem de coordonate carteziene, utilizând interpretarea geometrică a produsului vectorial a doi vectori. După cum ştim, din punct de vedere geometric, produsul vectorial a doi vectori este un vector care are modulul egal cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori, direcţia perpendiculară pe planul format de cei doi vectori şi sensul dat de sensul în care înaintează un burghiu drept, care este rotit astfel încât primul vector să se suprapună peste al doilea pe drumul cel mai scurt (vezi Fig. C17).

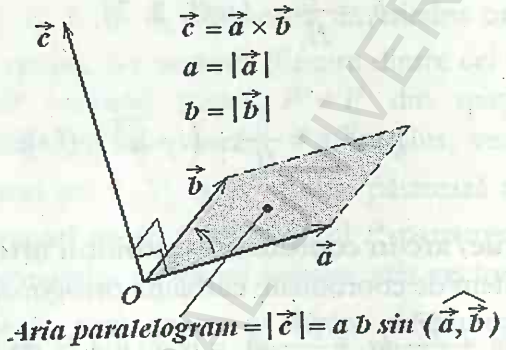


Fig. C17

Ţinând cont de acest lucru, un element vectorizat de suprafaţă (o suprafaţă elementară vectorizată) în coordonate curbilinii ortogonale este dat(ă) de produsul vectorial a două elemente de linie/arc corespunzătoare considerate, de asemenea, în coordonate curbilinii ortogonale. Pentru a înţelege mai uşor, să vedem mai întâi cum stau lucrurile într-un sistem de coordonate carteziene. Într-un astfel de sistem există trei elemente vectorizate de suprafaţă: $d\vec{S}_x = dydz\,\vec{i}$, $d\vec{S}_y = dzdx\,\vec{j}$ şi $d\vec{S}_z = dxdy\,\vec{k}$, date de produsele vectoriale ale celor trei elemente de linie/arc, anume: $d\vec{r}_x = dx\,\vec{i}$, $d\vec{r}_y = dy\,\vec{j}$ şi $d\vec{r}_z = dz\,\vec{k}$. Mai exact, elementul vectorizat de suprafaţă $d\vec{S}_x = d\vec{r}_y \times d\vec{r}_z = dydz\left(\vec{j} \times \vec{k}\right) = dydz\,\vec{i}$ este un vector elementar

al cărui modul este egal cu aria paralelogramului (în acest caz, dreptunghiului) cu laturile de lungime dy şi respectiv dz, a cărui direcţie este perpendiculară pe planul determinat de cele două elemente vectorizate de linie ($d\vec{r}_y$ şi $d\vec{r}_z$), (direcţia axei Ox, perpendiculară pe planul yOz) şi al cărui sens este dat de regula burghiului drept (este sensul vectorului $\vec{j}\times\vec{k}$, adică al versorului $\vec{i}=\vec{j}\times\vec{k}$ al axei Ox).

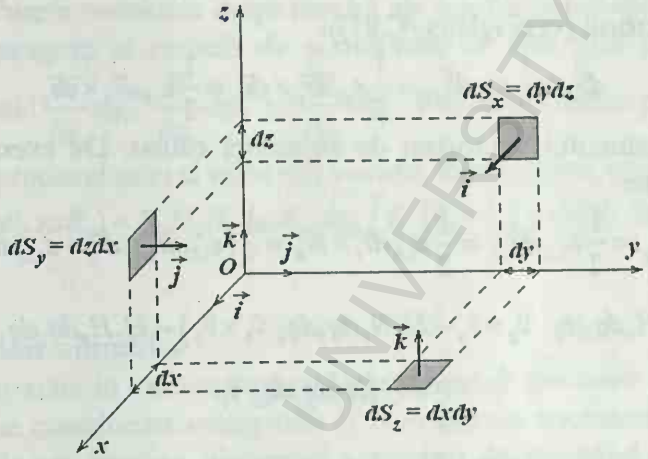


Fig. C18

În mod analog se obţin şi celelalte două elemente vectorizate de suprafaţă (vezi Fig. C18):

$$d\vec{S}_y = d\vec{r}_z \times d\vec{r}_x = dzdx\ \left(\vec{k}\times\vec{i}\right) = dzdx\,\vec{j}$$

şi

$$d\vec{S}_z = d\vec{r}_x \times d\vec{r}_y = dxdy\ \left(\vec{i}\times\vec{j}\right) = dzdx\,\vec{k}\,.$$

Atunci, elementul vectorizat „total/rezultant" de suprafaţă este:

$$d\vec{S} = d\vec{S}_x + d\vec{S}_y + d\vec{S}_z = dydz\,\vec{i} + dzdx\,\vec{j} + dxdy\,\vec{k}\,.$$

Prin analogie, elementelor vectorizate de linie/arc în coordonate curbilinii ortogonale: $d\vec{r}_i = H_i dq_i \vec{v}_i$, (f.s.) şi $d\vec{r}_j = H_j dq_j \vec{v}_j$, (f.s.) le va corespunde elementul vectorizat de suprafaţă:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$d\vec{S}_{ij} = d\vec{r}_i \times d\vec{r}_j = H_i H_j dq_i dq_j \left(\vec{v}_i \times \vec{v}_j\right),$$

unde, pentru a indica faptul că mărimea care rezultă prin produsul vectorial a celor două elemente vectorizate de linie are un caracter tensorial (și nu unul vectorial) am utilizat o săgeată cu dublu sens. Deoarece elementul vectorizat de suprafață trebuie să fie un vector și nu un tensor, nu acesta este „adevăratul" element de suprafață. Întrucât mărimea $d\vec{S}_{ij}$ este un tensor antisimetric, acesteia îi corespunde (pseudo)vectorul (vezi relația (C.91)):

$$d\vec{S}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} d\vec{S}_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} d\vec{r}_j \times d\vec{r}_k \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} d\vec{s}_j \times d\vec{s}_k,$$

care este elementul vectorizat de suprafață căutat. De exemplu, pentru $i=1$ obținem:

$$d\vec{S}_1 \equiv d\vec{S}_{q_1} = \frac{1}{2}\varepsilon_{1jk} d\vec{S}_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{1jk} d\vec{r}_j \times d\vec{r}_k = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{123} d\vec{r}_2 \times d\vec{r}_3 + \varepsilon_{132} d\vec{r}_3 \times d\vec{r}_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(H_2 H_3 dq_2 dq_3\ \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 - H_2 H_3 dq_2 dq_3\ \vec{v}_3 \times \vec{v}_2\right) = H_2 H_3 dq_2 dq_3\ \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 =$$

$$= H_2 H_3 dq_2 dq_3\ \vec{v}_1. \qquad \text{(C.69)}$$

În mod cu totul asemănător se obțin și celelalte două elemente vectorizate de suprafață: $d\vec{S}_2 \equiv d\vec{S}_{q_2} = H_3 H_1 dq_3 dq_1\ \vec{v}_2$ și $d\vec{S}_3 \equiv d\vec{S}_{q_3} = H_1 H_2 dq_1 dq_2\ \vec{v}_3$. Prin adunare rezultă atunci elementul vectorizat „total" de suprafață în coordonate curbilinii ortogonale:

$$d\vec{S} = H_2 H_3 dq_2 dq_3\ \vec{v}_1 + H_3 H_1 dq_3 dq_1\ \vec{v}_2 + H_1 H_2 dq_1 dq_2\ \vec{v}_3. \qquad \text{(C.70)}$$

În relația de mai sus $H_i H_j dq_i dq_j\ \vec{v}_k$ este elementul vectorizat de suprafață normal la „planul" $q_i P q_j$, $\left(i, j = \overline{1,3}\right)$, versorul normalei la acest element de suprafață fiind $\vec{v}_k$, $\left(k = \overline{1,3}\right)$.

Elementul de volum în coordonate curbilinii ortogonale

Elementul de volum în coordonatele curbilinii ortogonale poate fi obținut prin generalizarea expresiei elementului de volum din coordonatele carteziene, ținând cont de interpretarea geometrică a produsului mixt a trei vectori.

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În coordonate carteziene avem:

$$dV = d\vec{r}_1 \cdot \left(d\vec{r}_2 \times d\vec{r}_3\right) = dx\,\vec{i} \cdot \left(dy\,\vec{j} \times dz\,\vec{k}\right) = dxdydz\left[\vec{i} \cdot \left(\vec{j} \times \vec{k}\right)\right] = dxdydz\,.$$

Fie acum punctele (infinitezimal apropiate în spațiu) $M\left(q_1,\, q_2,\, q_3\right)$ și $N\left(q_1 + dq_1,\; q_2 + dq_2,\, q_3 + dq_3\right)$. Ducând cele trei suprafețe de coordonate care trec prin punctul M și cele trei suprafețe de coordonate care trec prin punctul vecin N, se formează un paralelipiped curbiliniu elementar. Putem considera drept muchii ale acestui paralelipiped vectorii elementari tangenți la curbele de coordonate ce trec prin punctul M, adică vectorii: $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1$, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2$ și $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3$. Volumul acestui paralelipiped este dat de produsul mixt al celor trei vectori. Prin urmare, se obține:

$$dV = d\vec{s}_1 \cdot \left(d\vec{s}_2 \times d\vec{s}_3\right) = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \left[\vec{v}_1 \cdot \left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\right)\right] = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3\,. \tag{C.71}$$

Exemple:

1) Coordonate cilindrice

Vom arăta în cele ce urmează că *sistemul de coordonate cilindrice* este un sistem de coordonate ortogonale și vom calcula coeficienții lui Lamé, elementul de arc, metrica, elementul vectorizat de suprafață și elementul de volum în aceste coordonate. Avem:

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z,\; q_1 = \rho,\quad q_2 = \varphi,\quad q_3 = z\,.$$

Față de un reper cartezian, vectorul de poziție $\vec{r}$ al unui punct oarecare P din spațiu este dat de relația:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}\,.$$

Avem:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\,,$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\,\vec{i} + \rho\cos\varphi\,\vec{j}$$

și

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}\,.$$

Utilizând aceste expresii obținem:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=0,\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=0,\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}=0,$$

ceea ce, în acord cu relațiile (C.65), arată că acest sistem de coordonate este unul cu coordonate curbilinii ortogonale. În plus,

- coeficienții Lamé sunt:

$$H_1=1,\quad H_2=\rho,\quad H_3=1;$$

- elementul de arc este:

$$d\vec{r}=d\rho\,\vec{v}_1+\rho d\varphi\,\vec{v}_2+dz\,\vec{v}_3=d\rho\,\vec{u}_\rho+\rho d\varphi\,\vec{u}_\varphi+dz\,\vec{u}_z=$$
$$=d\rho\,\vec{u}_\rho+\rho d\varphi\,\vec{u}_\varphi+dz\,\vec{k};$$

- metrica este:

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\varphi^2+dz^2;$$

- elementul vectorizat de suprafață este:

$$d\vec{S}=\rho d\varphi dz\,\vec{v}_1+d\rho dz\,\vec{v}_2+\rho d\rho d\varphi\,\vec{v}_3=\rho d\varphi dz\,\vec{u}_\rho+d\rho dz\,\vec{u}_\varphi+\rho d\rho d\varphi\,\vec{u}_z,$$

iar elementul de volum este:

$$dV=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

2) Coordonate sferice

În acest caz avem:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta,$$
$$q_1=r,\ q_2=\theta,\ q_3=\varphi,$$
$$\vec{r}=r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+r\cos\theta\,\vec{k},$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+\cos\theta\,\vec{k},$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=r\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i}+r\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j}-r\sin\theta\,\vec{k},$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i}+r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{j},$$

iar din aceste relații rezultă:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}=0,\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}=0,\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}=0,$$

ceea ce, în acord cu (C.65) arată că şi acest sistem de coordonate este unul cu coordonate curbilinii ortogonale. În plus,

- coeficienţii Lamé sunt:

$$H_1=1,\quad H_2=r,\quad H_3=r\sin\theta;$$

- elementul de arc este:

$$d\vec{r}\equiv d\vec{s}=dr\,\vec{v}_1+rd\theta\,\vec{v}_2+r\sin\theta d\varphi\,\vec{v}_3=dr\,\vec{u}_r+rd\theta\,\vec{u}_\theta+r\sin\theta d\varphi\,\vec{u}_\varphi;$$

- metrica este:

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2;$$

- elementul vectorizat de suprafaţă este:

$$d\vec{S}=r^2\sin\theta d\theta d\varphi\,\vec{v}_1+r\sin\theta dr d\varphi\,\vec{v}_2+rdrd\theta\,\vec{v}_3=$$

$$=r^2\sin\theta d\theta d\varphi\,\vec{u}_r+r\sin\theta dr d\varphi\,\vec{u}_\theta+rdrd\theta\,\vec{u}_\varphi\ ,$$

iar elementul de volum este:

$$dV=r^2\sin\theta dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Gradientul, rotorul, divergenţa şi operatorul lui Laplace în coordonate curbilinii ortogonale

Este bine ştiut faptul că rezolvarea unei probleme de ecuaţiile fizicii matematice este mult uşurată dacă se ţine cont de simetria acesteia. Cum, cel mai adesea avem de a face cu simetrii care corespund coordonatelor curbilinii ortogonale (simetrie sferică, cilindrică, polară plană etc.), devine imperios necesar să cunoaştem expresiile operatorilor diferenţiali (gradientul, divergenţa, rotorul şi laplaceanul) în aceste coordonate.

Fie $\varphi=\varphi(x,y,z)\equiv\varphi(\vec{r})$ un câmp scalar de clasă C^1 pe un anumit domeniu $D\subset E_3$. Atunci, în coordonatele curbilinii ortogonale q_1, q_2, q_3, pentru $grad\,\varphi$ vom avea:

$$grad\,\varphi(q_1,q_2,q_3)=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}grad\,q_1+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}grad\,q_2+\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}grad\,q_3.$$

Deoarece

$$grad\,q_i=\frac{\vec{v}_i}{H_i},\ \text{(f.s.)},$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

putem scrie:

$$grad\,\varphi(q_1,\ q_2,\ q_3)=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\vec{v}_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\vec{v}_2+\frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\vec{v}_3. \qquad (C.72)$$

De exemplu, în coordonatele cilindrice avem:

$$grad\,\phi(\rho,\ \varphi,\ z)=\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\vec{u}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}, \qquad (C.73)$$

iar în coordonatele sferice:

$$grad\,\phi(r,\ \theta,\ \varphi)=\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi. \qquad (C.74)$$

Rotorul în coordonate curbilinii ortogonale

Fie câmpul vectorial $\vec{V}=V_i\vec{v}_i=V_1\vec{v}_1+V_2\vec{v}_2+V_3\vec{v}_3$ de clasă C^1 pe un domeniu $D\subset E_3$. Să calculăm $rot\ \vec{V}$. Avem:

$$\begin{aligned}rot\,\vec{V}=rot\left(V_i\vec{v}_i\right)=rot\left(V_1\vec{v}_1+V_2\vec{v}_2+V_3\vec{v}_3\right)=V_1\,rot\,\vec{v}_1+\left(grad\ V_1\right)\times\vec{v}_1+\\+V_2\,rot\,\vec{v}_2+\left(grad\ V_2\right)\times\vec{v}_2+V_3\,rot\,\vec{v}_3+\left(grad\ V_3\right)\times\vec{v}_3=\\=V_i\,rot\,\vec{v}_i+\left(grad\ V_i\right)\times\vec{v}_i.\end{aligned} \qquad (C.75)$$

Pentru a calcula $rot\,\vec{v}_i$, $\left(i=\overline{1,3}\right)$, ținem seama de relația cunoscută:

$$grad\,q_i=\frac{1}{H_i}\vec{v}_i,\ \left(i=\overline{1,3}\right),\ (f.s.).$$

Din identitatea vectorială dată de relația (C.53) rezultă că

$$rot\left(grad\,q_i\right)=0,\ \forall q_i,$$

adică

$$rot\left(grad\,q_i\right)=rot\left(\frac{1}{H_i}\vec{v}_i\right)=\frac{1}{H_i}rot\,\vec{v}_i+grad\left(\frac{1}{H_i}\right)\times\vec{v}_i=0,\ (f.s.).$$

De aici rezultă că

$$\frac{1}{H_i}rot\,\vec{v}_i=-grad\left(\frac{1}{H_i}\right)\times\vec{v}_i\ ,\ (f.s.). \qquad (C.76)$$

Dar,

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$grad\left(\frac{1}{H_i}\right)=-\frac{1}{H_i^2}grad\,H_i,\ \text{(f.s.)}$$

Înlocuind această relație în (C.76) rezultă:

$$\frac{1}{H_i}rot\,\vec{v}_i=-grad\left(\frac{1}{H_i}\right)\times\vec{v}_i=\frac{1}{H_i^2}grad\,H_i\times\vec{v}_i\ ,\quad \left(i=\overline{1,3}\right),\ \text{(f.s.)},$$

adică

$$rot\,\vec{v}_i=\frac{1}{H_i}grad\,H_i\times\vec{v}_i,\quad (i=1,\ 2,\ 3),\ \text{(f.s.)}.$$

Înlocuind această expresie în relația (C.75) rezultă:

$$rot\,\vec{V}=V_i\,rot\,\vec{v}_i+\left(grad\ V\right)_i\times\vec{v}_i=\frac{V_i}{H_i}grad\,H_i\times\vec{v}_i+\left(grad\ V_i\right)\times\vec{v}_i=$$

$$=\left(\frac{V_i}{H_i}grad\,H_i+grad\,V_i\right)\times\vec{v}_i=\frac{1}{H_i}grad\left(V_iH_i\right)\times\vec{v}_i=$$

$$=\frac{1}{H_1}grad\left(V_1H_1\right)\times\vec{v}_1+\frac{1}{H_2}grad\left(V_2H_2\right)\times\vec{v}_2+\frac{1}{H_3}grad\left(V_3H_3\right)\times\vec{v}_3.$$

Deci,

$$rot\,\vec{V}=\frac{1}{H_i}grad\left(V_iH_i\right)\times\vec{v}_i,\quad \left(i=\overline{1,3}\right).\qquad \text{(C.77)}$$

De exemplu,

$$\left(rot\,\vec{V}\right)_1=\left(rot\,\vec{V}\right)\cdot\vec{v}_1=$$

$$=\left[\frac{1}{H_1}grad\left(V_1H_1\right)\times\vec{v}_1+\frac{1}{H_2}grad\left(V_2H_2\right)\times\vec{v}_2+\frac{1}{H_3}grad\left(V_3H_3\right)\times\vec{v}_3\right]\cdot\vec{v}_1=$$

$$=\left[\frac{1}{H_2}grad\left(V_2H_2\right)\times\vec{v}_2\right]\cdot\vec{v}_1+\left[\frac{1}{H_3}grad\left(V_3H_3\right)\times\vec{v}_3\right]\cdot\vec{v}_1=$$

$$=\left(grad\ V_2\times\vec{v}_2+\frac{V_2}{H_2}grad\ H_2\times\vec{v}_2\right)\cdot\vec{v}_1+$$

$$+\left(grad\ V_3\times\vec{v}_3+\frac{V_3}{H_3}grad\ H_3\times\vec{v}_3\right)\cdot\vec{v}_1=$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= \left[\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_2}{\partial q_1}\vec{v}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial V_2}{\partial q_2}\vec{v}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial V_2}{\partial q_3}\vec{v}_3\right)\times\vec{v}_2\right]\cdot\vec{v}_1 +$$

$$+\frac{V_2}{H_2}\left[\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\vec{v}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_2}\vec{v}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\vec{v}_3\right)\times\vec{v}_2\right]\cdot\vec{v}_1 +$$

$$+\left[\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_3}{\partial q_1}\vec{v}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial V_3}{\partial q_2}\vec{v}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial V_3}{\partial q_3}\vec{v}_3\right)\times\vec{v}_3\right]\cdot\vec{v}_1 +$$

$$+\frac{V_3}{H_3}\left[\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\vec{v}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\vec{v}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_3}\vec{v}_3\right)\times\vec{v}_3\right]\cdot\vec{v}_1 =$$

$$= \left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial V_2}{\partial q_3} + \frac{V_2}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right)(\vec{v}_3\times\vec{v}_2)\cdot\vec{v}_1 + \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_3}{\partial q_2} + \frac{V_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right)(\vec{v}_2\times\vec{v}_3)\cdot\vec{v}_1 =$$

$$= -\frac{1}{H_3}\frac{\partial V_2}{\partial q_3} - \frac{V_2}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial V_3}{\partial q_2} + \frac{V_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} =$$

$$= \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(V_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(V_2H_2)\right].$$

În mod analog se obțin:

$$\left(rot\,\vec{V}\right)_2 = \frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(V_1H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(V_3H_3)\right]$$

și

$$\left(rot\,\vec{V}\right)_3 = \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_2H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(V_1H_1)\right].$$

În concluzie,

$$rot\,\vec{V} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(V_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(V_2H_2)\right]\vec{v}_1 +$$

$$+\frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(V_1H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(V_3H_3)\right]\vec{v}_2 + \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_2H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(V_1H_1)\right]\vec{v}_3.$$

De exemplu, în coordonate cilindrice:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$rot\ \vec{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\vec{u}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right]\vec{k},$$

iar în coordonate sferice:

$$rot\ \vec{V} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right]\vec{u}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi)\right]\vec{u}_\theta +$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]\vec{u}_\varphi.$$

Divergența în coordonate curbilinii ortogonale

Fie câmpul vectorial $\vec{V} = V_i\vec{v}_i = V_1\vec{v}_1 + V_2\vec{v}_2 + V_3\vec{v}_3$ de clasă C^1 pe un domeniu $D \subset E_3$. Să calculăm divergența acestui câmp vectorial. Avem:

$$div\vec{V} = div(V_i\vec{v}_i) = div(V_1\vec{v}_1 + V_2\vec{v}_2 + V_3\vec{v}_3) = V_1\, div\,\vec{v}_1 + (grad\ V_1)\cdot\vec{v}_1 +$$

$$+V_2\, div\,\vec{v}_2 + (grad\ V_2)\cdot\vec{v}_2 + V_3\, div\,\vec{v}_3 + (grad\ V_3)\cdot\vec{v}_3 =$$

$$= V_i\, div\,\vec{v}_i + (grad\ V_i)\cdot\vec{v}_i\ . \qquad (C.78)$$

Pentru a calcula $div\,\vec{v}_i$, $(i = \overline{1,3})$ ținem cont că $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1$ și $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Pentru $i = 1$ avem:

$$div\,\vec{v}_1 = div(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \vec{v}_3 \cdot rot\ \vec{v}_2 - \vec{v}_2 \cdot rot\ \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \cdot \frac{1}{H_2} grad\, H_2 \times \vec{v}_2 -$$

$$-\vec{v}_2 \cdot \frac{1}{H_3} grad\, H_3 \times \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \cdot \frac{grad\, H_2}{H_2} + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \cdot \frac{grad\, H_3}{H_3} =$$

$$= \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \cdot \left[\frac{grad\, H_2}{H_2} + \frac{grad\, H_3}{H_3}\right] = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \cdot \left[\frac{grad\,(H_2 H_3)}{H_2 H_3}\right] =$$

$$= \vec{v}_1 \cdot \left[\frac{grad\,(H_2 H_3)}{H_2 H_3}\right].$$

Prin permutări circulare obținem:

$$div\,\vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \left[\frac{grad\,(H_3 H_1)}{H_3 H_1}\right]$$

BCU IAȘI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

și

$$div\,\vec{v}_3 = \vec{v}_3 \cdot \left[\frac{grad\,(H_1 H_2)}{H_1 H_2}\right].$$

Înlocuind aceste expresii în relația (C.78), obținem:

$$div\,\vec{V} = V_1\,\vec{v}_1 \cdot \frac{grad(H_2 H_3)}{H_2 H_3} + grad\,V_1 \cdot \vec{v}_1 + V_2\,\vec{v}_2 \cdot \frac{grad(H_3 H_1)}{H_3 H_1} + grad\,V_2 \cdot \vec{v}_2 +$$

$$+ V_3\,\vec{v}_3 \cdot \frac{grad(H_1 H_2)}{H_1 H_2} + grad\,V_3 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \left[V_1 \frac{grad(H_2 H_3)}{H_2 H_3} + grad\,V_1\right] +$$

$$+ \vec{v}_2 \cdot \left[V_2 \frac{grad(H_3 H_1)}{H_3 H_1} + grad\,V_2\right] + \vec{v}_3 \cdot \left[V_3 \frac{grad(H_1 H_2)}{H_1 H_2} + grad\,V_3\right] =$$

$$= \vec{v}_1 \cdot \frac{grad(V_1 H_2 H_3)}{H_2 H_3} + \vec{v}_2 \cdot \frac{grad(V_2 H_3 H_1)}{H_3 H_1} + \vec{v}_3 \cdot \frac{grad(V_3 H_1 H_2)}{H_1 H_2} =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} grad(V_1 H_2 H_3) \cdot H_1 \vec{v}_1 + \frac{grad(V_2 H_3 H_1)}{H_1 H_2 H_3} \cdot H_2 \vec{v}_2 +$$

$$+ \frac{grad(V_3 H_1 H_2)}{H_1 H_2 H_3} \cdot H_3 \vec{v}_3. \qquad \text{(C.79)}$$

Întrucât

$$grad\ \varphi \cdot H_1 \vec{v}_1 = H_1 \vec{v}_1 \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} grad\,q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} grad\,q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} grad\,q_3\right) =$$

$$= H_1 \vec{v}_1 \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\vec{v}_1}{H_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\vec{v}_2}{H_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}\frac{\vec{v}_3}{H_3}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1},$$

și analog

$$grad\ \varphi \cdot H_2 \vec{v}_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}$$

și

$$grad\ \varphi \cdot H_3 \vec{v}_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}$$

din (C.79) rezultă:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$div\vec{V} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3H_1H_2)\right]. \tag{C.80}$$

De exemplu, în coordonate cilindrice avem:

$$div\ \vec{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\ V_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

iar în coordonate sferice,

$$div\ \vec{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\ V_r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta\ V_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rV_\varphi\right)\right].$$

Operatorului lui Laplace în coordonate curbilinii ortogonale

Conform definiției,

$$\Delta\Phi = div\left(grad\,\Phi\right). \tag{C.81}$$

Utilizând rezultatele (C.72) şi (C.80) în relația (C.81) obținem:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{C.82}$$

De exemplu, în coordonate cilindrice avem:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},$$

iar în coordonate sferice:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C.8. Câteva aplicații ale calculului vectorial

Exercițiul 1

Fie $\vec{r}(x, y, z)$ vectorul de poziție al unui punct P în raport cu originea reperului cartezian $Oxyz$. Să se calculeze: $rot\,\vec{r}$, $div\,\vec{r}$, $grad\,r$, $grad\left(\frac{1}{r}\right)_{r\neq 0}$, $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)_{r\neq 0}$ și $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$.

Rezolvare:

Avem:

$$rot\,\vec{r} = \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j x_k = \vec{u}_i \varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0;$$

$$div\,\vec{r} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3;$$

$$grad\,r = \vec{u}_i \frac{\partial r}{\partial x_i} = \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_k x_k} = \vec{u}_i \frac{2x_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i}}{2\sqrt{x_k x_k}} =$$

$$= \frac{x_k \delta_{ki}}{r}\vec{u}_i = \frac{x_i \vec{u}_i}{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{u}_r;$$

$$grad\left(\frac{1}{r}\right)_{r\neq 0} = \vec{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) = -\vec{u}_i \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i} = -\vec{u}_i \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_k x_k} = -\vec{u}_i \frac{1}{r^2}\frac{2x_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i}}{2\sqrt{x_k x_k}} =$$

$$= -\vec{u}_i \frac{1}{r^2}\frac{x_k \delta_{ki}}{r} = -\frac{x_i \vec{u}_i}{r^3} = -\frac{\vec{r}}{r^3};$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)_{r\neq 0} = div\left[grad\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} div\,\vec{r} - \vec{r}\cdot grad\left(\frac{1}{r^3}\right) =$$

$$= -\frac{3}{r^3} - \vec{r}\cdot\left(-\frac{1}{r^6}\right)\frac{\partial r^3}{\partial x_i}\vec{u}_i = -\frac{3}{r^3} + \frac{\vec{r}}{r^6}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_k x_k\right)^{3/2}\vec{u}_i = -\frac{3}{r^3} +$$

$$+ \frac{\vec{r}\cdot\vec{u}_i}{r^6}\frac{3}{2}\left(x_k x_k\right)^{1/2} 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5}\vec{r}\cdot x_i \vec{u}_i = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5}\vec{r}\cdot\vec{r} = 0.$$

BCU "AL. I. CUZA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a determina pe $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ pentru orice valoare a lui r (deci, inclusiv în punctul $r=0$) vom face apel la unele cunoştinţe simple de electrostatică. După cum ştim, pentru o distribuţie volumică de sarcină electrică de densitate $\rho(\vec{r})$ aflată în vid, ecuaţia Poisson se scrie astfel:

$$\Delta V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}. \tag{C.83}$$

Dacă distribuţia de sarcină electrică este alcătuită dintr-o singură sarcină electrică punctiformă de valoare Q, situată în vid, într-un punct de vector de poziţie $\vec{r}_0$, atunci putem scrie:

$$\rho(\vec{r}) = Q\ \delta(\vec{r}-\vec{r}_0), \tag{C.84}$$

unde $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ este distribuţia „delta" a lui Dirac. Ţinând cont că în acest caz

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}, \tag{C.85}$$

prin înlocuirea relaţiilor (C.84) şi (C.85) în (C.83), rezultă:

$$\Delta\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = -Q\frac{\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)}{\varepsilon_0},$$

de unde, prin simplificarea cu $\frac{Q}{\varepsilon_0} \neq 0$, obţinem:

$$\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = -4\pi\ \delta(\vec{r}-\vec{r}_0).$$

Dacă sarcina electrică punctiformă se află în originea sistemului de coordonate $(\vec{r}_0=0)$ rezultă relaţia căutată:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\ \delta(r).$$

În continuare vom rezolva acest exerciţiu cu ajutorul soft-ului Mathematica 4.0. Liniile de comandă care permit aceasta sunt date mai jos:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

```
<<Calculus`VectorAnalysis`
SetCoordinates[Spherical[r, Theta, phi]]
G1=Grad[Sqrt[x^2+y^2+z^2], Cartesian[x, y, z]]
G2=Grad[[Sqrt[x^2+y^2+z^2], ProlateSpheroidal[x, y, z]]]
```

$$\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{Sin\,[y]^2+Sinh\,[x]^2}}, \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{Sin\,[y]^2+Sinh\,[x]^2}}, \\ \dfrac{z\,Csc\,[y]\,Csch\,[x]}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{array}\right\}$$

În următoarele două figuri (Fig. C19 și Fig. C20) sunt reprezentate grafic $grad\, r$ și $grad\left(\frac{1}{r}\right)_{r\neq 0}$ în coordonate carteziene (x, y, z). Acest lucru poate fi făcut cu ajutorul următoarelor două linii de comandă:

```
PlotGradientField3D[Sqrt[x^2+y^2+z^2],{x, .01, 6}, {y, .01, 6}, {z, .1, 4}]
```

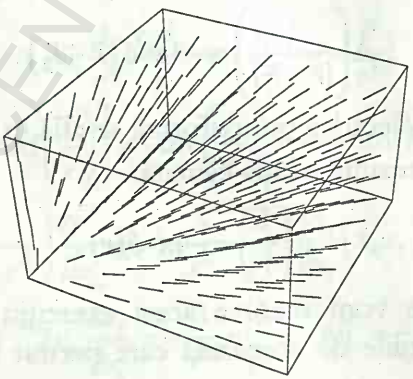


Fig. C19

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PlotGradientField3D[1/Sqrt[x^2+y^2+z^2],{x,-5,5}, {y,-5,5}, {z,-5,5}]

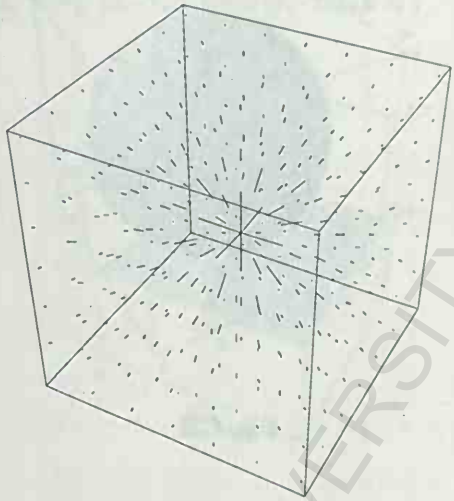


Fig. C20

În următoarele trei figuri (Fig. C21, Fig. C22 şi Fig. C23) este reprezentat grafic vectorul de poziție $\vec{r}$ în diferite sisteme de coordonate:

1. sferice ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$), pentru $r = 1cm$
2. cilindrice ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$), pentru $\rho = 5cm$ şi
3. cartezian (x, y, z).

Liniile de comandă care realizează acest lucru sunt:

```
<<Graphics`ParametricPlot3D`
G3=ParametricPlot3D[{r*Sin[θ]*Cos[φ], r*Sin[θ]*Sin[φ], r*Cos[θ]},
{θ, 0, Pi, Pi/20}, {φ, 0, 2*Pi, Pi/10}]
```

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

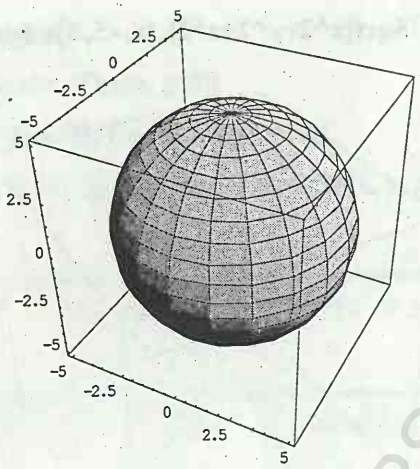


Fig. C21

```
ρ = 5;
G4=ParametricPlot3D[{ρ * Cos[φ], ρ * Sin[φ], z}, {z, 0, 10, 1/2}, {φ, 0, 2 * Pi,
Pi/10}]
```

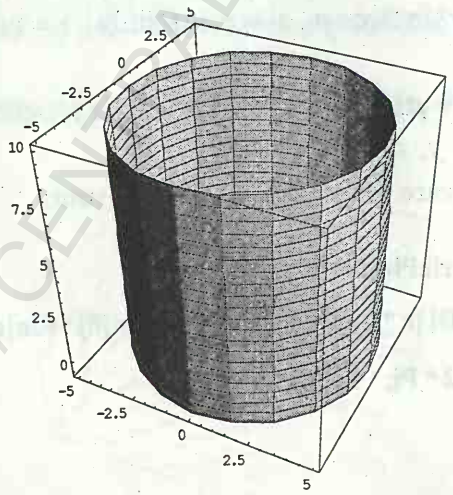


Fig. C22

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

z = 1;

ParametricPlot3D[{x, y, z}, {x, -1, 1, 1/2}, {y, -1, 1, 1/2}]

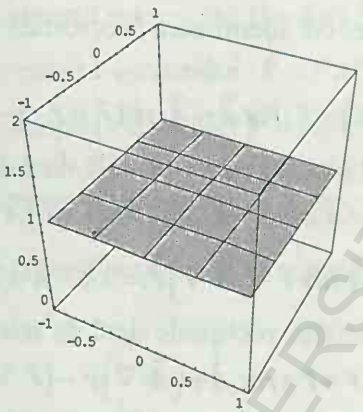


Fig. C23

Valorile rotorului $\left(rot\,\vec{r}=0\right)$ şi divergenței $\left(div\,\vec{r}=\frac{\partial x_i}{\partial x_i}=3\right)$ vectorului de poziție $\vec{r}$ în coordonate carteziene pot fi obținute cu ajutorul liniilor de comandă:

<<Calculus`VectorAnalysis`

Curl[{x, y, z}, Cartesian[{x, y, z}]]

Div[{x, y, z}, Cartesian[x, y, z]]

având ca rezultat:

{0, 0, 0}

şi respectiv,

3

Exercițiul 2

Dacă $\vec{A}$ este un vector constant, să se calculeze:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$div\left(\vec{A}\times\vec{r}\right),\ rot\left(\vec{A}\times\vec{r}\right),\ grad\left(\vec{A}\cdot\vec{r}\right).$$

Rezolvare:

În conformitate cu identitatea vectorială dată de relaţia (C.49) obţinem:

$$div\left(\vec{A}\times\vec{r}\right)=\vec{r}\cdot rot\,\vec{A}-\vec{A}\cdot rot\,\vec{r}=\vec{r}\cdot 0-\vec{A}\cdot 0=0.$$

De asemenea, utilizând identitatea vectorială dată de relaţia (C.51) avem:

$$rot\left(\vec{A}\times\vec{r}\right)=\vec{A}\ div\,\vec{r}-\vec{r}\ div\,\vec{A}+\left(\vec{r}\cdot\nabla\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{r}=$$

$$=\vec{A}\ div\,\vec{r}-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{r}=3\vec{A}-\vec{A}=2\vec{A}.$$

În fine, cu ajutorul identităţii vectoriale dată de relaţia (C.52) se obţine:

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{r}\right)=\vec{A}\times rot\,\vec{r}+\vec{r}\times rot\,\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{r}-\left(\vec{r}\cdot\nabla\right)\vec{A}=\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{r}=\vec{A}$$

Să verificăm corectitudinea acestor relaţii şi cu ajutorul soft-ului Mathematica 4.0. Pentru aceasta vom utiliza următoarele linii de comandă:

```
<<Calculus`VectorAnalysis`
A1=CrossProduct[{A, A, A}, {x, y, z}, Cartesian [x, y, z] ]
Div[A1, Cartesian [x, y, z] ]
```

0

```
Curl[A1, Cartesian[ x, y, z ]]
```

{-Ay + Az, Ax - Az, - Ax + Ay}

{2A, 2A, 2A}

```
A2=DotProduct[ {A, A, A}, {x, y, z} ]
Grad[A2, Cartesian[ x, y, z ]]
```

Ax + Ay + Az

{A, A, A}

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Exercițiul 3

Dacă $\vec{a}$ este un vector constant, iar $\vec{r}$ este vectorul de poziție al unui punct oarecare într-un reper cartezian, să se calculeze:

(a) divergența și rotorul vectorului $\vec{V} = \vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{a})$;

(b) divergența și rotorul vectorului $\vec{V} = \vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})$;

(c) divergența și rotorul vectorului $\vec{V} = (\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{a}$;

(d) divergența și rotorul vectorului $\vec{V} = \dfrac{(\vec{a} \times \vec{r})}{r^2}$;

(e) divergența și rotorul vectorului $\vec{V} = grad\, r$.

Rezolvare:

(a) Avem:

$$div\vec{V} = div\left[\vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{a})\right] = (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot rot\, \vec{a} - \vec{a} \cdot rot(\vec{r} \times \vec{a}) = -\vec{a} \cdot rot(\vec{r} \times \vec{a}) =$$

$$= -\vec{a} \cdot \left[\vec{r}\ div\, \vec{a} - \vec{a}\ div\, \vec{r} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{r} - (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{a}\right] = -\vec{a} \cdot \left[-\vec{a}\ div\, \vec{r} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{r}\right] =$$

$$= -\vec{a} \cdot (-3\,\vec{a} + \vec{a}) = 2\,\vec{a} \cdot \vec{a} = 2a^2$$

și

$$rot\vec{V} = rot\left[\vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{a})\right] = \vec{a}\ div(\vec{r} \times \vec{a}) - (\vec{r} \times \vec{a})div\,\vec{a} + \left[(\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \nabla\right]\vec{a} -$$

$$-(\vec{a} \cdot \nabla)(\vec{r} \times \vec{a}) = -(\vec{a} \cdot \nabla)(\vec{r} \times \vec{a}) = -a_l \partial_l \left(\varepsilon_{ijk} x_j a_k\right) = -\varepsilon_{ijk} a_l a_k \delta_{lj} = -\varepsilon_{ijk} a_j a_k =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk} a_j a_k + \varepsilon_{ijk} a_j a_k\right) = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk} a_j a_k + \varepsilon_{ikj} a_k a_j\right) = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk} a_j a_k - \varepsilon_{ijk} a_k a_j\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk} a_j a_k - \varepsilon_{ijk} a_j a_k\right) = 0.$$

Să verificăm aceste rezultate utilizând același soft, Mathematica 4.0. Pentru aceasta utilizăm următoarele linii de comandă:

```
<<Calculus`VectorAnalysis`
A1=CrossProduct[{x, y, z}, {A, A, A}, Cartesian[ x, y, z ]];
V= CrossProduct[{A, A, A}, A1 , Cartesian[ x, y, z ]];
Div[V, Cartesian[ x, y, z ]]
```

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Curl[V, Cartesian[x, y, z]]

$$2a^2$$

$$\{0, 0, 0\}$$

(b) În mod analog cu consideraţiile de la punctul (a), pentru vectorul $\vec{V} = \vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})$, avem:

$$div\vec{V} = div\left[\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})\right] = (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot rot\,\vec{r} - \vec{r} \cdot rot(\vec{a} \times \vec{r}) = -\vec{r} \cdot rot(\vec{a} \times \vec{r}) =$$

$$= -\vec{r} \cdot \left[\vec{a}\ div\ \vec{r} - \vec{r}\ div\ \vec{a} + (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{r}\right] = -\vec{r} \cdot (3\vec{a} - \vec{a}) = -2\vec{r} \cdot \vec{a}$$

şi

$$rot\,\vec{V} = rot\left[\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})\right] = \vec{r}\ div(\vec{a} \times \vec{r}) - (\vec{a} \times \vec{r})\,div\,\vec{r} + \left[(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \nabla\right]\vec{r} -$$

$$-(\vec{r} \cdot \nabla)(\vec{a} \times \vec{r}) = -(\vec{a} \times \vec{r})\,div\,\vec{r} + \left[(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \nabla\right]\vec{r} - (\vec{r} \cdot \nabla)(\vec{a} \times \vec{r}) = -3(\vec{a} \times \vec{r}) +$$

$$+(\vec{a} \times \vec{r})_i\, \partial_i (x_k \vec{u}_k) - x_j \partial_j (\vec{u}_i \varepsilon_{ilm} a_l x_m) = -3(\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \times \vec{r})_i\, \vec{u}_k \delta_{ik} -$$

$$-\vec{u}_i \varepsilon_{ilm} x_j a_l \delta_{jm} = -3(\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \times \vec{r}) - \vec{u}_i \varepsilon_{ilj} x_j a_l = -3(\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \times \vec{r}) -$$

$$-\vec{u}_i \varepsilon_{ilj} a_l x_j = -3(\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \times \vec{r}) - (\vec{a} \times \vec{r}) = -3(\vec{a} \times \vec{r}).$$

Aceleaşi rezultate se obţin şi utilizând următoarele linii de comandă în Mathematica 4.0:

<<Calculus`VectorAnalysis`

A1=CrossProduct[{A, A, A}, {x, y, z} , Cartesian[{x, y, z}]];

V=CrossProduct[{x, y, z}, A1 , Cartesian[{x, y, z}]];

Div[V, Cartesian[{x, y, z}]]

Curl[V, Cartesian[{x, y, z}]]

-2Ax - 2Ay - 2Az

{3Ay - 3Az, - 3Ax + 3Az, 3Ax - 3Ay}

(c) Pentru $\vec{V} = (\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{a}$ avem:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$div\ \vec{V} = div(\vec{a}\times\vec{r}) + div\left[(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{a}\right] = div\left[(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{a}\right] = (\vec{a}\cdot\vec{r})\,div\ \vec{a} +$$
$$+\vec{a}\cdot grad(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2$$

şi

$$rot\ \vec{V} = rot(\vec{a}\times\vec{r}) + rot\left[(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{a}\right] = \vec{a}\ div\ \vec{r} - \vec{r}\ div\ \vec{a} + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{a} -$$
$$-(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r} + (\vec{a}\cdot\vec{r})rot\ \vec{a} + grad(\vec{a}\cdot\vec{r})\times\vec{a} = 3\vec{a} - \vec{a} = 2\vec{a}.$$

(d) Să calculăm divergenţa şi rotorul vectorului $\vec{V} = \dfrac{(\vec{a}\times\vec{r})}{r^2}$ cu $\vec{a} = const.$

Avem:

$$div\vec{V} = div\left(\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}div(\vec{a}\times\vec{r}) + (\vec{a}\times\vec{r})\cdot grad\left(\frac{1}{r^2}\right) =$$

$$= (\vec{a}\times\vec{r})\cdot grad\left(\frac{1}{r^2}\right) = (\vec{a}\times\vec{r})\cdot\left[\vec{u}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] = (\vec{a}\times\vec{r})\cdot\vec{u}_i\left(\frac{-2r}{r^4}\right)\frac{\partial\left(\sqrt{x_k x_k}\right)}{\partial x_i} =$$

$$= -(\vec{a}\times\vec{r})\cdot\vec{u}_i\left(\frac{2}{r^3}\right)\frac{1}{2r}2x_k\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = -(\vec{a}\times\vec{r})\cdot\vec{u}_i\left(\frac{2}{r^3}\right)\frac{1}{2r}2x_k\delta_{ik} =$$

$$= -\frac{2}{r^4}\left[\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{r})\right] = 0,$$

iar pentru $rot\ \vec{V}$ avem:

$$rot\ \vec{V} = rot\left[\frac{(\vec{a}\times\vec{r})}{r^2}\right] = \frac{1}{r^2}rot(\vec{a}\times\vec{r}) + grad\left(\frac{1}{r^2}\right)\times(\vec{a}\times\vec{r}) = \frac{1}{r^2}rot(\vec{a}\times\vec{r}) -$$

$$-\frac{2}{r^4}\left[\vec{r}\times(\vec{a}\times\vec{r})\right] = \frac{1}{r^2}rot(\vec{a}\times\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\left[\vec{a}\ div\ \vec{r} - \vec{r}\ div\ \vec{a} + (\vec{r}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r}\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}(3\vec{a} - \vec{a}) = \frac{2\vec{a}}{r^2}.$$

(e) În fine, pentru $\vec{V} = grad\,r$ obţinem:

$$div\vec{V} = div(grad\,r) = div\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}div\,\vec{r} + \vec{r}\cdot grad\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= \frac{3}{r} + \vec{r}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\vec{u}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{x_k x_k}\right) = \frac{3}{r} + \vec{r}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\vec{u}_i\frac{1}{2r}2x_k\frac{\partial x_k}{\partial x_i} =$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$=\frac{3}{r}+\vec{r}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\vec{u}_i\frac{1}{2r}2x_k\delta_{ik}=\frac{3}{r}-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r^3}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r}=\frac{2}{r}$$

şi

$$rot\,\vec{V}=rot\left(grad\,r\right)=0\,.$$

Exercițiul 4

Fiind dat un câmp vectorial $\vec{w}$ pentru care $div\,\vec{w}=0$ şi $rot\,\vec{w}=0$, să se arate că $\vec{E}=grad\left(\vec{r}\cdot\vec{w}\right)+rot\left(\vec{r}\times\vec{w}\right)+\vec{w}=0$.

Rezolvare:

Utilizând identitățile vectoriale date de relațiile (C.50) şi (C.51), avem:

$$\vec{E}=grad\left(\vec{r}\cdot\vec{w}\right)+rot\left(\vec{r}\times\vec{w}\right)+\vec{w}=\vec{r}\times rot\,\vec{w}+\vec{w}\times rot\,\vec{r}+\left(\vec{r}\cdot\nabla\right)\vec{w}+$$
$$+\left(\vec{w}\cdot\nabla\right)\vec{r}+\vec{r}\,div\,\vec{w}-\vec{w}\,div\,\vec{r}+\left(\vec{w}\cdot\nabla\right)\vec{r}-\left(\vec{r}\cdot\nabla\right)\vec{w}+\vec{w}=$$
$$=2\left(\vec{w}\cdot\nabla\right)\vec{r}-2\vec{w}=2\,w_i\partial_i(\vec{u}_k x_k)-2\vec{w}=2\vec{w}-2\vec{w}=0.$$

Exercițiul 5

Fiind dat un câmp vectorial $\vec{v}$ pentru care $div\,\vec{v}=a^2$ şi $rot\,\vec{v}=2\vec{a}$, să se arate că $L=div\left(\vec{v}\times rot\,\vec{v}\right)-4div\,\vec{v}=0$, ştiind că $\vec{a}$ este un vector constant.

Rezolvare:

Utilizând identitatea vectorială dată de relația (C.49), avem:

$$L=div\left(\vec{v}\times rot\,\vec{v}\right)-4div\,\vec{v}=rot\,\vec{v}\cdot rot\,\vec{v}-\vec{v}\cdot rot\left(rot\,\vec{v}\right)-4\,div\,\vec{v}=$$
$$=4\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{v}\cdot rot\,\vec{a}-4a^2=-2\vec{v}\cdot rot\,\vec{a}=0.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C.9. Izomorfismul dintre mulțimea tensorilor antisimetrici de ordinul doi și cea a vectorilor definiți pe același spațiu tridimensional, E_3

Fie un tensor covariant de ordinul doi, A_{ij}, $\left(i,j=\overline{1,3}\right)$, definit pe spațiul euclidian tridimensional E_3. Evident, acesta va avea un număr de $n^m=3^2=9$ componente, unde prin n am notat numărul de dimensiuni ale spațiului pe care este definit tensorul, $n=p+q$ este ordinul tensorului, iar $p\ (=2)$ (respectiv $q\ (=0)$) reprezintă numărul indicilor de covarianță (respectiv de contravarianță) ai tensorului. Sub formă matricială, acest tensor poate fi reprezentat astfel:

$$\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{C.86}$$

Dacă tensorul este antisimetric,

$$A_{ij}=-A_{ji},\ \forall\ i,j=\overline{1,3}, \tag{C.87}$$

atunci, pentru $i=j$ (adică pentru elementele de pe diagonala principală) avem $A_{ii}=-A_{ii}$ (fără sumare), adică $2A_{ii}=0\ \Rightarrow\ A_{ii}=0$ (fără sumare), ceea ce arată că toate elementele diagonalei principale din (C.86) sunt nule. Deci, pentru un tensor antisimetric, de două ori covariant, definit pe E_3, putem scrie:

$$\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.88}$$

Având în vedere și proprietatea de antisimetrie (C.87), relația (C.88) poate fi scrisă în următoarele opt moduri (echivalente, din punctul de vedere al relației de antisimetrie):

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\left(A_{ij}\right)_1=\begin{pmatrix}0 & A_{12} & A_{13}\\ -A_{12} & 0 & A_{23}\\ -A_{13} & -A_{23} & 0\end{pmatrix},\qquad \left(A_{ij}\right)_2=\begin{pmatrix}0 & -A_{21} & A_{13}\\ A_{21} & 0 & A_{23}\\ -A_{13} & -A_{23} & 0\end{pmatrix},$$

$$\left(A_{ij}\right)_3=\begin{pmatrix}0 & A_{12} & -A_{31}\\ -A_{12} & 0 & A_{23}\\ A_{31} & -A_{23} & 0\end{pmatrix},\qquad \left(A_{ij}\right)_4=\begin{pmatrix}0 & A_{12} & A_{13}\\ -A_{12} & 0 & -A_{32}\\ -A_{13} & A_{32} & 0\end{pmatrix},$$

$$\left(A_{ij}\right)_5=\begin{pmatrix}0 & -A_{21} & -A_{31}\\ A_{21} & 0 & A_{23}\\ A_{31} & -A_{23} & 0\end{pmatrix},\qquad \left(A_{ij}\right)_6=\begin{pmatrix}0 & -A_{21} & A_{13}\\ A_{21} & 0 & -A_{32}\\ -A_{13} & A_{32} & 0\end{pmatrix},$$

$$\left(A_{ij}\right)_7=\begin{pmatrix}0 & A_{12} & -A_{31}\\ -A_{12} & 0 & -A_{32}\\ A_{31} & A_{32} & 0\end{pmatrix},\qquad \left(A_{ij}\right)_8=\begin{pmatrix}0 & -A_{21} & -A_{31}\\ A_{21} & 0 & -A_{32}\\ A_{31} & A_{32} & 0\end{pmatrix},$$

Aceste relații arată faptul că un tensor antisimetric de ordinul doi, definit pe un spațiu cu trei dimensiuni are doar trei componente esențial distincte.

Se poate arăta că, în cazul general, un tensor de p ori covariant, de q ori contravariant, antisimetric în grupul de a indici și definit pe un spațiu cu n dimensiuni are $C_n^a n^{p+q-a}$ componente esențial distincte. În cazul de față, $C_3^2 3^{2+0-2}=C_3^2 3^0=C_3^2=\dfrac{3\cdot 2}{2}=3$.

O relația asemănătoare poate fi găsită și pentru un tensor de același fel, dar simetric (și nu antisimetric) în grupul de s indici; în acest caz numărul de componente esențial distincte este dat de relația: $\overline{C}_n^s n^{p+q-s}$, unde $\overline{C}_n^s=\dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+s-1)}{s!}$ reprezintă combinările cu repetiție a n obiecte luate câte s (vezi Anexa B).

BUJAN CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Revenind, să observăm că există deci opt moduri de a considera cele trei componente esențial distincte ale unui tensor antisimetric de ordinul doi pe un spațiu cu trei dimensiuni. Dintre toate aceste modalități de a scrie matricea (C.88) a tensorului în discuție, o vom alege pe a treia, adică:

$$\left(A_{ij}\right)=\left(A_{ij}\right)_3=\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & -A_{31} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(C.89)}$$

Evident, acest lucru nu a fost făcut la întâmplare. Dacă vom observa cu atenție modalitatea aleasă, vom constata că aceasta este singura având componentele cu semnul plus cu indicii scriși astfel încât să respecte permutările circulare ale indicilor 1, 2 și 3. Într-adevăr, din (C.89) rezultă că singurele componente esențial distincte sunt A_{12}, A_{23} și A_{31}.

Ținând cont că pe un spațiu cu trei dimensiuni vectorii au de asemenea trei componente, ne putem întreba dacă nu cumva cele trei componente esențial distincte ale unui tensor antisimetric de ordinul doi, pe același spațiu cu trei dimensiuni, pot fi considerate ca și componentele unui vector din acest spațiu. Răspunsul este afirmativ, legea care asociază cele trei componente esențial distincte ale tensorului, celor trei componente ale vectorului fiind:

$$\begin{aligned} A_{12} &\to v_3, & v_1 &= A_{23}, \\ A_{23} &\to v_1, \quad \Rightarrow & v_2 &= A_{31}, \\ A_{31} &\to v_2, & v_3 &= A_{12}, \end{aligned} \qquad \text{(C.90)}$$

adică asocierea se face astfel încât să fie respectată ordinea dictată de permutările circulare ale celor trei indici: 1, 2 și 3. Într-o singură relație, corespondențele date de (C.90) pot fi scrise astfel:

$$v_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk}, \qquad \text{(C.91)}$$

unde ε_{ijk}, $\left(i,j,k=\overline{1,3}\right)$ este pseudotensorul unitate, complet antisimetric, de ordinul trei, pe spațiul cu trei dimensiuni E_3 (simbolul Levi-Civita). Relația (C.91) poate fi verificată cu ușurință pentru orice indice $i=1, 2, 3$; într-adevăr, de exemplu, dacă $i=2$, atunci

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI FIZICĂ

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$v_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}A_{jk} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{213}A_{13} + \varepsilon_{231}A_{31}\right) = \frac{1}{2}\left(-A_{13} + A_{31}\right) = \frac{1}{2}\left(A_{31} + A_{31}\right) = A_{31}$$

q.e.d.

Invers, ne putem la fel de bine întreba dacă nu cumva și corespondența reciprocă este valabilă, adică, dacă nu cumva cele trei componente ale unui vector dintr-un spațiu cu trei dimensiuni $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \equiv v_i$, $(i = 1, 2, 3)$, pot constitui cele trei componente esențial distincte ale unui tensor antisimetric de ordinul doi pe același spațiu. Și acest răspuns este afirmativ, legea care dă această corespondență fiind:

$$\begin{aligned} v_1 &\to A_{23}, & A_{12} &= v_3, \\ v_2 &\to A_{31}, \quad \Rightarrow & A_{23} &= v_1, \\ v_3 &\to A_{12}, & A_{31} &= v_2, \end{aligned} \tag{C.92}$$

și, după cum simplu se poate observa, se bazează pe aceeași regulă de respectare a permutărilor circulare ale indicilor 1, 2 și 3. Și corespondențele date de (C.92) pot fi scrise într-o singură relație, utilizând același simbol Levi-Civita; aceasta este:

$$A_{ij} = \varepsilon_{ijk}v_k, \quad \left(i, j, k = \overline{1,3}\right), \tag{C.93}$$

și, de asemenea, poate fi verificată pentru orice pereche de indici ij, $(i, j = 1, 2, 3)$. De exemplu, dacă $ij \equiv 31$, avem: $A_{31} = \varepsilon_{31k}v_k = \varepsilon_{312}v_2 = v_2$ etc.

Cele două corespondențe, (C.91) și (C.93) determină izomorfismul căutat.

Pentru a fi riguroși, trebuie să observăm că, deoarece simbolul Levi-Civita nu este un tensor, ci un pseudotensor, prin izomorfismul amintit anterior (mai exact, prin relațiile (C.91)), unui *tensor antisimetric* de ordinul doi pe un spațiu cu trei dimensiuni i se asociază un *pseudovector* (un vector axial) și nu un vector, deoarece produsul dintre un pseudotensor (ε_{ijk}) și un tensor (A_{jk}) este un pseudotensor (în cazul nostru, de ordinul unu, adică un pseudovector). Reciproc, unui *vector* pe un spațiu cu trei dimensiuni, din aceleași motive, prin izomorfismul precizat mai sus (mai precis, prin relațiile (C.93)) i se asociază nu un tensor, ci un *pseudotensor.*

BCU CLUJ CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Bibliografie

[1] Arthur, W., Fenster, S., *Mechanics Halt*, Rimhart Winston Inc., 1969.

[2] Baratesch, H.J., *Mathematische Formelen*, Ed. a XVI-a, Köln, Leipzig, Buch-und Zeit-Verlagsgesellschaft mbH, 1992.

[3] Bălan, Şt., *Culegere de probleme de mecanică*, Ediţia a II-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

[4] Borş, C., *Lecţii de mecanică*, Editura Universităţii „Al.I. Cuza", Iaşi, 1983.

[5] Bradbury, T.C., *Theoretical Mechanics*, John Wiley ans Sons, Inc., New-York, 1968.

[6] Bradford, N.C., *Mechanics*, Wiley, London, 1973.

[7] Brădeanu, P., Pop, I., Brădeanu, D., *Probleme şi exerciţii de mecanică teoretică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.

[8] Bucholtz, N.N., Voronkov, I.M., Minakov, I.A., *Culegere de probleme de mecanică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1962.

[9] Burlacu, L., David, D.Gh., *Culegere de probleme de mecanică analitică*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1988.

[10] Cone, G.F., *Probleme rezolvate de fizică*, Vol. I, II, III, Litografia Institutului Politehnic din Bucureşti, 1974, 1975, 1976.

[11] Cronin, J.A., Greenberg, D.F., Telegdi, V.L., *University of Chicago Graduate Problems in Physics with Solutions*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.

[12] Dragoş, L., *Principiile mecanicii analitice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976.

[13] Drăganu, M., *Introducere matematică în fizica teoretică modernă*, Editura Tehnică, Bucureşti, Vol. I, 1957.

[14] Forray, M.J., *Variational Calculus in Science and Engineering*, McGraw-Hill, New-York, 1968.

[15] Fox, W.R., *Introduction to Fluid Mechanics*, Wiley, New-York, 1973.

[16] Gábos, Z., Stan, I., *Curs de mecanică teoretică pentru fizicieni*, Universitatea „Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, 1974.

[17] Gantmacher, F., *Lectures in Analytical Mechanics*, Mir, Moskow, 1975.

[18] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Co., Mass., 1980.

BCU CLUJ / UNIVERSITY LIBRARY

[19] Grechko, L.G., Sugakov, V.I., Tomasevich, O.F., Fedorchenko, A.M., *Problems in Theoretical Physics*, Mir Publishers, Moscow, 1977.
[20] Greenwood, D.T., *Principles of Dynamics*, 2nd ed., Englewood Cliffs, 1988.
[21] Haar, D.Ter, *Elements of Hamiltonian Mechanics*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964.
[22] Iacob, C., *Mecanică teoretică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.
[23] Ionescu-Pallas, N., *Introducere în mecanica teoretică modernă*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1969.
[24] Irodov, I., Saveliev, I., Zamcha, O., *Recueil de problèmes de physique générale*, Éditions Mir, Moscova, 1976.
[25] Kibble, T.W., *Classical Mechanics*, McGraw-Hill, London, 1973.
[26] Kittel, C., Kight, W.D., Ruderman, M.A., *Mechanics*, McGraw-Hill, New-York, 1965.
[27] Kotkin, L.G., Serbo, V.G., *Collection of Problems in Classical Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1971.
[28] Kotkin, L.G., Serbo, V.G., *Sbornik zadach po klasicheskoi mehanike*, Nauka, Moskwa, 1977.
[29] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *Mecanica*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1966.
[30] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *Mecanique des fluides*, Mir, Moskow, 1967.
[31] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *Mechanics*, 3rd ed., Pergamon Press, 1976.
[32] Marion, J., *Classical Dynamics*, Academic Press Inc., New-York, 1965.
[33] Mercheş, I., Burlacu, L., *Mecanică teoretică şi a mediilor deformabile*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
[34] Mercheş, I., Burlacu, L., *Applied Analytical Mechanics*, „The Voice of Bucovina" Press, Iaşi, 1995.
[35] Meshcherskii, I.V., *A Collection of Problems of Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1965.
[36] Moore, E.L., *Theoretical Mechanics*, Wiley, 1983.
[37] Novacu, V., *Mecanică teoretică*, Universitatea din Bucureşti, 1969.

BCU CENTRALA UNIVERSITARA

[38] Olihovskii, I.I., Pavlenko, M.G., Kuzimenkov, L.S., *Zadach po teoreticheskoi mehanike dlia phizikov*, Izd. Moskovskovo Universiteta, 1977.

[39] Olihovskii, I.I., *Kurs teoreticheskoi mehaniki dlia phizikov*, Izd. Maskovskovo Universiteta, 1978.

[40] Petkevici, V.V., *Teoreticheskaia Mehanika*, Nauka, Moskwa, 1981.

[41] Piatnitzkii, E.S., Truhan, N.M., Hanukaev, Iu.I., Iakovenko, G.N., *Sbornik zadach po analiticheskoi mehanike*, „Nauka", Moskwa, 1980.

[42] Plăcinţeanu, I., *Mecanică vectorială şi analitică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.

[43] Popescu, I.M., *Fizica*, Vol. I şi II, Litografia Institutului Politehnic din Bucureşti, 1973, 1975.

[44] Popescu, I.M., Cone, G.F., Stanciu, Gh.A., *Culegere de probleme de fizică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[45] Radu, A., *Probleme de mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978.

[46] Rogai, E., *Tabele şi formule matematice*, Bucureşti, Editura Tehnică, 1983, 1984.

[47] Rogai, E., Teodorescu, C., *Tabele matematice uzuale*, Bucureşti, Editura Tehnică, ediţiile I – VIII.

[48] Rossberg, K., *A First Course in Analytical Mechanics*, Wiley, 1983.

[49] Saletan, E.J., Cromer, A.H., *Theoretical Mechanics*, John Wiley, New-York, 1971.

[50] Serrin, J., *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, Handbuch der Physik, Springer-Verlag, Berlin, Vol. VIII/1, Fluid Dynamics I, 1959.

[51] Smoleanski, M.L., *Tabele de integrale nedefinite*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972.

[52] Spiegel, M.R., *Theory and Problems of Theoretical Mechanics*, Mc Graw Hill, New-York, 1967.

[53] Stan, M., Tudorache, Şt., *Culegere de probleme de fizică*, Vol. I şi II, Litografia Institutului Politehnic din Bucureşti, 1972.

[54] Teodorescu, P.P., Ilie, V., *Teoria elasticităţii şi introducere în mecanica mediilor deformabile*, Editura „Dacia", Cluj-Napoca, 1976.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

[55] Tomasevich, O.F., *Zbirnik zadach z teoretichnoi fiziki* (*A Collection of Problems in Theoretical Physics*), Kiev University Press, Kiev, 1958 (in Ukrainian).

[56] Ţiţeica, Ş., Curs de *Mecanică Teoretică*, Universitatea din Bucureşti, Fasciculele 1, 2 (1975), Fascicula 4 (1978).

[57] Vâlcovici, V. şi colab., *Mecanică teoretică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1968.

[58] Vescan, T.T., *Fizică teoretică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1957.

[59] Vladimirov, V., Mikhailov, V., Chabounine, M., Karimova, Kh., Sidorov, Y., Vacharine, A., *Recueil de problèmes d'équations de physique mathématique*, Éditions Mir, Moscova, 1976.

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI
F I Z I C Ă

Bun de tipar: august 2005
TIPOGRAFIA SEDCOM LIBRIS IAŞI
ISO 9001:2000
Şos. Moara de Foc nr. 4, cod 700572, Iaşi, România
Tel.: 0232.234.582, 270.479, 242.877;
Fax.: 0232.233.080

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Mecanica analitică (sau teoretică) este primul curs de fizică teoretică predat studenţilor de la facultăţile de fizică. În cadrul acestui curs, sunt studiate formalismele de bază, adevărate „instrumente de lucru", cu ajutorul cărora, ulterior, pot fi abordate probleme specifice şi altor capitole de fizică teoretică, precum: electrodinamica, mecanica cuantică, teoria relativităţii, teoria câmpurilor clasice şi cuantice, fizica statistică, teoria corpului solid ş.a. Aceste formalisme de bază sunt: formalismul clasic-newtonian, formalismul ecuaţiilor Lagrange de speţa I, formalismul ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a, formalismul lui Hamilton, formalismul Hamilton-Jacobi, formalismul variabilelor unghi-acţiune ş.a.

La toate acestea, se mai adaugă unele „instrumente" secundare, însă deosebit de utile în unele situaţii concrete, cum ar fi: principiul lucrului mecanic virtual, principiul lui Maupertuis, teorema Noether, ecuaţiile Routh, parantezele Poisson, transformările canonice, parantezele Lagrange ş.a.

Principalul scop al acestei lucrări este prezentarea într-o manieră care se doreşte cât mai inteligibilă a unor noţiuni fundamentale specifice mecanicii analitice şi exemplificarea utilităţii acestora prin rezolvarea unor probleme de mecanică. De aceea, lucrarea de faţă are un dublu caracter: unul pur teoretic, specific primei părţi a cărţii, care este dedicată introducerii şi explicării unor noţiuni şi principii fundamentale ale mecanicii analitice, şi unul aplicativ, specific părţii a doua a lucrării, consacrată exemplificării modului de utilizare a formalismelor studiate în cadrul cursurilor de mecanică teoretică, prin rezolvarea unor probleme mai mult sau mai puţin „celebre" de mecanică analitică.

I.S.B.N.: 973-670-127-1
0420635 201483